Elméleti mechanika

Cynolter Gábor 1.113 cynolter@general.elte.hu $8^{15} - 10^{00}$

elmfiz.elte.hu/~cyn

Nagy Károly: Elméleti mechanika

Hraskó Péter: Elméleti fizika I

Budó Ágoston: Mechanika

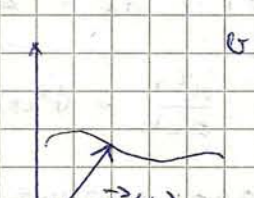
Landau - Lifsic I Mechanika

Mechanika: testek állapotát, egyszerűsített modellekkel, egyszerűsített rendszerben: koordinátarendszer

modell: a, anyagi pont

b, pontrendszer
- merev testek
- deformálható testek

mozgástörvényeit leírni



Fizikai mennyiségek mérése

szög + távolság — mérőeszköz és a test egymáshoz képest nyugalomban van

távolság: Sevres, mintaméter 0,1 μm ...

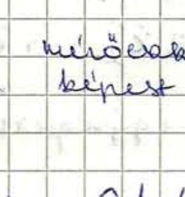
SI - m ^{86}Kr $2p_{10} - 5d_5$

$\lambda \cdot 1650763{,}73$

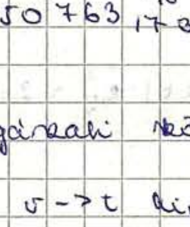
idő: régen: csillagászati középidő $\frac{1}{86400} = 1s$

ma: ^{133}Cs $\sigma \to t$ hiperfinom átmenet

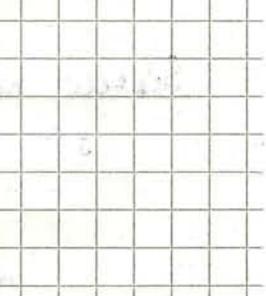
szög: síkban, radián



térszög: szteradián



tömeg: 1 kg etalon, platinum-irídium ötvözet

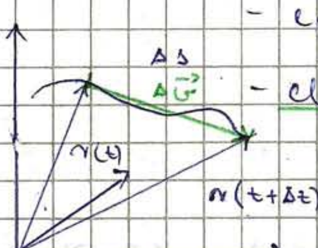


Kinematikai ismeretek:

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a} \quad (t)$

- helyvektor 1 értékű, minimum kétszer differenciálható -> nagy kiterjedésű testekre is.

Tömegpont mozgása



- egyértelműen ismerjük: $\vec{r}(t)$
- elmozdulásvektor $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$
- sebesség: $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$ iránya a pálya érintője

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to t} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

gyorsulás: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

vektor: koordinátatranszformációra ugyanúgy viselkednek mint a helyvektor

Koordinátarendszer: Descartes-féle koordinátarendszer

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r \quad ->$$

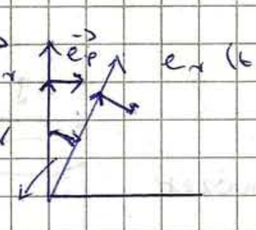
$\vec{e}_{x,y,z}$ állandó egységvektorok

sebesség: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

gyorsulás $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$

Síkbeli polárkoordinátarendszer:

$(x, y) \to (r, \varphi)$



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad \vec{e}_r^{\,2} = 1 \quad \dot{\vec{e}}_r \cdot \vec{e}_r = 0 \quad \dot{\vec{e}}_r \perp e_r$

$\dot{\vec{e}}_r \parallel \vec{e}_\varphi$

$$|\dot{e}_r| = \lim \frac{|\Delta \vec{e}_r|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi}$$

Elmozdulásvektort körívvel közelítem

$$\boxed{\dot{e}_r = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi}$$

helyvektor $\vec r = r\vec e_r$

sebesség: $\vec v = \dot{\vec r} = \dot r \vec e_r + r\dot{\vec e}_r = \dot r \vec e_r + r\dot\varphi \vec e_\varphi$

$v_r = \dot r$, $v_\varphi = r\dot\varphi$

HF: térbeli polárkoordináta rendszer

$$\vec v = \dot r\vec e_r + r\dot{\vec e}_r = \dot r \vec e_r + r\dot\vartheta \vec e_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot\varphi\,\vec e_\varphi$$

gyorsulás polárkoordinátarendszerben

$$\vec a = \dot{\vec v}\,(\dot r\vec e_r + r\dot\varphi\,\vec e_\varphi) = \ddot r\,\vec e_r + \dot r\,\dot{\vec e}_r + \dot r\dot\varphi\,\vec e_\varphi + r\ddot\varphi\,\vec e_\varphi + r\dot\varphi\,\dot{\vec e}_\varphi$$

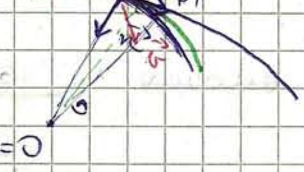
$$\dot{\vec e}_r = \dot\varphi\,\vec e_\varphi \qquad \dot{\vec e}_\varphi = -\dot\varphi\,\vec e_r$$

$$\vec a = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\,\vec e_r + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)\,\vec e_\varphi$$

$$a_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 \qquad a_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi =$$

Emlékeztető: kísérő koordinátarendszer.

$\vec t, \vec n, \vec b$ egységvektorok



$\vec v = v\vec t$ $\quad v_t = v = \dot s \quad v_n = 0 \quad v_b = 0$

$\vec a = \dot{\vec v} = \dot v\vec t + v\frac{d\varphi}{dt}\vec n \quad a_n = \frac{v^2}{R} \quad a_b = 0$

$\vec t$: érintőirányú

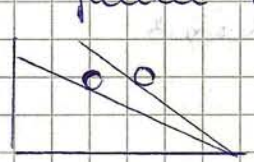
$\vec n$: simulókör középpontjába mutat

$\vec b$: binormális $\quad \vec t, \vec n, \vec b$ jobbsodrású, időben változó

Dinamika, Newton axiómák.

- mozgás egy állapota a testnek

Galilei kísérletei után



I. axióma: tehetetlenség törvénye

Létezik olyan vonatkoztatási rendszer, (inerciarendszer) amelyben a magukra hagyott testek egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.

1. def: inerciarendszer

3, nincs egy rendszerben, magára hagyott test egyenes pályán mozog elindítás után

inerciarendszerben mérve a magára hagyott test egyenletesen mozog

2. definíció: erő - próbatesten létrehozott gyorsulás

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

II. axióma Dinamika alaptörvénye

$$\frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|} = \text{a testre jellemző mennyiség}$$

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} \quad \text{ugyanarra a testre jellemző}$$

$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F \parallel a$ (Kis sebességen igaz!)

↘ m csak a testre jellemző

3. ~~axióma~~: tömeg: csak a testre jellemző mennyiség

$$m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$$

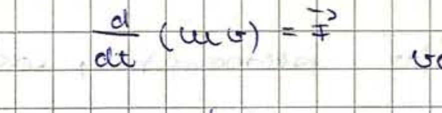
Newton a II. axiómát másképp írta fel.

$\frac{d}{dt}(mv) = \vec{F}$ változó tömegű testekre is érvényes

$mv = I$

$I_2 - I_1 = \int F\,dt$

III axióma: hatás, ellenhatás törvénye

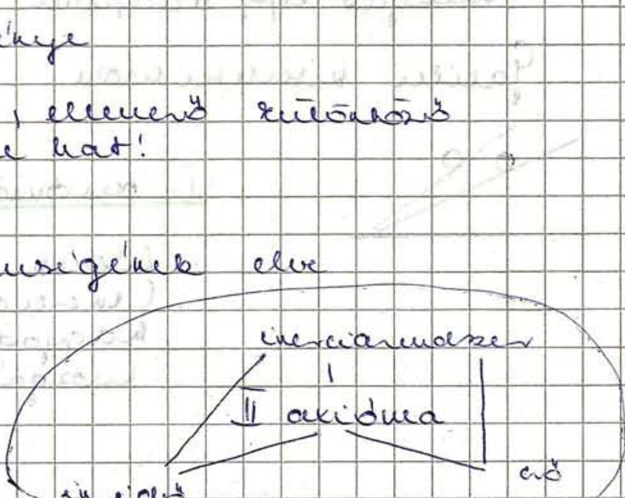


erő, ellenerő különböző testre hat!

IV. axióma erőhatások függetlenségének elve

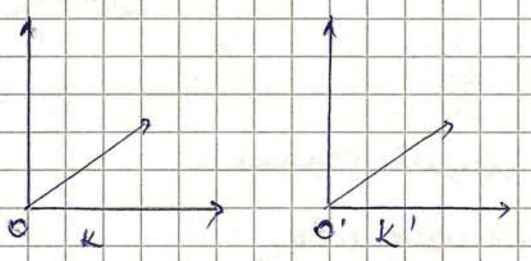
Erő: származtatott egység

$$1\,N = 1\,\frac{kgm}{s^2}$$



Galilei féle relativitási elv

Inerciarendszer



K' egyenesvonalú egyenletes mozgást végez K-hoz képest, akkor K' is inerciarendszer

$t = 0 \quad O = O'$

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V} t \qquad V = \text{áll}$

A két rendszerben az idő ugyanúgy telik

$\frac{d}{dt} \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{V} \qquad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$

$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' \qquad a = a'$

$\vec{F} = F(r, v, t)$

$F(r,$

Transzformáció az erőt változatlanul hagyja, akkor

K: $\vec{F} = m a$

K': $\vec{F}' = m \vec{a}' \sim \vec{F} = m a$

(igaz $V <<<$ fénysebesség)

Mechanikai szempontból a leírt koordinátarendszer ugyan olyan, egyenértékűek

Mechanika mozgásegyenletei invariánsak a Galilei-transzformációval szemben

Mozgásegyenletben nem szerepel a $\vec{r}$ → nincs kitüntetett pont, nincs transzlációs sebesség (V), nincs kitüntetett nyugalmi állapot

2. előadás

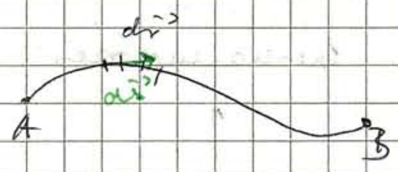
IX. 24

Mechanikai problémák

m = a fény által $\frac{1}{299792458}$ s alatt megtett út

$\Delta x \, \Delta p = \frac{\hbar}{2}$

Megmaradási tételek



Definíció: Munka

m, $\vec{F}$, $\vec{s}$ $\qquad W = \vec{F}\cdot\vec{s}$

$\vec{F}(r)$ $\qquad \delta W = \vec{F}\, d\vec{r}$ elemi munka

$\uparrow$ elemi elmozdulás

$$W_{AB} = \sum_i \delta W = \sum_i \vec{F}_i\, d\vec{r}_i \xrightarrow[\text{finomítjuk}]{\text{lim.}}$$

$$W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} \quad \text{adott pályagörbe}$$

Ívhossz paraméterezése $\qquad \vec{r} = \vec{r}(s)$

$$W = \int_{s_A}^{s_B} \vec{F}(\vec{r})\, \frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}\, d\vec{s} = \int_{s_A} F_t\,(\vec{r}(s))\, ds \qquad \vec{t}^{\,2} = 1$$

$\vec{t} = \vec{e}_t$

Descartes törvény

$x_i(s)$ $\quad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$

$$W = \sum_{i=1}^{3} \int_{s_A}^{s_B} F_i(x_j(s))\, \frac{dx}{ds}\, ds$$

vagy $\quad y(x), z(x) \quad W = F_x(x(y), y, z(y))\, dy + \{z\}$

Munkatétel / Kinetikus energiatétel

Munka definíciója + mozgási egyenlet

Adott Newton II: $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$

$$d\vec{r} = \vec{v}\, dt = \dot{\vec{r}}\, dt$$

$$\boxed{W} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} m\ddot{\vec{r}}\, d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} m\,\ddot{\vec{r}}\,\dot{\vec{r}}\, dt =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2}\right) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \boxed{E_{kB} - E_{kA}}$$

Definíció: m tömegű anyagi pont mozgási energiája

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$$

Definíció: Teljesítmény: időegység alatt végzett munka

$$[W]=[E_k] = 1\cdot N\cdot m = 1\,J = 1\ \frac{kg\, m^2}{s^2} = 1\ W\cdot s$$

Definíció: Pillanatnyi teljesítmény

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d\vec F\, d\vec r}{dt} = \vec F\,\frac{d\vec r}{dt} = \vec F\cdot\vec v$$

Erőterek: konzervatív, disszipatív erőterek

Erő helytől, időtől függ -> erőterek $\vec F(\vec r, t)$

Erő csak időtől függ -> sztatikus erőtér $\vec F(\vec r)$

$\vec F = -\text{grad}\, V(\vec r)$ $\quad V(\vec r) = V(x,y,z)$ potenciálfüggvény

ilyen típusú erőteret konzervatív, vagy potenciálos erőtereknek nevezzük

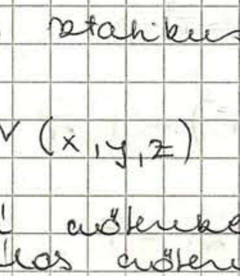
Megj: $\vec F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ $\quad \vec F_y = -\frac{\partial V}{\partial x}$ $\quad \vec F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

- ilyen erőterek rotációmentesek $\quad \text{rot}\, \vec F = 0$

-> vektorazonosság $\quad -\text{rot grad}\, V = 0$

Ekvipotenciális felület

$V(\vec r) = c_i$



$\vec F = -\text{grad}\, V$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec F\, d\vec r = \int_A^B -\text{grad}\, V\, d\vec r = -\int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) =$$

$$= -\int_A^B dV = V_A - V_B \qquad (T_B - T_A)$$

potenciális energia jellegű

Munkatétel

$$W_{AB} = E_{kB} - E_{kA} = V_A - V_B$$

$$E_{kA} + V_A = E_{kB} + V_B = E$$ Teljes mechanikai energia

Tétel I: konzervatív erőtérben $E_{pot} + E_{kin} = E_{teljes}$ és ez megmarad

$T = E_{kin}$ mozgási energia

$T + V = E =$ állandó

$$\boxed{\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2(t) + V(\vec{r}) = E}$$

$r(t)$ elsőfokú differenciálegyenlet

Másképpen

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$m \ddot{\vec{r}} \dot{\vec{r}} = \vec{F} \dot{\vec{r}} \qquad T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2\right) = \vec{F} \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \dot{\vec{r}} = P$$

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \dot{\vec{r}} = -\operatorname{grad} V \dot{\vec{r}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right) =$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0 \Rightarrow T + V = E$$

Példák:

$\vec{F} =$ áll.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad F(x) = F_j > 0 \qquad V = mgz$$

2. $\vec{F}_x = -Dx \qquad F_y = 0 \quad F_z = 0$

$$V = \frac{1}{2} D x^2 \qquad E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

Mf: $x = a\cos(\omega t + \delta) \qquad \dot{x} = -a\omega \sin(\omega t + \delta)$

3, $\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \longrightarrow V = -\gamma \frac{mM}{r}$

• Konzervatív erő $\vec{F} = -\text{grad}\, V(\vec{r})$

↓

• Rotációmentes $\text{rot}\, \vec{F} = 0$

• Munka független az úttól $\int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = V_A - V_B$

• $\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$ zárt görbére 0.

Egy összefüggő felületre __Stokes-tétel__

$$\oint_g \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\vec{f}} \text{rot}\, E\, df$$

$$\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$$

__Disszipatív erők__: ellenpélda

$$\vec{F}(\vec{r}, v, t)$$

E_{mech} nem marad meg! → pl.: hőközlés

Mit tudunk mondani a mechanikai energiára

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_D \qquad \vec{F}_D(\dot{r}) \ldots$$

$$\frac{dT}{dt} = \left(\vec{F} + \vec{F}_D\right)\dot{\vec{r}} = -\text{grad}\, V \dot{\vec{r}} + F_D \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(T + V\right) = P_D = \vec{F}_D \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\int_1^2 dt \quad T(t_2) + V(t_2) = T(t_1) + V(t_1) + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_D\, d\vec{r}$$

Pl.: $\vec{F} = -D\vec{x} - B\dot{\vec{r}}$ $\qquad B > 0$

$$\frac{dE}{dt} = -B\dot{\vec{r}}^2 < 0$$ Mechanikai energia csökkenni fog!

2)

Impulzusmegmaradás

Definíció: $\vec{J} = m\dot{\vec{r}}$ impulzus

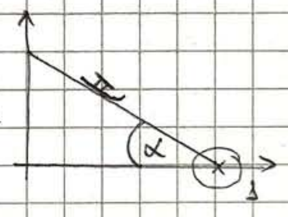
$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ $\quad \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{F}$

$\vec{J}(t_2) - \vec{J}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$

$\rightarrow \vec{F} = 0 \qquad \vec{J}(t_2) = \vec{J}(t_1) = \text{állandó},$

- teljes ható erők eredője 0.
- valamelyik komponens is megmaradhat.

Pl.



ütközik egy ... a szálloló

$J = m v_0 \rightarrow J_x = m v \cos\alpha \qquad F = F_{ütk} + mg$

$\hookrightarrow J_z = m v \sin\alpha$

$\Delta t = J_z = m v \sin\alpha \rightarrow 0$

III. Impulzusmomentum megmaradási tétele (Perdület)

$\vec{N} = \vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{J}$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ forgatónyomaték

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F}$

$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{\emptyset}$

$\frac{dN}{dt} = \vec{M} \qquad N = \text{áll. ha } \vec{M} = 0 \qquad \vec{F} = 0 \qquad \vec{F} \parallel \vec{r}$

$\vec{r} \times \vec{F} = 0$

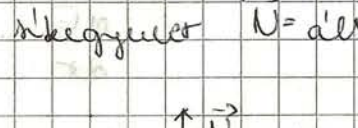
Forgómozgás alapegyenlete.

Centrális erők

Következmények:

$\vec{N} \perp \vec{r} \rightarrow \vec{N}\vec{r} = 0 \qquad N_x x + N_y y + N_z z = 0$ síkegyenlet $\vec{N} = \text{áll}$

Erőcentrum síkján történő síkmozgás.



$r \times \dot{\vec{r}} = \text{áll}$

$\Delta f = \vec{r} \times \Delta\vec{r}$

$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad \frac{df}{dt} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

$\frac{df}{dt} =$ ter. sebesség

$\overline{\text{IX}}$. 1.

$$m\vec a = \vec F \rightarrow \times \int dt = \vec p$$
$$\searrow \ \vec r \int dt = \vec E$$
$$\searrow \ \times \vec r \int dt \rightarrow N$$

Tömegpont speciális mozgásai

a, rugalmas $\vec F = -D\vec r$

$$m\ddot{\vec r} = -D\vec r \qquad \text{definíció} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

$$\boxed{\ddot{\vec r} + \omega_0^2 \vec r = 0}$$

Keressük a megoldást

$$\vec r = \vec A e^{\lambda t} \qquad \vec A = \text{állandó}$$
$$\dot{\vec r} = \lambda A e^{\lambda t}$$
$$\ddot{\vec r} = \lambda^2 A e^{\lambda t}$$
$$\lambda^2 \vec A e^{\lambda t} + \omega_0^2 \vec A e^{\lambda t} = 0 \qquad \vec A \neq 0 \qquad e^{\lambda t} \neq 0$$
$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

Ált. megoldás

$$\vec r = \vec A_1 e^{\lambda_1 t} + \vec A_2 e^{\lambda_2 t} \qquad e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$
$$\vec r = \vec A \qquad + \vec B \sin(\omega t) \qquad e^{i\omega t}$$
$$\vec A, \vec B \leftarrow A_1, A_2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \nu = \frac{1}{T}$$

A, B kezdeti feltétel $\vec r(0) = \vec r_0 = \vec A$

$$\vec v(0) = -\omega \vec A \sin(\omega t)\big|_0 + \omega \vec B \cos(\omega t)\big|_0 = \omega \vec B$$

$$\boxed{\vec r = \vec r_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)} \qquad (r_0(v_0))$$

$$r_0 \parallel v_0$$

1 dimenzió

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t =$$

$A \cos x'$ $\qquad$ $a \sin x'$

$$= a \cos(\omega t - \alpha)$$

$$F = -Dx \qquad U = \frac{1}{2} D x^2$$

E megmaradás $\quad E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} D x^2 =$

$$= \frac{1}{2} D a^2 \cos^2(\omega t - \alpha) + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$m\omega^2 = D$

$$\frac{1}{2} D a^2 (\cos^2(\ ) + \sin^2(\ )) = \frac{1}{2} D a^2$$

Csillapított rezgőmozgás

- közeg

$\vec{F}_e \sim \vec{v}^2$ $\to -\vec{v}$ kis sebességnél

$\searrow -\vec{v}^2$ nagy sebesség

1 dimenzióban:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} \qquad \omega^2 = \frac{D}{m} \qquad 2\alpha = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Megoldjuk a differenciálegyenletet:

$$x = e^{\lambda t} \qquad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \qquad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2)\cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \qquad \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

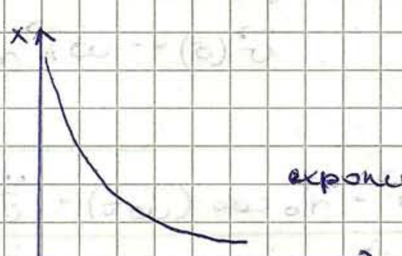
általános megoldás:

$$x = A e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})} + B e^{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}$$

$\alpha > \omega$ erős csillapítás

$\lambda_1 \lambda_2 < 0$

nincs oszcilláció



exponenciális

fordíts

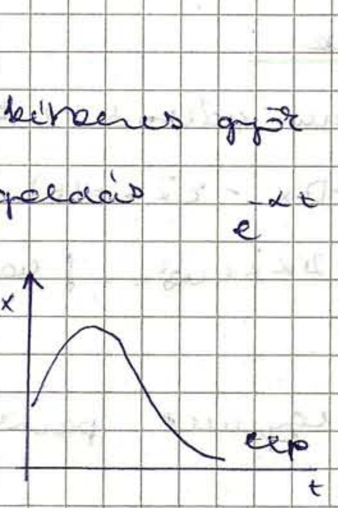
b, másik aleset

$$\alpha = \omega \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha \quad \text{kétszeres gyök}$$

2 partikuláris megoldás $e^{-\alpha t}$ $te^{-\alpha t}$

$$x = e^{-\alpha t}(a_1 + a_2 t)$$

- nem periódikus

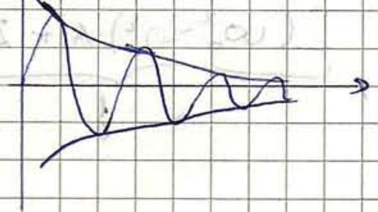


c, $\alpha < \omega$ gyenge csillapítás, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

általános: $$x = e^{-\alpha t}\left(a_1 e^{i\sqrt{\omega^2-\alpha^2}} + a_2 e^{-i\sqrt{\omega^2-\alpha^2}}\right)$$

$$\boxed{x = a e^{-\alpha t} \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} + \delta\right)}$$



Energia disszipáció

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{D}{2}x^2\right) = \frac{m}{2} 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{D}{2} 2\dot{x}x =$$

$$= \dot{x}(m\ddot{x} + Dx) = -k\dot{x}^2$$

Periódus nagyobb.

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\alpha^2}} > \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\alpha T}$$ csillapítás

Kényszerrezgések

periodikusan változó erő

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F(t) \qquad F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos(\Omega t)$$

Inhomogén egyenlet partikuláris megoldása → próbafüggvény

$$x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad A, B, \omega = ?$$

kezdeti eset akkor $\omega = \Omega$!

$$\dot{x}_p = -A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t$$

$$\ddot{x}_p = -A\Omega^2\cos\Omega t - B\Omega^2\sin\Omega t$$

$$\underbrace{[(\omega_0^2-\Omega^2)A + 2\alpha\Omega B]}_{f}\cos\Omega t + \underbrace{[(\omega_0^2-\Omega^2)B - 2\alpha\Omega A]}_{=0 \quad \frac{B}{A}\ldots}\sin\Omega t = f\cos\Omega t$$

$$B = \frac{2\alpha\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}A$$

$$(\omega_0^2-\Omega^2)A + \frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega_0^2-\Omega^2}A = f$$

$$A = f\frac{\omega_0^2-\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)+4\alpha^2\Omega^2} \qquad B = f\frac{2\alpha\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)+4\alpha^2\Omega^2} \sim f$$

$$x_p = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\alpha^2\Omega^2}}\left(\frac{\omega_0^2-\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\alpha^2\Omega^2}}\cos\Omega t + \frac{2\alpha\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\alpha^2\Omega^2}}\sin\Omega t\right)$$

fázis

$$\cos\delta \qquad \sin\delta = -\frac{2\alpha\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\alpha^2\Omega^2}}$$

Általános megoldás:

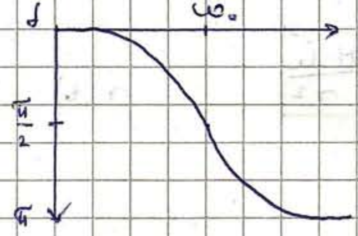
$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\alpha^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \delta(\Omega)) + \alpha e^{-\alpha t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\,t + \varphi)$$

→ lecseng

Kezdeti feltételek a)

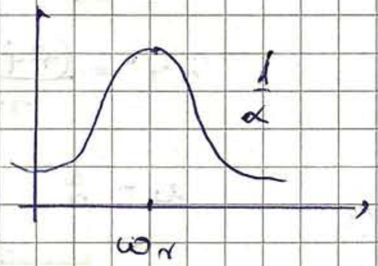
amplitúdó $\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2-4\alpha^2\Omega^2}} = a(f, \omega_0, \Omega, \alpha)$

kényszerességes fázisa: $\delta < 0$



- amplitúdó max. rezonanciafrekvencia

f max $\frac{\partial a}{\partial \Omega} = 0 \Rightarrow \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$



$\frac{f}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)+4\alpha^2\Omega^2}} = \sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2+\alpha\alpha^2)^2+\alpha^2(\dots)}$

$\alpha \to 0$

amplitúdó $\to \infty$ rezonanciakatasztrófa

$m\ddot{x} = F(x) + F$ anharmonikus rezgések

$-Dx + \alpha x^2 + \beta x^3$ perturbáció számítás.

Bolygómozgás $F = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ centrális erő

$M \gg m$

(M) $\quad m$

Mozgásegyenletből polárkoordinátákkal

$r: \quad m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \gamma \frac{mM}{r^2}$

$\varphi: \quad m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \quad \to$ már megoldottuk

$\lambda = r^2 \dot\varphi =$ állandó területi sebesség állandó

centrális erőben

$\vec{N} = m\, \vec{r} \times \vec{F}$ – állandó

$$\boxed{m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = \gamma \frac{Mm}{r^2}} \qquad r(t) \quad \varphi(t) \to r(\varphi)$$

$\lambda = r^2 \dot\varphi$

$$\dot r = \frac{dr}{d\varphi}\dot\varphi = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{\lambda}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \cdot \lambda$$

$$r\dot\varphi^2 = \frac{(r^2\dot\varphi)^2}{r^3} = \frac{\lambda^2}{r^3} \quad (?)$$

$u = \frac{1}{r}$ új változó $\qquad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}$

$$\boxed{\dot r} = \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\lambda = u^2\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\right)\lambda = \boxed{-\lambda\frac{du}{d\varphi}}$$

$$\boxed{\ddot r} = \frac{d}{dt}\left(-\lambda\frac{du}{d\varphi}\right) = -\lambda\dot\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}\right) = \boxed{-\lambda^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}}$$

mert $\dot\varphi = \frac{\lambda}{r^2} = \lambda u^2$

$$r\dot\varphi^2 = \frac{\lambda^2}{r^3} = \lambda^2u^3 \Rightarrow -\lambda^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} - \lambda^2u^3 = \gamma M u^2$$

Eltolt harmonikus oszcillátor $\qquad \boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M}{\lambda^2}}$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(u - \frac{\gamma M}{\lambda^2}\right) + \left(u - \frac{\gamma M}{\lambda^2}\right) = 0$$

$$u - \frac{\gamma M}{\lambda^2} = A\cos(\varphi + \alpha) \quad \sim r(\varphi)$$

$$r(\varphi) = \frac{\lambda^2}{\gamma M}\left(\frac{1}{1 + \frac{A\lambda^2}{\gamma M}\cos(\varphi+\alpha)}\right)$$

Kúpszelet polális egyenlete

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \frac{p}{1+\epsilon\cos\varphi} \\ p &= \frac{\lambda^2}{\gamma M} \\ \epsilon &= \frac{A\lambda^2}{\gamma M} \end{aligned}}$$

$\varepsilon < 1$ ellipszis $E < 0$

$\varepsilon = 1$ parabola $E = 0$

$\varepsilon > 1$ hiperbola $E > 0$

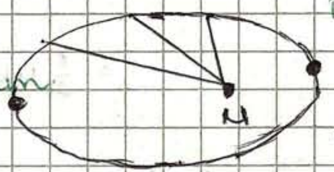
ha energiával fejezzük ki, E összes mechanikai energia

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EN^2}{\gamma^2 M^2 m^3}}$$

X. 08.

Bolygómozgás folytatása

Ellipszispálya levezetése II.



$m r^2 \dot\varphi = N$

$\dot\varphi = \frac{N}{m r^2} = \frac{\lambda}{r^2}$

$$\frac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2) - \gamma \frac{mM}{r} = E$$

$$\frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + \frac{N^2}{m^2 r^2}\right) - \gamma \frac{mM}{r} = E \quad \text{Energiamegmaradási tétel}$$

a centrifugális potenciál

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = r' \frac{N}{m r^2} = \frac{N}{m}\frac{r'}{r^2} \qquad r(t) \to r(\varphi)$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{N^2}{m^2}\left(\frac{r'}{r^2}\right)^2 + \frac{N^2}{m^2}\frac{1}{r^2}\right) - \gamma \frac{mM}{r} = E$$

$$u = \frac{1}{r} \qquad du = \frac{dr}{r^2} \qquad u' = \frac{r'}{r^2}$$

$$\frac{N^2}{2m}(u'^2 + u^2) - \gamma m M \cdot u = E$$

$$u'^2 + u^2 - 2\gamma \frac{m^2 M}{N^2} \cdot u = \frac{2mE}{N^2}$$

$$\left(\left(u - \gamma \frac{m^2 M}{N^2}\right)'\right)^2 + \left(u - \gamma \frac{m^2 M}{N^2}\right)^2 = \frac{2mE}{N^2} + \left(\gamma \frac{m^2 M}{N^2}\right)^2$$

Harmonikus oszcillátorra hasonlít.

$$\frac{1}{2} m \dot x^2 + \frac{1}{2} D x^2 = E \qquad \omega^2 = \frac{D}{m}$$

$$\dot x^2 + \frac{D}{m} x^2 = \frac{2E}{m}$$

$$\dot x^2 + \omega^2 x^2 = \frac{2E}{m}$$

analógia a rugó mozgására $\omega = 1$

$$u - \gamma \frac{m^2 M}{N^2} = A \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$A = \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \gamma^2 \frac{m^4 M^2}{N^4}}$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}}$$

$$\boxed{p = \frac{\lambda^2}{\gamma M} = \frac{N^2}{\gamma m^2 M}} \qquad \boxed{\varepsilon = A \frac{\lambda^2}{\gamma M}}$$

Pályák:

$\boxed{\varepsilon < 1 \quad \text{ellipszis}}$

Napközelben

$$\varphi = 0 \quad r_0 = \frac{p}{1+\varepsilon} \qquad v_0^2 = r_0^2\dot{\varphi}^2 = r_0^2 \frac{\lambda^2}{r_0^4} = \frac{\lambda^2}{r_0^2} = \frac{\lambda^2(1+\varepsilon)^2}{p^2}$$

$$E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{r} =$$

$$= \frac{1}{2} m \lambda^2 \frac{(1+\varepsilon)^2}{p^2} - \gamma \frac{mM}{p}(1+\varepsilon) = \frac{m\lambda^2}{2p^2}(\varepsilon^2 - 1)$$

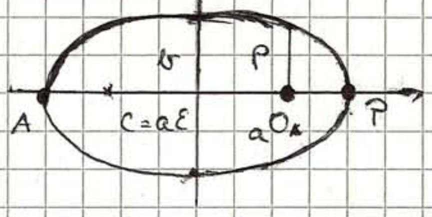
Speciálisan körpályára

$$E = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} E_{kin} < 0 \qquad \boxed{E < 0}$$

Tetszőleges pályák alakjára is érvényes

$\varepsilon = 1$	$E = 0$	parabola
$\varepsilon > 1$	$E > 0$	hiperbola

Ellipszisnél



$$T = \pi ab \qquad r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \qquad p = \frac{b^2}{a}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Kepler törvények

2.) $\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2}\lambda = \frac{N}{2m}$ = állandó

3.) $\delta_T = \frac{\lambda}{2} \cdot T = \pi ab = \pi a \sqrt{pa}$

$$\frac{\lambda^2}{4} \cdot T^2 = \pi^2 a^2 pa$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2}{M}}$$

perihéliumelfordulás

1.)

Lépések a bolygómozgás levezetéséhez

1, probléma, erőtörvény, közelítés

$$M: \text{fix}, \quad \vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

2, mozgásegyenletek, alkalmas koordinátarendszer, síkbeli polár.

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \quad \to \quad \lambda = r^2\dot{\varphi} = \text{állandó}$$

3. $r(t) \to r(\varphi) \quad \leftarrow \quad \lambda = r^2\dot{\varphi}$

4, $u = \frac{1}{r} \to$ inhomogén (eltolt) oszcillátoregyenlet

5, $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \qquad p = \frac{\lambda^2}{\gamma M} \qquad \varepsilon = A\frac{\lambda^2}{\gamma}M \leftarrow \varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{2E\lambda^2}{\gamma^2 M^2 m^3}}$

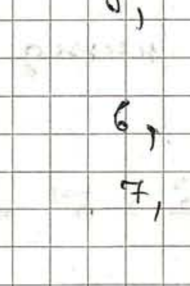
6, diszkusszió: $E \gtreqless 0$

7, Kepler törvények levezetése

Gyorsuló vonatkoztatási rendszerek

$m\vec{a} = \vec{F}$

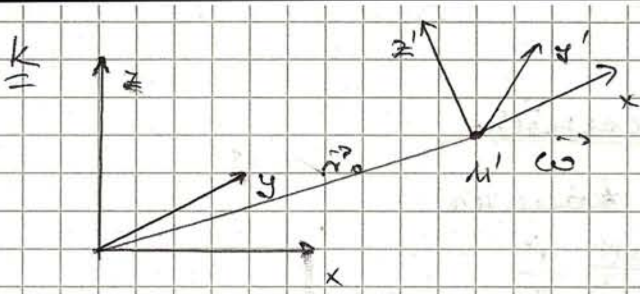
Szögsebességvektor definíciója $\vec{\omega}$



$$|\vec{v}| = \varrho\,\omega = r\sin\vartheta\,\omega$$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$|\vec{\omega}| = \omega \qquad \vec{\omega}$ iránya pozitív forgásirány



$\boxed{K \to K'}$

$K(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

$$A = A_{x'}\vec{i}' + A_{y'}\vec{j}' + A_{z'}\vec{k}' \qquad \frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}'$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA_{x'}}{dt}\vec{i}' + \frac{dA_{y'}}{dt}\vec{j}' + \frac{dA_{z'}}{dt}\vec{k}' +$$

$$+ A_{x'}\vec{\omega} \times \vec{i}' + A_{y'}\vec{\omega} \times \vec{j}' + A_z \vec{\omega} \times \vec{k}'$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d'A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

$\vec{A}$ vektor differenciálhányados transzformációja.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_0}{dt} + \left(\frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{tr} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \qquad \vec{v}_{tr} \text{ : transzlációs sebesség}$$

Mit tudunk a sebességről?

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' =$$

$$= \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} + \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right) + \frac{d'\omega}{dt} \times \vec{r}' + \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{\omega})}_{=} \times \vec{r}'$$

$$= \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} + \frac{d'\vec{v}'}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d'\omega}{dt} \times \vec{r}'$$

Mozgásegyenlet K'-ben

$$K\text{-ban } \vec{F} = m\frac{d^2 r}{dt^2} = m\vec{a}' + m\vec{a}_{tr} + 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') +$$

elhagyva

$$m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

elhagyva

Bevezetjük a tehetetlenségi erők.

$$m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{a}_{tr} - m\vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

transzlációs, centrifugális, Coriolis-erő, Euler-erő

Tehetetlenségi-pszeudo erők.

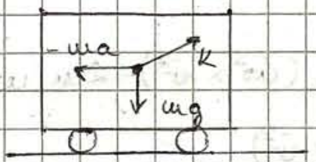
$K \to K'$

$\vec r_0, \vec v_{tr}$ sebesség — $\vec r_0$ nincs kitüntetett pont; $\vec v_{tr}$ nincs kitüntetett nyugalmi áll. } Galilei-féle relativitási elv

Galilei transzformáció: $t_1 = t_2$, $\vec v_1 = \vec v_2 + \vec v_{tr}$ } $\vec a = \vec a'$

$\to \vec a_{tr} \neq 0$ $\quad \vec\omega = 0 \quad \vec\omega' = 0$

(1.)



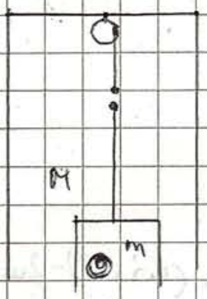
Együtt mozgás

$$0 = \vec K - m\vec g - m\vec a_{tr}$$

Külső nézőpontból: $m\vec a_{tr} = \vec K + m\vec g$

(2.) Tehetetlen és súlyos tömeg kapcsolata

Eső lift.



$\vec a_{tr} = \vec g$ lift mozgásegyenlete:

$$\boxed{M_t \vec a_{tr} = M_s \vec g}$$

liftben a tárgy mozgásegyenlete

$$\boxed{\vec a = \vec g\left(\frac{m_s}{m_t} - \frac{M_s}{M_t}\right)}$$

- független az anyagi minőségtől
- gravitációs erő kiejti a tehetetlenségi erőt.

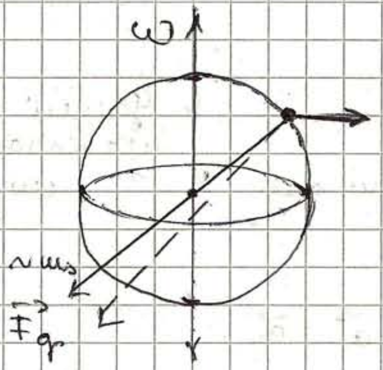
(3.) Forgó Föld esete

$\vec a_{tr} = 0 \quad \vec\omega \neq 0 \quad \dot{\vec\omega} = 0 \quad \omega = \frac{2\pi}{86167}\,\frac{1}{s}$

$$m\ddot{\vec r} = \underbrace{-\gamma\frac{m_s M_s}{r^2}\frac{\vec r}{r} - m_t\,\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)}_{\text{nehézségi erő}} - 2m_t(\vec\omega\times\dot{\vec r})$$

M_s Föld tömege

$\vec g$ iránya és abszolútértéke változik



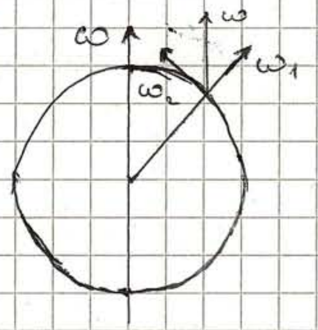
m_t $\omega^2 R \sin\vartheta$

$0{,}039 \sin\vartheta \frac{m}{s^2}$ ~ 3 %

Torziós inga

$\frac{m_s}{m_t} =$ → $\vec{g}$ eltolódó iránya

Coriolis-erő



$$m_t \ddot{\vec{r}} = m_s \vec{g} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}) - 2m(\omega_1\times\vec{v}) - 2m(\vec{\omega}_2\times\vec{v})$$

$\vec{\omega}_1 \times \vec{v}$ <

vízszintes elhelyezés

E'-jellemű jel

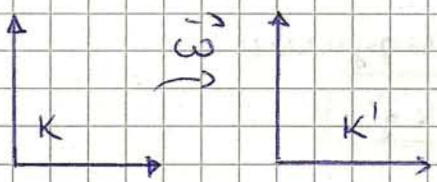
nívóváltozás

K-i irány ↓ csökken

Ny-i irány ↑ nő

Eötvös-hatás

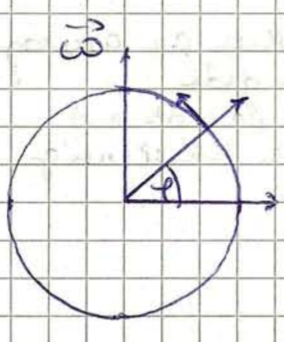
Inerciális

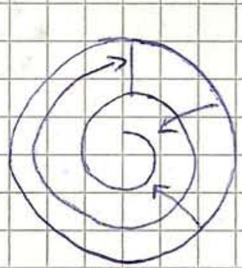


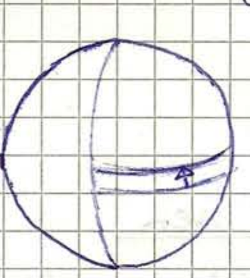
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \cancel{\omega\times A}\ \frac{d'A}{dt} + \omega\times\vec{A}$$

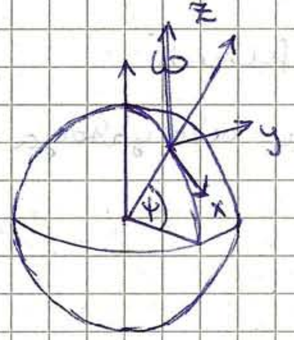
$$m_t \ddot{\vec{r}} = \underbrace{-\gamma\frac{m_s M_s}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} - m_s\omega\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{mg}\ \underbrace{-2m_t(\vec{\omega}\times\vec{v})}_{\text{Coriolis}}$$







Szabadesés



$$m\ddot{\vec r} = m\vec g - 2m\,\vec\omega\times\vec v$$

$$g = \begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \omega = \begin{pmatrix}-\omega\cos\psi\\0\\\omega\sin\psi\end{pmatrix}$$

$$\vec\omega\times\dot{\vec r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ \dot x & \dot y & \dot z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\dot y\sin\psi \\ \omega\dot x\sin\psi + \omega\dot z\cos\psi \\ -\omega\dot y\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot x &= 2\omega\dot y\sin\psi \\ \ddot y &= -2\omega\dot x\sin\psi + 2\omega\dot z\cos\psi \\ \ddot z &= -g + 2\omega\dot y\cos\psi \end{aligned}}$$

$x = 0$ $\qquad \boxed{\begin{aligned} \ddot y &= -2\omega\dot z\cos\psi \\ \ddot z &= -g + x \end{aligned}}$ $\qquad$ Ezt kell megoldani

zy

$$\dot z = -gt$$

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\ddot y = 2\omega t\cos\psi$$

$$\dot y = \omega t^2\cos\psi$$

$$y = \frac{1}{3}\omega t^3\cos\psi + 0 + \cancel{\omega t^2}$$

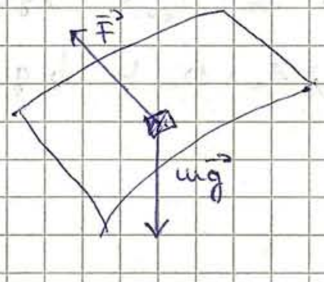
$$\longrightarrow \quad x \sim \omega t^3$$

Kényszermozgások

Vannak kötő feltételek

I módszer

Kényszererők



mozgásegyenlet

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\vec r} &= \vec F + \vec F' \\ f(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &4 \text{ egyenlet} \\ &6 \text{ ismeretlen} \end{aligned}$$

További feltételrendszerek kezelése

$\vec{F}'$ ⊳ felület axiómából nem következő feltétel

$\to \vec{F}'$ a felület menti mozgást nem befolyásolja

Geometria:

$f \perp \mathrm{grad}\, f$ felület ~~fel~~ gradiense

$\vec{F}' = \lambda\, \mathrm{grad}\, f$

$\vec{F}' \to \lambda$

$3 \to 1$

Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenlet

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \lambda\, \mathrm{grad}\, f \\ f(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned}\right]$$

Ált. megoldás:

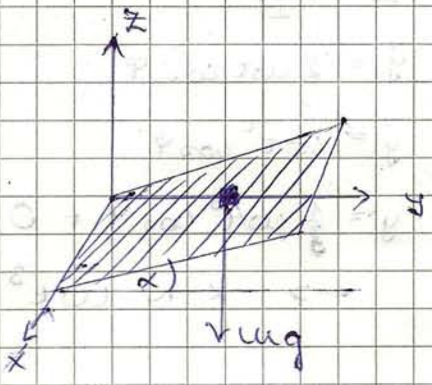
$f(\,.\,) = 0 \quad \frac{d^2}{dt^2}\,;\ \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ kétszer differenciáljuk, és a mozgásegyenletbe beírjuk

$\to \lambda(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t)$

1. Példa: mozgás lejtőn

$f(\vec{r}) = z - y\, \mathrm{tg}\, \alpha$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$



$\frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{tg}\, \alpha$

$\vec{F}' = \lambda\, \mathrm{grad}\, f = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{tg}\, \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$

$m\ddot{x} = 0$

$m\ddot{y} = -\lambda\, \mathrm{tg}\, \alpha$

$m\ddot{z} = -mg + \lambda$

$z = y\, \mathrm{tg}\, \alpha$

$\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_{1}}$

Megoldjuk:

$-mg + \lambda = -\lambda\, \mathrm{tg}^2 \alpha$

$\to \lambda(1 + \mathrm{tg}^2 \alpha) = mg$

$\boxed{\lambda = mg \cos^2 \alpha}$

$\ddot{y} = -g \cos^2 \alpha\, \mathrm{tg}\, \alpha = -g \cos \alpha \sin \alpha$

$\ddot{z} = -g + g \cos^2 \alpha = -g \sin^2 \alpha$

$\to y = y_0 + v_{y_0} t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \sin \alpha\, t^2$

$z = z_0 + v_{z_0} t - \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha\, t^2$

Mozgó felületeknél $\lambda(t) \dots f(\vec{r})$

$$z - y\,f(t) = 0$$ felület egyenlete

$$\dot{z} - \dot{y} f - y \dot{f} = 0$$

$$\ddot{z} - \ddot{y} f - 2\dot{y}\dot{f} - y\ddot{f} = 0$$

mozgásegyenletbe visszahelyettesítve megoldható

$$\rightarrow \lambda(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, f, \dot{f}, \ddot{f})$$

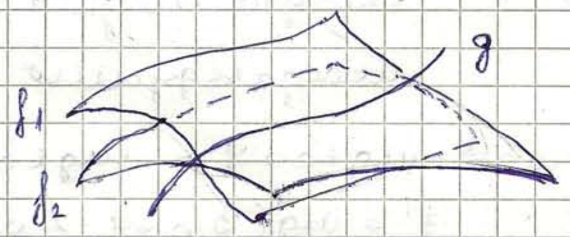
2. Ha előírt görbén kell mozogni

görbe mint két felület metszete

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}'$$

$$f_1(\vec{r}, t) = 0$$

$$f_2(\vec{r}, t) = 0$$



$$\vec{F}' = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2$$

$$f_1 = 0$$

$$f_2 = 0$$

$$\vec{r}, \lambda_1, \lambda_2$$

II módszer

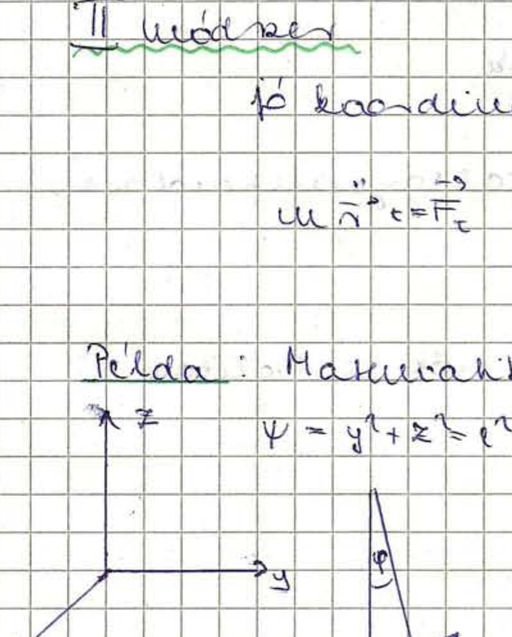
jó koordinátaválasztás

$$m\ddot{\vec{r}}_t = \vec{F}_t$$ felület érintő síkjában : mindenkori görbe érintője mentén

Példa: Matematikai inga

$$\psi = y^2 + z^2 = l^2 \qquad s = l\varphi \qquad m\frac{d^2 s}{dt^2} = -mg\sin\varphi$$

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi$$



Kis kitérésre

$\sin\varphi \sim \varphi$

$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \qquad t=0 \quad \varphi_1 \; \dot{\varphi}=0$

$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Normális irány:

$a_1 = \frac{v^2}{l}$

$m\frac{v^2}{l} = -mg\cos\varphi + F'$

$v^2 \leftarrow$ energia megmaradásból

mozgásegyenlet integrálja

$\frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0$

$F' = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$

PONTRENDSZEREK

Anyagi- vagy tömegpontok rendszere → n db van

Newton axiómák továbbra is érvényesek

$$\underbrace{m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_i\ldots)}_{\text{külső erők}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i \ldots \vec{r}_j)}_{\text{belső erők}}$$

3n egyenletből álló differenciálegyenletrendszer

Feltevések
- $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ N. III.
- $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ Belső erők centrálisak

- egyenleteket összeadhatjuk

$$\sum_i m_i \ddot{\vec r}_i = \sum_i \vec F_i + \underbrace{\sum_{ij} \vec F_{ij}}_{\vec F_{ij} + \vec F_{ji} = 0} = \sum_i F_i = \vec F$$ Külső erők eredője

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_i m_i \dot{\vec r}_i\Big) = \frac{d}{dt}\sum_i \vec I_i = \frac{dI}{dt} \qquad I = \sum_i I_i$$ N. II. pontrendszere

$$\boxed{\dot{\vec I} = \vec F}$$

Impulzustétel

Tömegközéppont:

$$r_0 = \frac{\sum_i m_i \vec r_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec r_i}{M} \qquad M = \sum_i m_i$$

$$\boxed{m \ddot{\vec r}_0 = \vec F}$$

Zárt pontrendszer: $\vec F = 0 \to \vec I = m\dot{\vec r} = \text{áll.}$

Tömegközéppont-tétel:
Külső erők eredője a TKP-ba hat.

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\vec r}_0 &= 0 \\ r_0 &= \vec a t + \vec b \end{aligned}\right]$$ mozgásegyenlet 6 integrálja

Impulzusmomentum tétel

$$m \ddot{\vec r}_i = \vec F_i + \sum_{ij} \vec F_{ij} \qquad \vec r_i \times \qquad \sum_i$$

$$\sum_i \vec r_i \times m_i \ddot{\vec r}_i = \sum_i \vec r_i \times \vec F_i + \sum_{ij} \vec r_i \times \vec F_{ij}$$

$$\vec r_i \times \vec F_{ij} + \vec r_j \times \vec F_{ji}$$

$$\vec r_i - \vec r_j \times \vec F_{ij} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_i m_i \vec r_i \times \dot{\vec r}_i\Big) = \sum_i \vec r_i \times \vec F_i$$

$$/(\dot{\vec r}_i \times \dot{\vec r})$$

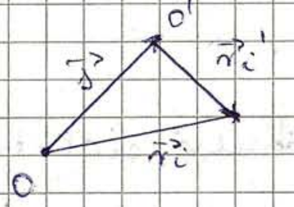
$$\vec M = \sum M_i = \sum_i \vec r_i \times \vec F_i$$

$$\vec N = \sum \vec N_i = \sum_i m_i \vec r_i \times \dot{\vec r}_i$$

$$\boxed{\dot{\vec N} = \vec M}$$ Impulzusmomentum tétel

- ha $\vec M = 0$ $\quad \vec N = \text{áll} \to$ 3 integrál

$\vec N$ függ a vonatkoztatási pont megválasztásától



$$\vec r_i = \vec s + \vec r_i' \qquad (\dot{s} = 0)$$

$$O: \ \vec N = \sum_i m_i \vec r_i \times \dot{\vec r}_i$$

$$O': \ \vec N' = \sum_i m_i \vec r_i' \times \dot{\vec r}_i' = \sum_i m_i (\vec r_i - \vec s) \times \dot{\vec r}_i =$$

$$= \vec N - \vec s \times \sum_i m_i \dot{\vec r}_i = \vec N - \vec s \times m \dot{\vec r}_s$$

Impulzusmomentum érvényes nyugvó vonatkoztatási pontra vagy a ~~mozgó~~ rendszer tetszőlegesen mozgó tömegközéppontjára.

+ pillanatnyi forgástengely

Energiamegmaradás, Munkatétel

$$m \ddot{\vec r}_i = \vec F_i + \sum_j \vec F_{ij} = \vec F_i^* \qquad / \cdot \dot{\vec r}_i, \ \sum_i$$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec r}_i \cdot \dot{\vec r}_i = \sum_i \vec F_i^* \dot{\vec r}_i$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec r}_i^2 = \sum_i \vec F_i^* \dot{\vec r}_i \qquad T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec r}_i^2$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1} \vec F_i^* \dot{\vec r}_i \qquad \int_{t_1}^{t} dt$$

$$\boxed{T(t_2) - T(t_1) = \int_1^2 \vec F_i^* \dot{\vec r}_i \, dt = \int_1^2 \vec F_i^* \, d\vec r_i \equiv W}$$

Munkatétel

W külső és belső erők munkája

Konzervatív rendszer

$$\vec F_i^{k} = -\mathrm{grad}_i V(r_i, \dots, r_j)$$

Szabaderők: potenciál negatív gradiense

$$\vec F_{ix} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad F_{iy} = \frac{\partial V}{\partial y_i} \qquad V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

$$W_k = \sum_i \int_1^2 \vec F_i^k \, d\vec r_i = \sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \left(-\frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial V}{\partial y_i} dy_i - \frac{\partial V}{\partial z_i} dz_i \right) =$$

$$= -\int_1^2 dV = V_1 - V_2$$

Kényszerek nincsenek vagy teljes munkájuk Ø

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \to$$

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$

Energiatétel → +1 megmaradó mennyiség

Mozgásegyenletek megmaradó integráljai:

max: 10 db

6 – TKP ($\vec{r}_0^{TKP}$, $\vec{v}_0^{TKP}$)

3 – Impulzusmomentum

1 – Energiatétel: (konzervatív)

1 dimenzió: $2+0+1=3$

2 dimenzió: $4+1+1=6$

n db tömegpont gravitációsan csatolt

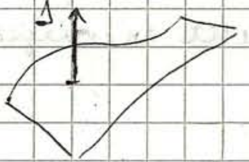
2 db könnyű

3 naptól $\left.\begin{matrix} 3\cdot 3 \\ 3\cdot 3 \end{matrix}\right\} 18 > 10$ csak numerikusan lehetne

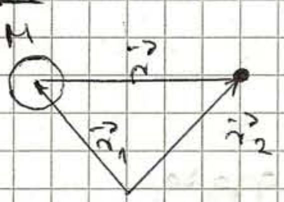
~ káosz

Bolygómozgás

X.22



$\vec{F}' = \lambda \,\mathrm{grad}\, f$ pontrendszer: 10 integrál



$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} = \gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$M\ddot{\vec{r}}_1 = \gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad \Big| \cdot m$$

$$m\ddot{\vec{r}}_2 = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad \Big| \cdot (-M)$$

$\to \Sigma$

Relatív mozgás:

$$Mm(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}(m+M)$$

$$\frac{Mm}{m+M}\ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \mu = \frac{mM}{m+M} \text{ a redukált tömeg}$$

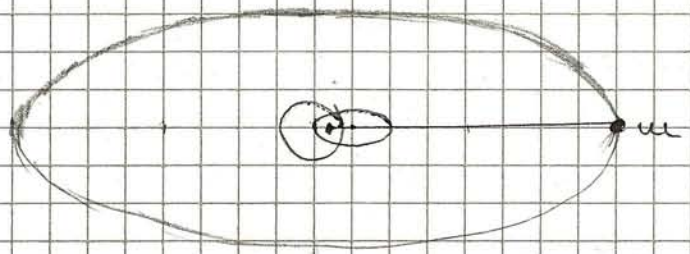
$$\ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{M+m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \mu = \frac{m}{1+\frac{m}{M}}$$

Bolygómozgás:

Kepler I: kúpszelet

Kepler II: centrális erő →

Kepler III: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma(M+m)} = \frac{4\pi^2}{\gamma M\left(1+\frac{m}{M}\right)}$



MECHANIKA ELVEI

- matematikai vizsgálat

-> alapegyenletek általánosítása -> Mechanika elvei

-> összhang a Newton-egyenletekkel

-> elvek továbbra is axiómák -> tapasztalatok, kísérletek vizsgálják

Virtuális munka elve:

- Egyensúly esetén a II. axiómával egyenlő

Virtuális elmozdulás:

Kényszer által megengedett, végtelen gyorsan bekövetkező ~~elmo~~ virtuális elmozdulás (infinitezimális)

Kényszerfeltétel mentén

Bernoulli: mechanikai egyensúly legáltalánosabb elve (1734)

$\vec{F}\cdot\delta\vec{r} = 0 \qquad \vec{F} \sim$ szabad erők

$(\vec{F} + \vec{F}')\,\delta r = 0$

Kényszer munkája 0.

Kényszer $f(\vec{r}, t)$ felületen

$$f(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) + \nabla f \, d\vec{r} + \dots$$

$$\vec{F}' \parallel \nabla f \to F' \delta r = 0$$

Kényszererő virtuális munkája 0

Szabadságok virtuális munkája egyensúly esetén 0.

Bizonyítás: I. ekvivalens a Newton II törvényével

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0$$

$$(\vec{F} + \vec{F}')\delta\vec{r} = 0$$

$$\vec{F} \delta\vec{r} = 0$$

Virtuális munka elvből a Newton egyenlet

$$\vec{F} \delta\vec{r} = 0 \qquad + 0 = \lambda \nabla \text{ grad } \delta\vec{r} \qquad \nabla f \perp \delta\vec{r}$$

szabad plusz paraméter

$$(\vec{F} + \lambda \text{ grad}) \delta\vec{r} = 0$$

Valamely felületen $\delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$ 2 független komponens

λ-t speciálisan megválaszthatjuk úgy:

$$F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad z\text{ - komponens eltűnik}$$

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta y + (\phi) = 0$$

$\delta x, \delta y$ független, akkor

$$F_x + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \delta x \text{ miatt}$$

$$F_y + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \delta y \text{ miatt}$$

$$F_z + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \lambda \text{ - miatt}$$

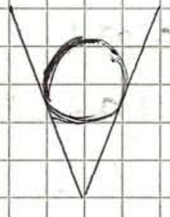
$$\vec{F} + \lambda \nabla f = 0$$

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0 \qquad \text{Lagrange - féle elsőfajú mozgásegyenlet}$$

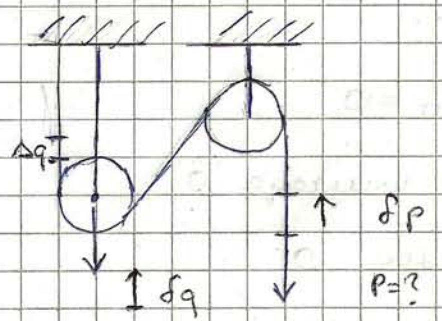
Általánosan: Egyenlőtlenséges kényszer

$$\vec{F} \delta\vec{r} \leq 0$$

$< 0 \sim \delta r$ nem a felület mentén megy



Mozgó csiga:



Kényszer: kötél nyújthatatlan

$$\delta p = 2\delta q$$

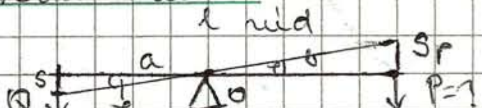
VME:

$$P\,\delta p - Q\,\delta q = 0 \rightarrow (2P - Q)\,\delta q = 0$$

δq tetszőleges

$$P = \frac{Q}{2}$$

Kétkarú emelő



Legjobban jellemzi a φ szög

$$\delta S_Q = -a\,\delta\varphi$$

$$\delta S_p = +b\,\delta\varphi$$

VME:

$$Q\,\delta S_Q + \cancel{(P b\,\delta\varphi)}\;P\,\delta S_p = 0$$

$$-Q a\,\delta\varphi + P b\,\delta\varphi = 0$$

$$(Pb - Qa)\,\delta\varphi = 0$$

$$P\cdot b = Qa \sim M_p^{(o)} = M_q^{(o)}$$ O vonatkozó forgatónyomaték

Kényszerek osztályozása

- rendszer:

merev test $r_{ki} = \text{áll}$

fajtái $r \leq k$

$$f_h(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_n, t) = 0 \quad h = 1, 2 \ldots r$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_1}\,d\vec{r}_1 + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_n}\,d\vec{r}_n + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt = 0$$

$$(t_1, \vec{r}_1 \ldots r_{3n}) \rightarrow ((x_0\; x_1, x_2, x_3 \ldots x_{3n})$$

ált. általános alak:

$$a_{h1}\,dx_1 + a_{h2} + a_{h3}\,dx_3 \ldots + a_{h3n}\,dx_{3n} + a_{h0}\,dx_0 = 0$$

Osztályozás:

1. Nem integrálható ANHOLONÓM

a_{r0}, a_{ri} kényszerek nincs f_r, hogy $\forall j$-re $a_{rj} = \frac{\partial f_r}{\partial x_j}$

a, ANHOLONÓM - REONÓM kényszeres

b, ANHOLONÓM - SZKLERONÓM időfüggetlen

$$a_{r_0} = 0 \quad \partial_t a_{ri} = 0$$

2. integrálható - HOLONÓM

$a_{ri} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\forall i$-re $i = 0 \dots 3N$

a) HOLONÓM - REONÓM idő függés is lehet $a_{r_0} = \frac{\partial f_r}{\partial x_0}$

b, HOLONÓM - SZKLERONÓM időfüggetlen $a_{r_0} = 0$ és $\partial_t a_{ri} = 0$

d'Alembert - elv

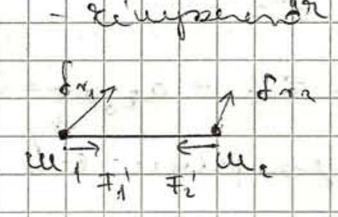
VME továbbfejlesztett dinam.

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i - \dot{s}_i)\, \delta r_i = 0$$ → 1 egyenlet mozgásegyenletek helyett is.

$\vec{F}_i$ szabad erők, s_i - impulzus $m\dot{\vec{r}}_i$

Feltevés a kényszererőkről

- kényszererők virtuális munkája 0.



$$F_1' \,\delta\vec{r}_1 + F_2' \,\delta\vec{r}_2 = 0$$

$$\sum_i \vec{F}_i' \,\delta\vec{r}_i = 0$$

d'Alembert elv ekvivalens a Newton-egyenlettel és Lagrange-egyenlettel

Holonóm - szkleronóm kényszer

d'Alembert → Newton II.:

$$\sum (\vec{F}_i - m\ddot{\vec{r}}_i)\, \delta\vec{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{a}_{ki}\, \delta\vec{r}_i = 0 \quad k = 0, 1 \dots r$$

Van 3 db független koordinátánk

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_r$ Lagrange multiplikátorok

λ - megszorozzuk az egyenletet.

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \overbrace{\nabla_i f_k}^{a_{ki}} - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \delta \vec{r}_i = 0$$

r db λ-t úgy választjuk, hogy

$$\boxed{\vec{F}_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla_i f_k - m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0}$$

maradék $(3N-r)$ független koordináta

$\rightarrow$ együtthatók $= 0$

$$\boxed{\vec{F}_i - m \ddot{\vec{r}}_i + \sum_{k} \lambda_k \nabla_i f_k = 0}$$

$$\vec{F}_i' = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \nabla_i f_k =$$

K kényszererők virtuális munkája 0.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i' \delta \vec{r}_i = \sum_{i,k} \lambda_k \nabla_i f_k \delta \vec{r}_i = \sum_{i,k} \lambda_k \vec{a}_{ki} \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\nabla_i f_k \perp \delta \vec{r}_i$$

<u>Kényszererők valódi munkája</u>

$$\boxed{W = \sum_{i=1}^{N} F' d\vec{r}_i} = \sum_{i,k} \lambda_k \vec{a}_{ki} d\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_i a_{ki} d\vec{r}_i =$$

$$= \underline{- \sum_{k=1}^{N} \lambda_k a_{k0} dt} \quad \text{ha} \quad \sum a_{ki} d\vec{r}_i + a_{k0} dt = 0$$

Energiamegmaradás kifejezésében lesz!

Energiamegmaradás igaz $W_k = 0$

$a_{k0} = 0$, szkleronom rendszer

<u>Energiamegmaradás.</u>

$$T(t_2) - T(t_1) = \int \vec{F}_i d\vec{r}_i = V_1 - V_2 + \int \vec{F}_i' d\vec{r}_i$$

$$\boxed{T_2 + V_2 = T_1 + V_1 - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k a_{k0} dt}$$

akkor igaz, ha a rendszer időfüggetlen

Példák: Tömegpont szabad mozgása

$\delta x, \delta y, \delta z$ független

$$(F_x - m\ddot{x})\,\delta x + (F_y - m\ddot{y})\,\delta y + (F_z - m\ddot{z})\,\delta z = 0$$

$$\delta x \neq 0 \quad \delta y = \delta z = 0, \rightarrow F_x = m\ddot{x}$$

Tömegpont felületen

$$f(x, y, z, t) = 0$$

$$\operatorname{grad} f\, \delta\vec{r} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$dx, dy \rightarrow dz$ meghatározása

$$\delta z - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \delta y - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \delta x$$ visszahelyettesítve.

$$\Bigg(\underbrace{(F_x - m\ddot{x}) - (F_z - m\ddot{z})\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}}_{0}\Bigg)\delta x + \Bigg(\underbrace{F_y - m\ddot{y} - (F_z - m\ddot{z})\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}}_{0}\Bigg)\delta y = 0$$

$$\frac{F_x - m\ddot{x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{F_z - m\ddot{z}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{F_y - m\ddot{y}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\lambda(x, y, z, t)$$

a kényszererő ellentettje

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$m\ddot{y} = F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \qquad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f$$
$$m\ddot{z} = F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}$$

XI. 05.

Előző óráról

$\sum_i \vec{F}_i\, \delta\vec{r}_i = 0 \qquad \vec{F}_i$ szabaderők

$\sum_i (\vec{F}_i - m\ddot{\vec{r}}_i)\,\delta\vec{r}_i = 0 \qquad$ d'Alembert elv Parhuzamos

$\delta\vec{r}_i$ virtuális elmozdulás $\quad \delta t = 0$

$\vec{F}_i$: szabaderők

Példa:

Tömegpont szabad mozgása

$$\begin{cases} (F_x - m\ddot{x})\,\delta x + (F_y - m\ddot{y})\,\delta y + (F_z - m\ddot{z})\,\delta z = 0 \\ \delta x,\ \delta y,\ \delta z \text{ függetlenek } (\delta y = 0 \quad \delta z = 0 \quad \delta x = 0) \rightarrow \end{cases}$$

$$F_x - m\ddot{x} = 0$$

Hamilton elv: félév egyik legfontosabb témája

1834 - 1835

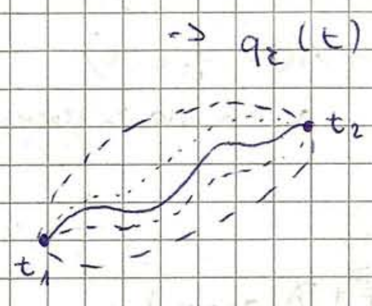
Rendszer mechanikai állapota két rögzített (t_1, t_2) időpont között úgy változik a Lagrange függvény L (t_1, t_2) intervallumon vett integrálja szélsőérték

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)\,dt = \text{extrémum (ált. min)}$$

$L(q_k, \dot{q}_k, t)$ Lagrange fv

S: hatás határintegrál

→ $q_k(t)$ időfüggése, olyanok, amik az S-t extremalizálják

⇒ 

~~Ha~~ miért az a pálya valósul meg?
- miért különleges

pályák variálása

$x_i(t)$ $i = 1, 2 \ldots 3N$

- kezdő és végpont fix
- azonos időpontokhoz tartozó pályapontokat variáljuk

1. $\delta \vec{r}_i = \vec{r}_i{}'(t) - \vec{r}_i(t)$ kis virtuális elmozdulás
2. $\delta \vec{r}_i \Rightarrow t$ szerint differenciálható, időt nem variáljuk
3. $\delta t = 0$
4. $\delta \vec{r}_i(t_1) = 0$ $\quad \delta \vec{r}_i(t_2) = 0$ $\quad P_1\, P_2$ fix
5. Variációk eleget tesznek a ~~(fel)~~ kényszereknek (ért. elm.)

$$\sum \vec{a}_{ri}\, d\vec{r}_i + a_{r0}\,dt = 0 \quad \text{kényszerek } r = 1, 2, \ldots r$$

virtuális elmozdulás: $\sum_i \vec{a}_{ri}\, \delta \vec{r}_i = 0$

Holonóm rendszer: $f_k(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) = 0$

$$\vec{a}_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial r_i}$$

Variációk időderiváltjai felcserélhetők

$$\frac{d}{dt}(\delta x_i = \frac{d x_i'}{dt} - \frac{d x_i}{dt} = \dot{x}_i' - \dot{x}_i = \delta \dot{x}_i$$

$\Phi(x_1 \dots x_{3N}, \dot{x}_1 \dots \dot{x}_{3N}, t)$ mennyiség variációja

$$\delta\Phi = \Phi(x_1 + dx_1, \dots x_{3N} + \delta x_{3N}, \dot{x}_1 + \delta\dot{x}_1, \dots, t) - \Phi(x_1 \dots x_{3N}, t) =$$
$$\approx \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i\right)$$

kiindulva a d'Alembert elvből:

$$\sum_{i=1}^{3N}(F_i - m\ddot{x}_i)\,\delta x_i = 0$$ ← valódi pályához tartozó variáció

$$\ddot{x}_i \delta x_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i \delta x_i) - \dot{x}_i \delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i \delta x_i) - \delta\left(\frac{1}{2}\dot{x}_i^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i + \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \delta\dot{x}_i^2 = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3N} m_i(\dot{x}_i \delta x_i)$$

Szabad erők virtuális munkája $\quad \delta\left(\sum_{i=1} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2\right) = \delta T_{kin}$

$$\delta' A + \delta T = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3N} m_i(\dot{x}_i \delta x_i)$$ Ekvivalens a d'Alembert elvvel

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta' A + \delta T = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3N} m_i(\dot{x}_i \delta x_i)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\sum_i m_i x_i \delta x_i\right)dt = \sum_i^{3N} m_i x_i \,\delta x_i\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Általánosított Hamilton-elv:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta' A)\,dt = 0$$ Integrálelv: kiválasztja számunkra a valódi mozgást

Speciálisan konzervatív erőtérre

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$ valamilyen potenciál negatív gradiense

$$V(x_1 \dots x_{3N})$$

$$\delta' A = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i = -\delta V$$ ~ teljes variáció!

általánosított Hamilton elv miatt

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V)\, dt_1 = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) = 0$$

Határon nem variálunk

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} (T-V)\, dt = 0 \qquad L = T - V = E_{kin} - E_{pot}$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$$ -> Hamilton-elv

- megváltozás stacionárius

- $$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$ számértéket ad. $[S]$ = Energia · idő

Holonom és szkleronom rendszernél is ekvivalens a Newton egy.

Variáció számítás alapfeladata

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x_1(t) \dots x_n(t), \dot{x}_1(t) \dots \dot{x}_n(t), t)\, dt = \text{számérték}$$

$F(x_1(t) \dots \dot{x}_n(t), t)$ = funkcionál: $x_i(t)$; $\dot{x}_i(t)$; t

Keressük: $x_i(t) = ?$

Variációs feladat: Euler egyenlete

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n}$$

n db közönséges másodrendű egyenlet

Levezetés

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta F \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dt =$$

parciálisan: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) dt + \underbrace{\cancel{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2}}}_{=0}$$

$\delta x_i(1) = 0$
$\delta x_i(2) = 0$

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i = 0$$

δx_i -k függetlenek

Euler egyenlet:

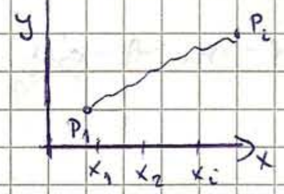
$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0} \qquad i = 1, 2 \dots n$$

Nagy Károly

$$x(\alpha\, t) = x(t) + \alpha\, \eta(t)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0$$

Példa:



Két pont közti min. út. ~ optika

$\Delta y = y' \Delta x$ $\quad \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x^2 + (1 + y'^2)$

Δx

$$J = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \min$$

$$F(y, y', x) \longrightarrow F(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

Euler-egyenlet

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

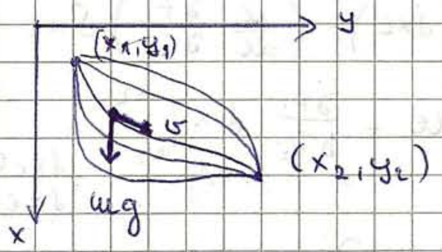
$$\rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \qquad y' = A$$

$$y(x) = Ax + B \quad \text{egyenes}$$

2. Brachystochrona (Bernoulli 1696)

$\to$ Legrövidebb idő problémája.



$$dt = \frac{ds}{v} \qquad v = \sqrt{2gx}$$

$$t_{12} = \int_{P_1}^{P_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}\, dx$$

$$F(x, \cancel{y}, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}} \quad \text{függ } x\text{-től, } y'\text{-től.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{y'}{\sqrt{2gx(1+y'^2)}} = \text{állandó} = \frac{1}{2\sqrt{ga}}$$

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a}$$

$$y'^2\, 2a = x(1+y'^2)$$

$$y'^2 = \frac{x}{2a-x} \qquad y' = \sqrt{\frac{x}{2a-x}} = \frac{x}{\sqrt{x(2a-x)}}$$

Ciklois. $\Leftarrow y(x) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(2a-x)}} \Bigg| \begin{array}{l} x = a(1-\cos\varphi) \\ y = a(\varphi - \sin\varphi) - \underbrace{\cancel{\text{áll}}}_{=0} \end{array}$

Példák:

1. Egyszerű részecskés konzervatív rendszer

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \qquad L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m\dot{x}_i^2 - V(x_i)$$

Euler - Lagrange egyenlete

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_j) + \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0$$

$$m\ddot{x}_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \qquad j = 1, 2, 3$$

Kényszerek:

$a_{r1}\,\delta x_1 + \dots + a_{3r_{3N}} = 0$ módosított szélsőértékfeltétele.

$$S = \int L\,dt + \sum_{r=1}^{r} \lambda_r \int \left(\sum_{i=1}^{3N} a_{ri}\,\delta x_i \right) d$$

λ_r tetszőleges állandók
↳ Lagrange multiplikátor.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{r=1}^{r} \lambda_r a_{ri}} \qquad i = 1, 2, \dots 3N$$

Lagrange féle elsőfajú mozgásegyenlet

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0}$$

Általános koordináták; Lagrange féle másodfajú mozgásegyenlet

jó koordináták -> kényszerek kiküszöbölhetők

holonóm kényszer $f_r(\vec{r}_i, t) = 0$ $r = 1, 2 \dots r$

n db tömegpont

3n koordináta $f_r(.)$ holonóm

r kényszer

$f = 3n - r$ független koordináta = szabadsági fok száma

$q_1, q_2, \dots q_f$ - általános koordináták

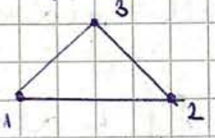
holonóm kényszere megoldható $f_r(\dots)$

Példák:

1, gömbfelületen mozgás $R = \text{áll}$ (ϑ, φ) 2 szabadsági fok

2, merev test 6 szabadsági fok $(\vec{r}_0^{\,TKP}$, 3 szög$)$

$r_{ik} = \text{áll}$



$3 + 2 + 1 = 6$

$q_1, q_2 \dots q_f \sim \dot{q}_1\ \dot{q}_2\ \dot{q}_f$

XI 12.

Ismétlés: $\vec{F} - \delta\vec{r} = 0 \quad \in q_1 \quad \vec{F}\,dr = 0$

$$\sum(\vec{F}_i - m\ddot{\vec{r}})\,\delta\vec{r}_i = 0 \qquad F \text{ szkleronom kényszer}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta A + \delta T)\,dt = 0 \quad \text{általános Hamilton-elv}$$

$$\vec{F} = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \quad \text{szkleronom kényszer}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \qquad \delta S = 0$$

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$$

$$f(\vec{r}_i, t)$$

Általánosan

$n - 3n$

r kényszer

$3n - r = f$

$q_1 \ldots q_f$

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_f, t)$$

$$\dot{x}_i = \sum_{i=1} \frac{\partial x_i}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad q_i, \dot{q}_i, t$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i^2 - V(x_1 - x_{3n})$$

$$\to L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Hamilton-elv

$$\boxed{\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{Lagrange II.}$$

Variációs probléma

Euler-Lagrange egyenlet

Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet

Biz.:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \qquad L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

$$= \int\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt + \int_{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i)\,dt$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}$$

pl: tömegpont konzervatív erőtérben

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

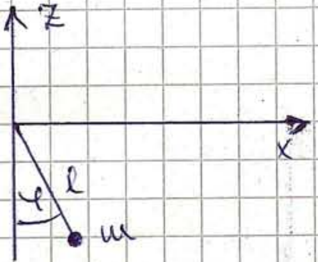
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

teljes időderiváltja $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

ilyen formában írja fel: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

Matematikai inga



1 szabadsági fokú rendszer

$$y = 0$$

$$x = l\sin\varphi$$

$$z = l\cos\varphi$$

$$V = mgz - mgl\cos\varphi$$

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m^2 l^2\ddot{\varphi}$$

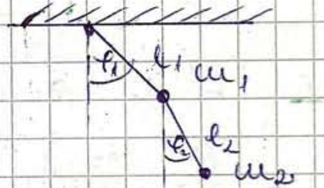
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \left(-\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) = -mgl\sin\varphi$$

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \approx -\frac{g}{l}\varphi$$

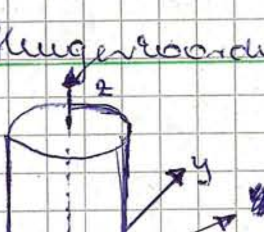
Házi feladat:

kettős inga



síkmozgás: $L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)$

Hengerkoordinátarendszer: tömegpont szabad mozgása



$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho} + \rho\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Mozgásegyenletek.

ϱ, φ, t: $\frac{\partial L}{\partial \dot\varrho} = m\dot\varrho^2$ $\quad \frac{\partial L}{\partial \varrho} = m\varrho\dot\varphi^2$

$m\ddot\varrho - m\varrho\dot\varphi^2 = 0 \qquad \left(-\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)$

φ : $\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\varrho^2\dot\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\varrho^2\dot\varphi\right) = m\varrho^2\ddot\varphi + 2m\varrho\dot\varrho\dot\varphi$$

$$m\varrho^2\ddot\varphi + 2m\varrho\dot\varrho\dot\varphi = 0$$

z: $\quad m\ddot z = 0$

Nem konzervatív mozgás, Lagrange II.

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta' A + \delta T)\,dt = 0$$

$$\delta' A = \sum_{i=1}^{3n} \vec F_i\, d\vec r_i = \sum_{i=1}^{3n} F_i \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\,\delta q_i = \sum_{k=1}^{f} Q_k\,\delta q_k$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \to \text{ált. erő}$$

$$T = (q_k, \dot q_k)$$

$$\delta T = \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial T}{\partial q_k}\,\delta q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\,\delta \dot q_k\right)$$

$$\delta' A = \sum_{k=1}^{f} Q_k \cdot \delta q_k$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) + Q\right)\delta q_k\,dt = 0$$

q_k - független, δq_k - $\mathfrak{z}$ $\to$ $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k}$

$k = 1, 2, \ldots f$

Speciális megmaradás $L(q_i, \dot q_i)$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i\right) = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\dot q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q_i\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q_i\right) = 0} \to \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L = \text{állandó}$$

Konzervatív, szkleronóm (időfüggetlen)

$$L = T(\dot{q}_i) - V(q_i) \quad T(q_i) \text{ kvadratikus f-e a } \dot{q}_i$$

$$T = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots + a_{ff}\dot{q}_f^2$$

$$(+ a_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1 \quad a_{12} = a_{21}) \qquad \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V} \quad \text{Hamilton-f.}$$

teljes mechanikai energia

Kanonikus egyenletek

f db szabadsági fok Σ másodrendű diffe. f

$\to 2f$ db integrálási állandó $\sim$ kezdeti feltételekkel

új módszer: elsőrendű diffegyenlet $\sim 2f$ független változó

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Általánosított impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad q_i \text{ kanonikusan integrált impulzus}$$

Hétköznapi esetekben konzervatív módszer:

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m\dot{x}_i^2 - V(x_i)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$

Lagrange egyenlet: $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

$\dot{q}_i \sim p_i, q_i$

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \to H(p_i, q_i, t)$$

$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{f} p_i\dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)} \quad \text{Legendre transzformáció}$$

$$H(p_i, q_i, t) \leftarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(q_i, p_i, t)$$

p_r q_r időfüggése ?

$$dH = dH(p_r, q_r, t) = \boxed{\sum_{r=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_r}\, dq_r + \frac{\partial H}{\partial p_r}\, dp_r\right)} + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt$$

Definíció szerint:

$$dH = d\left(\sum_i p_i \dot q_i - L\right) = \sum_i (dp_i \dot q_i + p_i d\dot q_i) - \left(\sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\dot p_i} dq_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{p_i} d\dot q_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dT\right) =$$

Euler-Lagrange egyenletet felhasználva

$$\boxed{= \sum_i (-\dot p_i\, dq_i + \dot q_i\, dp_i) - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt}$$

Összevetve:

$$\left.\begin{aligned} \dot q &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \dots f \quad \text{kanonikus egyenletek}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Variációs elvből:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot q_i - H(p_r, q_r)\right) dt = 0$$

Konzervatív, szkleronom:

$$H = \sum_i p_i \dot q_i - L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i - L = 2T - (T - V) = T + V$$

teljes mechanikai energia

Harmonikus oszcillátor egy dimenzióban:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot x^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m \dot x$$

$$\boxed{H = T + V = \frac{1}{2} m \dot x^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2}$$

Két kanonikus egyenlet:

$$\left.\begin{aligned} \dot x &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot p &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot x = \frac{\dot p}{m} = -\frac{kx}{m}$$

Kanonikus egyenletek:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, f \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = T + V \qquad H(q_i, p_i, t)$$

$$dH \rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \text{Kanonikus egyenletek}$$

Ciklikus koordináták:

$H(\cancel{q_i}, p_i, t)$ ~ nem szerepel q_i

q_i ciklikus $\qquad \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$

p_i = állandó kanonikusan konjugált impulzus

Ha minden koordináta ciklikus:

$$H = H(p_i, t)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad p_i = \alpha_i \text{ állandó} \quad i = 1, 2 \ldots f$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega_i(t) \text{ - adott } t \text{ függvény}$$

$$q_i(t) = \int^t \omega_i(t')\, dt' + \beta_i \quad i = 1, 2 \ldots f$$

α_i, β_i - $2f$ db integrációs konstans

teljesen integrálható rendszerek, modellek

Kanonikus transzformációk

$q_i, p_i \rightarrow Q_i\ P_i$

- cél: megtalálni a ciklikus koordinátákat!

$$q_i = q_i(Q \dots Q_f, p_1, \dots, P_f, t)$$

$$p_i = p_i(Q_1 \dots Q_f, P_1 \dots P_f, t)$$

Q_i és P_i is kanonikus egyenletnek legyen megold.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right) dt = 0$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(Q_i, P_i, t) \right) dt = 0$$

H és $\overline{H}$ teljes idóderiváltban különbözhet

Variációkkal:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt}(Q, q, t)\,dt = \underset{0}{\delta W(Q_2, q_2, t_2)} - \underset{0}{\delta W(Q_1, q_1, t)} = 0$$

Variációkkal

$$\sum p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(Q_i, P_i, t) + \frac{dW}{dt}(q_i, Q_i, t)$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial W}{\partial q} \dot{q}_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \dot{Q} \right)$$

Ahonnan

$$\sum_i \underbrace{\left(p_i - \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)}_{0} \dot{q}_i - \sum_i \underbrace{\left(P_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \right)}_{0} \dot{Q}_i + H(q_i, p_i, t) - \overline{H}(Q_i, P_i, t) + \frac{\partial W}{\partial t}$$

$\dot{q}_i, \dot{Q}_i$ függetlenek

Együtthatóknak 0-nak kell lennie

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \qquad P_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i} \qquad \overline{H} = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial W}{\partial t}$$

$\boxed{W(q, Q, t)}$ kanonikus transzformáció alkotó függvénye

Alkotó függvényre négy lehetőség van $W(\cdot,\cdot,t)$

1. $W_1(q_i, Q_i, t)$
2. $W_2(q_i, P_k, t)$ $\quad \to \quad p_r = \dfrac{\partial W_2}{\partial q_r}$
3. $W_3(P_r, Q_r, t)$ $\quad Q_k = \dfrac{\partial W_2}{\partial P_k}$
4. $W_4(p_r, P_r, t)$

$2f$ független változó

Példák:

1. $H(q_i, p_i, t)$

$$W = \sum_i q_i Q_i$$

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r} = Q_r \qquad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_k} = -q_k$$

$$q_i, p_i \to \begin{matrix} Q_i = p_i \\ P_i = -q_i \end{matrix}$$

felcserélte az impulzust és a koordinátát

2. Ponttranszformáció

$$Q_r = Q_r(q_i, t)$$

$$W_2 = \sum_{r=1}^{f} f(q_1, q_2, \dots q_f, t) \cdot P_r = W_2(q_i, P_i, t)$$

$$Q_r = \frac{\partial W_2}{\partial q_r} = f_r(q_1 \dots q_f, t)$$

$$p_r = \frac{\partial W_2}{\partial q_r} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} \cdot P_r \qquad P_i\text{-re kell invertálni}$$

Pl: Harmonikus oszcillátor:

$q, p \to Q, P$ $\qquad W(q, Q, t) = W(q, Q) = \dfrac{m\omega}{2} q^2 \operatorname{ctg} Q$

$H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2} q^2$ $\qquad p = \dfrac{\partial W}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q$

$H(p, q)$ nem ciklikus $\qquad P = \dfrac{\partial W}{\partial Q} = \dfrac{m\omega}{2} q^2 \dfrac{1}{\sin^2 Q}$

Kiváncsiak vagyunk: $p(P,Q)$
$q(Q,P)$

$$\sqrt{\frac{2}{m\omega}}\sqrt{P} = \frac{q}{\sin Q} \qquad q = \sqrt{\frac{2}{m\omega}}\sqrt{P}\sin Q$$

$$p = \sqrt{2m\omega}\sqrt{P}\cos Q$$

$$\underline{\underline{H}} = \frac{2m\omega}{2m}P\cos^2 Q + \frac{m\omega^2}{2}\frac{2}{m\omega}P\sin^2 Q = \omega P\,\frac{1}{\cos^2 Q+\sin^2 Q} = \underline{\underline{\omega P}}$$

Q ciklikus koordináta

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \qquad \dot{Q} = +\frac{\partial H}{\partial P} = \text{áll.}$$

$P =$ állandó P_0 $\qquad \hookrightarrow Q = \omega t + Q_0 = \omega(t-t_0)$

$$q = \sqrt{\frac{2}{m\omega}}\sqrt{P_0}\sin(\omega(t-t_0))$$

$$p = \sqrt{2m\omega}\sqrt{P_0}\cos(\omega(t-t_0))$$

Hamilton–Jacobi egyenlet:

minden koordináta ciklikus: $\bar{H} = 0$

$W \to S$ tetszőleges új alkotófüggvény

$$\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Általános: $S(q_k, P_k, t) \sim W_2$ $\left(p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}\right)$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right) = 0$$ Hamilton–Jacobi egyenlet

1 db parciális differenciálegyenlet
$S(q, P, t)$

korábban: $2f$ db elsőrendű közönséges diffegyenlet

Megoldás:

$$S = S(q_1, \dots, q_f, \overbrace{\alpha_1 \dots \alpha_f}^{p_i \text{ ciklikus koordináták}}, t)$$

f db állandó

+ 1 db állandó $S \to S + C$ additív áll.

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}(q_i, \alpha_i, t) \quad \text{kezdeti feltételek: } q_r(0)\ p_r(0)$$

$$\to \alpha_i = \dots$$

$$Q_r = \beta_r = \frac{\partial S(q_r, \alpha_r, t)}{\partial \alpha_r} \Longrightarrow \quad q_r\text{-re megoldható}$$

$$q_r(\alpha_r, \beta_r, t)$$

$$t_0 = 0 \quad q_r(0) = q_r(\alpha_0, \beta_0, t_0) \Longrightarrow$$

β_r állandó

S alkotófüggvény jelentése:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS(q_r(t), \alpha_r, t)}{dt} = \sum_i \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_r}}_{p_r} \cdot \dot{q}_r + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{i=1}^{f} p_r \dot{q}_r - H(q_r, p_r, t)$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$= L$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt \quad \text{Hatásintegrál a Hamilton elvben}$$

Mit jelentenek az α_i állandók

Első állandó $\quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

$$\alpha_1 = H = \text{áll.}$$

konzervatív, szkleronom

$$H = T + V = E$$

Optikai analógia:

→ $\lambda \ll$ tárgyak mérete:

Fénysugár pályája a Fermat - elv alapján

$n(x, y, z)$

$$S = \int_A^B n \, ds = \text{extrémum}$$

$n = \frac{c_0}{c}$ → vákuum
→ anyagban

extremális idő elve

Legkisebb hatás elve

általánosított Hamilton - elvből

$$\rightarrow \Delta \int_{t_1}^{t_2} T \, dt = 0$$

Δ ~ időt is variáljuk, úgy, hogy a teljes mechanikai energia megmaradjon

1 dimenziós eset

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \sim \sqrt{T} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{ds}{dt}$$

$$T \, dt = \sqrt{\frac{m}{2} T} \, ds$$

$$\rightarrow \Delta \int \sqrt{T} \, ds = 0 \quad \text{extrémum}$$

$$\sim \Delta \int \sqrt{E - V}$$

mint a fénysugár

$n = c\sqrt{E - V}$ törésmutatójú közegben

→ Kis tárgyak esetén → fizikai optika

→ mechanika kis távolságokon

→ nem klasszikus,
- hullámmechanika
- kvantummechanika

Schrödinger pont → hullám.

$$\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad H(q, p, t) \quad L(q, \dot q t)$$

Kis rezgések egyensúlyi helyzete

Konzervatív rendszer

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f} a_{ik}\dot q_i \dot q_k$$

$$V = V((q_1 \dots p_f)$$

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}}_{} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \longrightarrow \sim \dot q_i, \ddot q_i$$

Egyensúlyi helyzet:

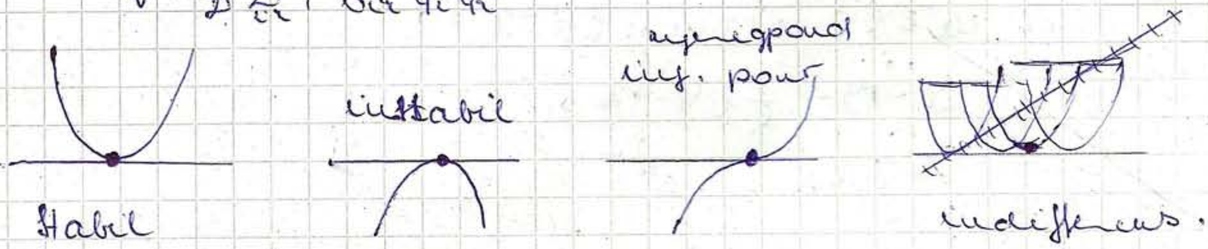
$$\dot q_i = 0 \quad \ddot q_i = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

$q_i = q_i^0$ $\qquad \tilde q_i = q_i - q_i^0$ kicsiny mennyiség

$$V = \underset{\not 0}{V_0} + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial V}{\partial q_i}\underset{0}{\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|}\tilde q_i + \frac{1}{2}\sum_{ik}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k}\tilde q_i \tilde q_k$$

Stabilis egyensúlyi helyzet körül

$$V = \frac{1}{2}\sum_{ik}{}' b_{ik} q_i q_k$$



Hf:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ik} a_{ik}(q_i^0)\dot q_i \dot q_k \qquad \partial_t a_{ik}(q_i^0) = 0$$

$$\sum_k \left(a_{ik}\ddot q_k + b_{ik} q_k\right) = 0 \qquad i = 1, 2 \dots f$$

megoldást keressük:

$$q_r = q_{0r} \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{alakban}$$

sajátérték probléma

Példák: Síkinga; végtelen könnyű rúd

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

$$V = mgl\cos\varphi$$

Egyensúlyi helyzetek

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} \sim \sin\varphi = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \varphi = 0 \\ \rightarrow \varphi = \pi \end{matrix} \quad \text{ekkor} \quad V = -mgl + mgl\sin\varphi\Big|_{\varphi=0} \cdot \varphi + \frac{1}{2} mgl\cos\varphi\Big|_{\varphi=0} \varphi^2$$

$\varphi = 0$
$$V = -mgl + mgl\sin\varphi\Big|_{\varphi=0} \cdot \varphi + \frac{1}{2} mgl\cos\varphi\Big|_{\varphi=0} \varphi^2$$

$$\cancel{V = \frac{1}{2} m l^2 \varphi^2 - mgl}$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} mgl\varphi^2$$

$$\hookrightarrow m l^2 \ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

$\varphi = \pi$
$$V = \frac{1}{2} m l \cancel{\ldots} - mgl(\varphi - \pi)^2 \qquad \tilde{\varphi} = \varphi - \pi$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi} - \dot{\pi})^2 + \frac{1}{2} mgl(\varphi - \pi)^2$$

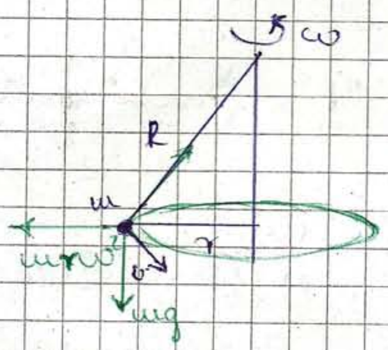
$$m l^2 (\ddot{\varphi} - \ddot{\pi}) - mgl(\varphi - \pi) = 0$$

$$(\ddot{\varphi} - \ddot{\pi}) - \frac{g}{l}(\varphi - \pi) = 0$$

$$\sim \ddot{x} \sim x \quad \sim e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t}$$

$\rightarrow$ instabil helyzet

Pl 2. Forgatott inga



Erők, együtt forgunk a rendszerrel

$mg \quad K, \quad m r \omega^2$

$r = R\cos\varphi$

$mg \rightarrow mgR(1 - \cos\varphi)$

$m r \omega^2 \rightarrow -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2$

$v = r\omega = R\sin\varphi\,\omega$

$$L = T - V = \underbrace{\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \sin^2\varphi\, \omega^2}_{E_{kin}} - \underbrace{m g R (1-\cos\varphi)}_{E_{pot}}$$

$$\boxed{m R^2 \ddot{\varphi} = m R^2 \sin\varphi \cos\varphi\, \omega^2 - m g R \sin\varphi}$$

Egyensúlyi helyzet $\dot{\varphi} = 0 = \ddot{\varphi} = 0$

$$m R^2 \omega^2 \sin\varphi \left(\cos\varphi - \frac{g}{R\omega^2} \right)$$

$\sin\varphi = 0 \to \varphi = 0$

$\varphi = \pi$

$\cos\varphi = \frac{g}{R\omega^2}$ ha $\frac{g}{R\omega^2} \leq 1$ $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$

1. $\varphi = 0$

$$L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + m R^2 \omega^2 \Big(\underset{1}{\cos^2\varphi|_{\varphi=0}} - \underset{0}{\sin^2\varphi|_{\varphi=0}} \Big) \frac{\varphi^2}{2} - m g R \underset{1}{\cos\varphi|_{\varphi=0}} \frac{\varphi^2}{2} =$$

$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$

$-\cos^2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ $= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + (m R^2 \omega^2 - m g R) \frac{\varphi^2}{2}$

Ebből az Euler-Lagrange egyenlet

$$m R^2 \ddot{\varphi} = (m R^2 \omega^2 - m g R)\varphi \qquad / : m R^2$$

$$\ddot{\varphi} = \left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right)\varphi$$

a, $\omega^2 < \frac{g}{R}$ ~ stabil $\varphi \sim \sin\sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}\, t$

b, $\omega^2 > \frac{g}{R}$ ~ instabil $\varphi \sim e^{\sqrt{\omega - \frac{g}{R}}\, t}$

2. $\varphi = \pi$

$$L = m R^2 \omega^2 (\dot{\varphi} - \pi) = (m R^2 \omega^2 + m g R)(\varphi - \pi)$$

$=$ instabil

3. $\varphi=\varphi_0 \quad \omega^2 > \frac{g}{R} \qquad \cos\varphi_0 = \frac{g}{R\omega^2}$

$$L = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_0) + mR^2\omega^2(\cos^2\varphi_0 - \sin^2\varphi_0)\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2} - mgR\cos\varphi_0 \frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2}$$

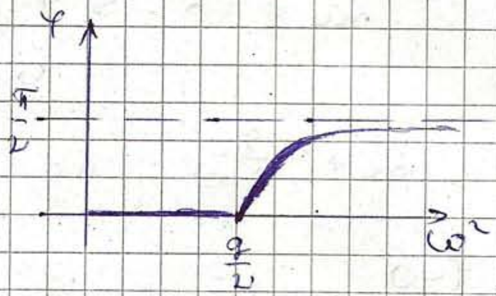
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(\dot\varphi-\dot\varphi_0)} - \frac{\partial L}{\partial(\varphi-\varphi_0)} = 0$$

$$mR^2(\ddot\varphi-\ddot\varphi_0) = mR^2\omega^2\left(2\frac{g^2}{R^2\omega^4}-1\right)(\varphi-\varphi_0) - mgR\frac{g}{R\omega^2}(\varphi-\varphi_0)$$

$$\boxed{(\ddot\varphi-\ddot\varphi_0) = \left(\frac{g^2}{R^2\omega^2}-\omega^2\right)(\varphi-\varphi_0)}$$

$\frac{g^2}{R^2\omega^2} - \omega < 0$ stabil $\omega^2 > \frac{g}{R}$

$\omega^2 < \frac{g}{R}$ instabil



SZIMMETRIÁK ÉS MEGMARADÁSI TÉTELEK

mozgásegyenlet ↔ megmaradási tételek $E, \vec{p}, \vec{L} = \vec{N}$

– additív

N tömegpont: zárt rendszert alkotnak

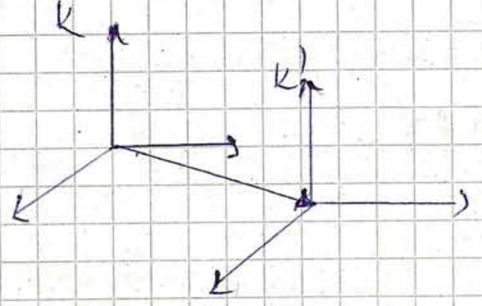
amit a Lagrange v. Hamilton függvény leír

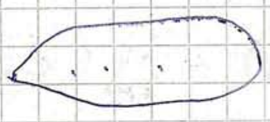
$$L=(\vec r_i, \dot{\vec r}_i, t) \qquad H(\vec r_i, \vec p_i, t)$$

H: $\dot{\vec r}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec p_i} = \mathrm{grad}_{p_i} H$

$\dot{\vec p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec r_i} = -\mathrm{grad}_{r_i} H$

Koordináta rendszer eltolása, tér homogenitása





Zárt rendszer esetén
$K \to K'$ eltolás

a rendszer fizikai
állapota nem változik

- nincs kitüntetett kezdőpont ~ Térhomogenitás

$\vec r_i' = \vec r_i + a \qquad \dot{\vec r}_i' = \dot{\vec r}_i$

$$\delta L = \delta L(\vec r_i, \dot{\vec r}_i, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec r_i}\,\delta \vec r_i = \vec a \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec r_i}$$

Érvényesek az Euler-Lagrange egyenletek

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec r_i} = 0 \qquad i = 1,2..n) \qquad \sum_i$$

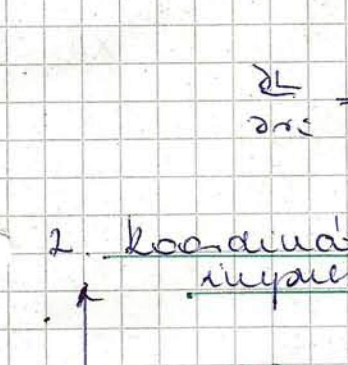
$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}_i} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec r_i} = 0$$

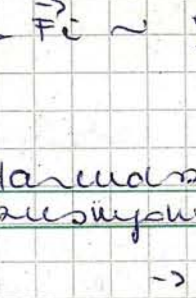
$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}_i} = \text{állandó}$$

$$\vec P = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}_i} = \text{állandó} \qquad \vec p_i :$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec r_i} = \vec F_i \sim \sum \vec F_i = 0 \qquad \text{Ha külső erők: } \vec F_1 + \vec F_2 = 0$$

2. Koordinátarendszer elforgatása, impulzusmomentum megmaradása





-> tér izotrópiája

$e \; \delta\varphi$

$\vec r_i' = \vec r_i + \delta \vec r_i \qquad \vec p_i' = \vec p_i + \delta \vec p_i$

$\delta \vec r_i = \delta\varphi\, \vec e \times \vec r_i \qquad \delta \vec p_i = \delta\varphi\, \vec e \times \vec p_i$

Tér izotróp: nincsen kitüntetett irány

K elforgatása mechanikai rsz. állapotát nem változtatja meg.

H a forgatással szemben invariáns

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial \vec r_i}\,\delta \vec r_i + \frac{\partial H}{\partial \vec p_i}\,\delta \vec p_i\right) = 0$$

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial \vec r_i}\,(\vec e \times \vec r_i)\,\delta\varphi + \frac{\partial H}{\partial \vec p_i}\,(\vec e \times \vec p_i)\,\delta\varphi\right) =$$

$$= \delta\varphi \sum_{i=1}^{n}\left(\vec e\left(\vec r_i \times \frac{\partial H}{\partial r_i}\right) + \vec e\left(\vec p \times \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right) =$$

$$= \delta\varphi\,\vec e \sum_i \left(\vec r_i \times \underbrace{\frac{\partial H}{\partial r_i}}_{-\dot{\vec p}_i} + \vec p_i \times \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{\dot{\vec r}_i}\right) = 0$$

Kanonikus egyenletek

$$= \delta\varphi\,\vec e \sum_i \left(-\vec r_i \times \dot{\vec p}_i + \vec p_i \times \dot{\vec r}_i\right) \xrightarrow[\vec e]{\delta\varphi \text{ tetsz.}} \sum(\vec r_i \times \dot{\vec p}_i) = 0$$

$$\text{pl.} \rightarrow 0 \qquad \sum \dot{\vec r}_i \times p_i = 0$$

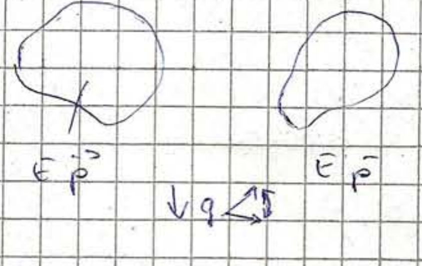
$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec r_i \times p_i\right)$$

$$L = \sum_i r_i \times p_i \qquad \frac{dL}{dt} = 0 \quad L = \text{állandó}$$

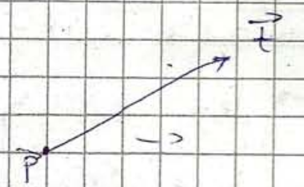
Zárt rendszer impulzusnyomatékának megmaradása a tér izotrópiájából következik

XII. 03.

Szimmetria és megmaradási tételek.



$\vec U = r \cdot t$ izotróp



$\vec N_t = N \cdot \vec t$

E megmaradás és t eltolás

nincs kitüntetett pont $\rightarrow H(k)$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \leftarrow \quad t = t' = t + t_0$$

zárt rendszer Hamilton f-e állandó $H(p, \vec r, \cancel{t})$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial \vec p_i}\,\dot{\vec p}_i + \frac{\partial H}{\partial r_i}\,\dot r_i\right) = \sum_i^{n}\left(-\frac{\partial H}{\partial \vec p_i}\frac{\partial H}{\partial r_i} + \frac{\partial H}{\partial \vec r_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0$$

kanonikus egyenlet

$\dot{\vec r}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec p_i}$ Zárt rendszer Hamilton fv-e állandó

$\dot{\vec p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec r_i}$ $H =$ áll.

$F_{külső} = 0$

$F_{belső}$ (független $\vec v, t$) $H = E_{mech}$

Időeltolással szemben invariáns

-> E megmaradás zárt rendszer

Nem zárt rendszer, konzervatív erők

-> H időfüggetlen

$H = T + V = E_{mech}$

$H =$ állandó konzervatív rendszere is érvényes az energiamegmaradás tétele

-> Kvantummechanika

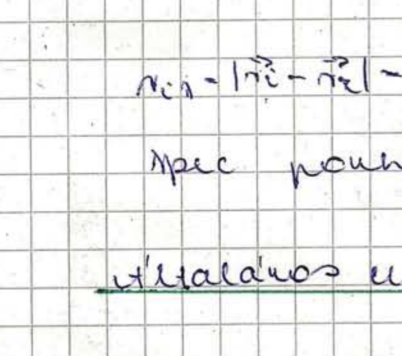
MEREV TESTEK MECHANIKÁJA

$r_{ij} = |\vec r_i - \vec r_j| =$ fix

spec. pontrendszer  -> $f = 3 + 2 + 1 = 6$

Általános mozgás: transzláció és rotáció

függ. van



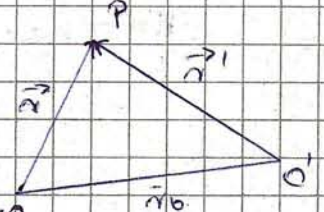
$K(x, y, t)$ -> testhez rögz. rögzített

$O(\vec r_0)_3$ + K forgása K_0-hoz képest (3)

Euler szögek

Forgásvektor:

$d\varphi \parallel$ forgástengely
$|d\varphi|$ elfordulás szöge
} + jobbkéz szabály

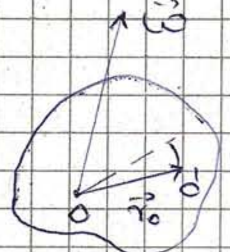


$$d\vec{r} = d\varphi \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Forgás ugyanaz O, O' körül

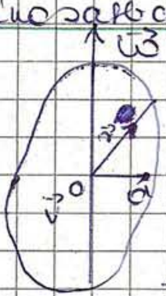
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}'$$



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{v}' = v_0 + \cancel{\vec{r} \times \vec{\omega}}\ \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Általánosságban



O: $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

O': $\vec{v} = \vec{V}' + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

O: $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_0 + \vec{r}') =$

$\vec{V}' = V + \vec{\omega} \times \vec{r}_0$ $\qquad \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{V}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

Mozgás független attól, hogy milyen koord. rsz írja le.

Mozgás leírása:

1, Másodfajú Lagrange egyenletekkel

$$L(q_1 \dots q_6, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_6, t) = T - V$$

2, Pontrendszer általános tételei

$$\vec{M}\,\ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}$$

$\dot{\vec{N}} = \vec{M}$ ~ külső forgatónyomatékok eredője

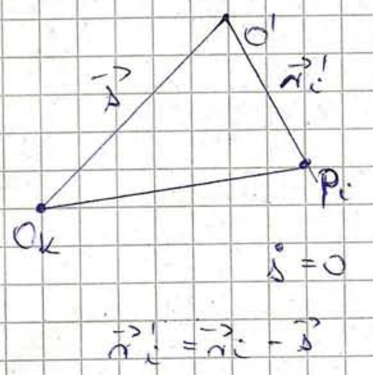
- feltételezhetjük, belső erők centrálisak.

Hol írjuk fel?

- inerciarendszer
- tömegközéppontra és, pillanatnyi forgástengely

~~(jó a TKP-ra is)~~

Impulzusmomentum transzformációja



$O: \vec{N} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i \times \dot{r}_i$

$O': \vec{N}' = \sum_i m_i (\vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i') =$

$= \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{s}_i) \times \dot{\vec{r}}_i =$

$= \vec{N} - \vec{s} \times m \dot{\vec{r}}_0$

$\sum m_i \dot{\vec{r}}_i$

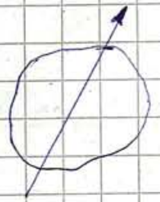
$\dot{s} = 0$

$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{s}$

Súlypontra: $\vec{s} \times m \dot{\vec{r}}_0 = 0$

Pontos levezetés Budó Ágoston: Mechanika 28.3

Egy szabadsági fokú rendszer forgása (Spec. eset)



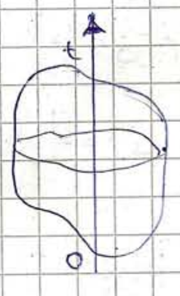
- tengely körüli forgás
- tengelynél fellépnek erők, forgatónyomatékok

$M \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}_{\kappa} + \vec{F}_t$

$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\kappa} + \vec{M}_t$

Ha nincsenek kényszerek:

tengely irányú komponenser $\dot{N} = M_{\kappa_t} + \cancel{M_{\kappa t}}$ nincs tengely irányú forgatónyomaték



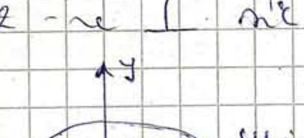
$\boxed{\dot{N}_z = M_z^{(\kappa)}}$

$(r \times F)_z$

$N_z = \sum_i (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) = \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x})$

Új koordináták φ elforgatási szög $\dot{\varphi} = \omega$

z-re $\perp$ sík



$x_i = l_i \cos\varphi \qquad \dot{x} = l_i(-\sin\varphi)\dot{\varphi} = -l_i \sin\varphi\,\dot{\varphi}$

$y_i = l_i \sin\varphi \qquad \dot{y}_i = l_i \cos\varphi\,\dot{\varphi}$

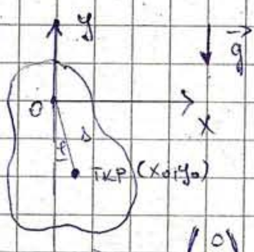
$N_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \omega (l_i \cos\varphi\, l_i \cos\varphi - (-l_i \sin\varphi) l_i \sin\varphi) =$

$= \sum_{i=1}^{N} m_i \omega l_i^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i l_i^2\right)\omega$

$N_z = \Theta \omega \qquad \boxed{\Theta = \sum_{i=1}^{N} m_i l_i^2}$

$\boxed{\Theta \dot{\omega} = M_z^{(\kappa)}}$ t-re tehetetlenségi nyomaték.

Fizikai inga:



$$M_z = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) = \sum_i x_i m_i g = -g M \underset{\substack{\uparrow\\ \text{TKP}}}{x} =$$

$$x_0 = \frac{\sum x_i m_i}{M}$$

$$M = \sum m_i$$

$$F_i = m_i \vec{g} = m\begin{pmatrix}0\\-g\\0\end{pmatrix}$$

$$F_{iy} = m_i g$$

$$= -g M s \sin\varphi$$

Mozgásegyenlet: $N_z = \Theta\ddot{\varphi}$

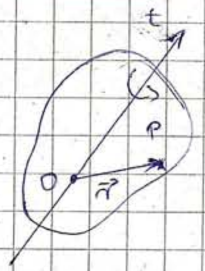
$$\Theta\ddot{\varphi} = -M g s \sin\varphi$$

Mint az egyszerű matematikai inga

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Mgs}{\Theta}\sin\varphi \approx \frac{g}{l_r}\sin\varphi$$

$l = \frac{\Theta}{M\cdot s}$ redukált hossz ([illegible])

Merev test mozgási energiája, impulzusa, impulzusmomentuma



O: sebesség $\vec{v}_0$

P: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}$

$$v^2 = \vec{v}_0^{\,2} + 2\vec{v}_0(\vec{\omega}\times\vec{r}) + (\vec{\omega}\times\vec{r})^2$$

$$T = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\int\rho v^2\,dV = \qquad m_i = \rho\,dV$$

$$= \frac{1}{2}\int v_0^2\rho\,dV + \int\vec{v}_0(\vec{\omega}\times\vec{r})\rho\,dV + \frac{1}{2}\int(\vec{\omega}\times\vec{r})^2\rho\,dV =$$

$$\sum_i m_i = \int\rho\,dV = M$$

$$= \frac{1}{2}M\vec{v}_0^{\,2} + M\vec{v}_0(\vec{\omega}\times\vec{r}_s)$$

transzlációs — kölcsönös — forgási

$r_s = \overline{OTKP}$

$\vec{v}_0 = 0$

ill. forgás.

Forgási mozgási energia

$$\int(\vec{\omega}\times\vec{r})^2\rho\,dV = \int(\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2\,\rho\,dV =$$

$$= \omega_x^2\underbrace{\int(y^2+z^2)\rho\,dV}_{\Theta_{11}} + 2\omega_x\omega_y\underbrace{\int(-xy)\rho\,dV}_{\Theta_{12}} + \omega_y^2\int(x^2+z^2)\rho\,dV + 2\omega_y\omega_z\int(-zy)\rho\,dV$$

$= \sum_{i,j}\omega_i\Theta_{ij}\omega_j = \vec{\omega}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\vec{\omega}$ tenzora a tehetetlenségi nyomatéknak

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\,\Theta\,\vec{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\Theta_{ij}\omega_i\omega_j}$$

Másképpen: $\vec{\omega}(\vec{r}\circ\vec{r})(\vec{\omega})$ $\quad (\vec{r}\circ\vec{r})_{ij}=r_i r_j$

$$(\vec{\omega}\times\vec{r})^2=\omega^2 r^2-(\vec{\omega}\vec{r})^2=\vec{\omega}^2\vec{r}^2\mathbb{1}-(\vec{\omega}\vec{r})(\vec{\omega}\vec{r})=$$

$$=\vec{\omega}(\mathbb{1}\vec{r}^2\vec{\omega})-\vec{\omega}(\vec{r}\circ\vec{r})\vec{\omega}=\vec{\omega}(\mathbb{1}\vec{r}^2-\vec{r}\circ\vec{r})\vec{\omega}$$

$$\Theta_{ij}=\sum_{a=1}^{N}m_a(r^2\delta_{ij}-r_i r_j)=\sum_a m_a(x_l^2\delta_{ij}-x_i x_j)=\begin{pmatrix}y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -xy & x^2+z^2 & -yz\\ -xz & -yz & y^2+x^2\end{pmatrix}$$

$r\to x$, $\quad \vec{r}^2\delta_{ij}-r_i r_j=$

$$=\int\rho\, dV\,(x_l^2\delta_{ij}-x_i x_j)$$

Impulzus:

$$\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i=\int\vec{v}\rho\, dV=\int(\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})\rho\, dV=\vec{M}v_0+\vec{\omega}\times\underset{\text{TKP}}{\vec{r}_s}M=$$

$\Rightarrow r_s=0$ TKP koordinátа rendszer

Perdület:

$$\vec{N}=\sum_i(\vec{r}_i\times m_i\dot{\vec{r}}_i)=\int(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\rho\, dV=\int\vec{r}\times(\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})\rho\, dV=$$

$$=\left(\int\vec{r}\rho\, dV\right)\times\vec{v}_0+\int\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_s)\rho\, dV$$

$M\vec{r}_s\times v_0 \quad +\Theta\vec{\omega}$

N transzláció $\quad \Theta_{ij}\omega_j$

Vektorazonosság: $(\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}))=\omega(\vec{r}^2)-\vec{r}(\vec{\omega}\vec{r})=$

$$=\vec{\omega}(\vec{r}^2\mathbb{1}-\vec{r}\circ\vec{r})$$

Mint a tehetetlenségi nyomaték kuszordefiníciója

$$\int\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\rho\, dV=\omega\int\underbrace{(\vec{r}^2\mathbb{1}-\vec{r}\circ\vec{r})}_{\Theta}\rho\, dV$$

XII előadás

XII. 10.

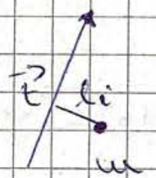
$\underline{\underline{\Theta}}$ Θ_{ik}

$$E_f = \vec{\omega}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\vec{\omega} = \omega_i \Theta_{ik} \omega_k$$

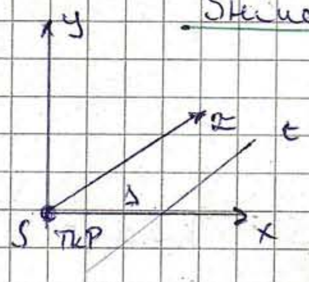
$$\vec{N} = \underbrace{M \vec{r}_s \times v_0}_{\text{transzláció}} + \underline{\underline{\Theta}}\,\vec{\omega}$$

$$N_i^f = \Theta_{ik} \omega_k$$

Θ tehetetlenségi tenzor



$$\sum_i m_i l_i^2 = \int l^2 dm = \int l^2 \rho \, dV$$



Steiner tétel:

$$\Theta_t = \Theta + M s^2$$

$$\Theta_s = \int (x^2+y^2) \rho \, dV$$

$$\Theta_t = \int ((x-s)^2 + y^2) \rho \, dV = \int (x^2 + s^2 + y^2 - 2xs) \rho \, dV$$

$$= \underbrace{\int (x^2+y^2) \rho \, dV}_{\Theta_s} + s^2 \underbrace{\int \rho \, dV}_{M} - 2s \underbrace{\int x \rho \, dV}_{x_{TKP} = 0}$$

Ebben a koordináta rendszerben

$$\Theta_t = \int (x^2+y^2) \rho \, dV + s^2 \ \ V$$

Θ_{ik} tenzor

$$\Theta_{ik} = \sum_a m_a (\delta_{ik} x_l^2 - x_i x_k) = \int (\delta_{ik} x_l^2 - x_k) \rho \, dV$$

$x_l^2 = \sum_i x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

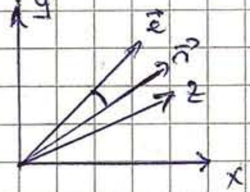
egyenletes tömegeloszlás esetén

3×3-as szimmetrikus tenzor

$\Theta_{ik} = \Theta_{ki}$

$$\Theta_{ik} = \begin{pmatrix} \int \rho \, dV (y^2+z^2) & -\int \rho \, dV xy & -\int \rho \, dV xz \\ -\int \rho \, dV xy & \int \rho \, dV (x^2+z^2) & -\int \rho \, dV yz \\ -\int \rho \, dV xz & -\int \rho \, dV yz & \int \rho \, dV (y^2+x^2) \end{pmatrix}$$

Θ tetszőleges tengelyre:

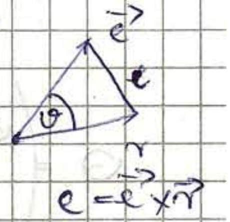


$\vec{e} = (e_x, e_y, e_z)$

r adott pontmasszára mutató vektor

$(\vec{e}, \vec{r})\ \measuredangle\ \vartheta$

$\vec{r} = (x, y, z)$



$$\Theta_t = \int l^2 \rho\, dV = \int (\vec{e}\times\vec{r})^2 \rho\, dV =$$

$$(\vec{e}\times\vec{r})^2 = \vec{e}^2\vec{r}^2 - (\vec{e}\vec{r})^2 = \underbrace{e\,(r^2 \mathbb{1} - r \circ r)\,e}_{\Theta}$$

$$= \int \rho\, dV \{(z e_y - y e_z)^2 + (x e_z - z e_x)^2 + (y e_x - x e_y)^2\}$$

$$= e_x^2 \int (y^2+z^2)\rho\, dV + e_y^2 \int (x^2+z^2)\rho\, dV + e_z^2 \int (x^2+y^2)\rho\, dV +$$

$$+ e_x e_y \int -2xy\,\rho\, dV + e_x e_z \int -2xz\,\rho\, dV + e_y e_z \int -2zy\,\rho\, dV$$

$$\Theta_t(\vec{e}) = \Theta_{11} e_x^2 + \Theta_{22} e_y^2 + \Theta_{33} e_z^2 + 2\Theta_{12} e_x e_y + 2\Theta_{13} e_x e_z + 2\Theta_{23} e_y e_z =$$

$$\sum_{k,i=1}^{3} \Theta_{ik} e_i e_k = \Theta_{ik} e_i e_k \qquad \Theta_{ik} = \Theta_{ki}$$

főátlóban szereplő mennyiségek × tengelyre vonatkozóak

Θ_1 mennyiség $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

mellékátlóban deviációs nyomaték

szimmetrikus mtx: diagonalizálható, főtengelyi alakra hozható

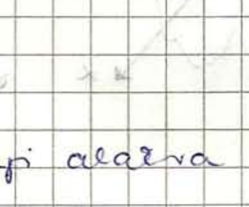
K: normált sajátvektorok bázisában

fő tehetetlenségi irányok
sajáttengelyek (főtengelyek) $\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix}$

Ezek körül megforgatva nem akar kitérni

Tehetetlenségi ellipszoid: geometriai jelentés

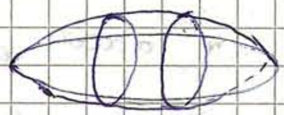
$\Theta_e = \vec{e}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\vec{e}$ $\qquad \dfrac{1}{\Theta_e}$ $\qquad 1 = \dfrac{e}{\sqrt{\Theta_e}}\ \Theta\ \dfrac{e}{\sqrt{\Theta_e}}$



$$\frac{e}{\sqrt{\Theta_e}} = (\xi, \eta, \zeta)$$
$\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3$

$$1=\sum_{i,k}\Theta_{ik}\xi_i\xi_k=\Theta_{11}\xi^2+2\Theta_{12}\xi\eta+\Theta_{22}\eta^2+\dots+\Theta_{33}\zeta^2$$

$\Rightarrow$ kh. ell



$$\Theta=\begin{pmatrix}\tilde\Theta_1 & & \\ & \tilde\Theta_2 & \\ & & \tilde\Theta_3\end{pmatrix}$$

- $\tilde\Theta_1=\tilde\Theta_2$ $\Rightarrow$ forgási ellipszoid

főtengelyek nem csak $\vec e_1$ és $\vec e_2$, hanem $\alpha e_1+\beta e_2$ (lineáris kombináció)

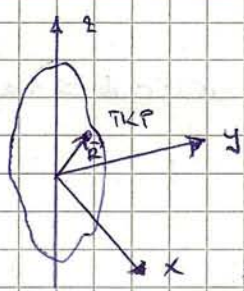
- $\tilde\Theta_1=\tilde\Theta_2=\tilde\Theta_3$ $\Rightarrow$ 1. e. = gömb

$$\Theta=\Theta\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$\forall$ tengelyre ugyanazt kapjuk

pl: ilyen a kocka is.

Derivációs nyomaték jelentése



Θ_{xz} Θ_{yz}

mozgásegyenlet: $\sum m\ddot{\vec R}=\vec F+\vec F'$

$\vec F$: szabad erő; $\vec F'$: kényszer erő

rögzített tengely $\to$ kényszerek hatnak

$$\dot{\vec N}=\vec M+\vec M'\qquad \left.\begin{matrix}\vec F=0\\ \vec M=0\end{matrix}\right\}\text{ külső erő}$$

z irányú egyenlet nem a kényszerekre vonatkozik

$$\dot N_z=(\Theta_{33}\cdot\omega)^{\bullet}=\Theta_{33}\dot\omega=\underset{0}{M_z}+\underset{0}{M_z'}$$

$\Rightarrow$ ω = állandó szögsebességgel forog

maradék egyenletek a kényszerekre vonatkoznak.

$\sum m_i\ddot{\vec R}=\vec F'$ TKP körpályán marad a ~~centripeta~~ centripetális erő gyanánt $\vec F'$ erő vízszintje:

$$\ddot{\vec R}=\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec R)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m \vec{r} \times \vec{v}\right)_{xy} = M'_{xy}$$

$$M'_x = \frac{d}{dt}\sum_i \left(m_i \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})\right)_x$$ x általánosan

egyszerűbben komponensek

$$M'_x = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i (y \cdot \dot{z} - z \cdot \dot{y})\right) \qquad (\vec{r} \times \vec{v})_x = y\dot{z} - z\dot{y}$$

$$M'_x = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i z\dot{y}\right) = -\sum_i m_i (\dot{z}\dot{y} + z\ddot{y})$$

$\forall$ egyes pont körmozgást végez $\ddot{y} = -\omega^2 y$

$$M'_x = -\sum_i m_i z y \omega^2 = -\omega^2 \sum_i m_i z \cdot y = -\omega^2 \Theta_{23}$$

deviációs nyomatékok $\begin{cases} M'_x = -\omega^2 \Theta_{23} \\ M'_y = -\omega^2 \Theta_{13} \end{cases}$ a tengelyre ébredő x értékirányú komponens forgatónyomatékok

Ha a tengely nincs rögzítve a forgatónyomatékok kitérítik a tengely körüli forgásából testet

Merev test mozgásegyenlete a Lagrange módszerrel

$$L = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum \Theta_{ik}\omega_i\omega_k - U(q_i)$$

kinetikus forgási potenciális

q_i: R_{TKP} + 3 szög $\vec{\varphi}$ koordináták

$$\vec{V} = \vec{V}_{TKP} = \dot{R}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} \qquad \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{R}} = F_e$$

$$\dot{\varphi} = \vec{\omega} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

$\vec{N} = \overset{*}{\Theta}\vec{\omega}$ $\quad N_i = \Theta_{ik}\omega_k$

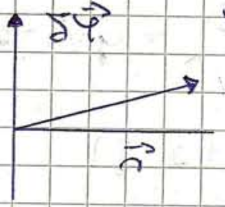
nem $\parallel$ $\vec{\omega}$-val általában

i: $\frac{d}{dt}\left(\sum_k \Theta_{ik}\omega_k\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi_i}$ forgatónyomaték

Forgatónyomaték bevezetése

$\mathcal{U} \to \mathcal{U} + \delta \mathcal{U}$

$$\delta \mathcal{U} = -\sum_j F_j \, \delta \vec r_j = -\sum_j \vec F_j \, (\delta \vec\varphi \times \vec r_j)$$



$$\delta \mathcal{U} = -\delta\vec\varphi \sum_j (\vec r_j \times \vec F_j) = -\delta\vec\varphi \cdot \vec M$$

$\vec M$ a külső erők forgatónyomatéka

$$\vec M = -\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec N = \vec M$$ TKP-i rendszerben

ált. inerciarendszerben is érvényes

Szimmetrikus, erőmentes pörgettyű az impulzusmomentum alapján
(Landau)

pörgettyű: rögzített pont körül mozgó merev test

szimmetrikus: $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$ nincs ható külső forgatónyomaték

$\vec N$ = állandó

$x_1, x_2 \perp x_3$
↑ tetszőlegesen választható

$x_2 \perp (\vec N, x_3)$ síkra

$\omega_0 = 0$ ⊥ a síkra

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

$N_i = \Theta_i \omega_i$

$N_2 = \Theta_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 0$

Első nem triviális állítás:

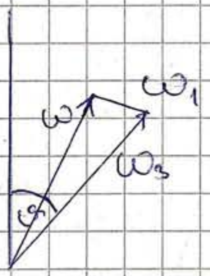
$\vec N$, $\vec\omega$, a pörgettyű x_3 tengelye egy síkban

tengelyen lévő pontok sebessége $\vec v_t = \vec\omega \times \vec r \perp (\vec N, x_3)$ síkra

tengely egyenletesen forog $\vec N$ körül, kúpot ír le

reguláris precesszió

mekkora sebességgel forog?



$$N_3 = \Theta_3 \omega_3 = N \cos\vartheta \Rightarrow \omega_3 = \frac{N\cos\vartheta}{\Theta_3}$$

$$N_1 = \Theta_1 \omega_1 = N \sin\vartheta \Rightarrow \omega_1 = \frac{N\sin\vartheta}{\Theta_1}$$

$$\omega_p = \frac{\omega_1}{\sin\vartheta} = \frac{N\sin\vartheta}{\Theta_1 \sin\vartheta} = \frac{N}{\Theta_1}$$

$\omega_p - \omega$ paralelogramma szabály szerint

$$\vec{\omega} \sim (\vec{N}, x)$$

$$\omega_i = \omega_3 = \frac{N\cos\vartheta}{\Theta_3}$$

$$\omega_p = \frac{\omega_1}{\sin\vartheta} = \frac{N}{\Theta_1}$$

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_3 = \Theta_1 \omega_1 \vec{e}_1 + \Theta_3 \omega_3 \vec{e}_3$$

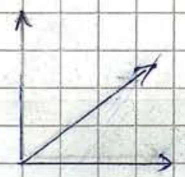
XIII előadás

XII. 17

Euler egyenletek

$\dot{\vec{N}} = \vec{M}$ inerciarendszerben

$\Theta_{ir}(t)$



Tehetetlenségi nyomaték által meghatározott együtt forgó rendszer

$$\vec{N} = \underline{\underline{\Theta}}\,\vec{\omega} \qquad N_i = \sum_{j=1}^{3} \Theta_{ij}\omega_j$$

Módosított alak kell.

$$(\omega) \qquad \frac{d\vec{N}}{dt} = \boxed{\frac{d'\vec{N}}{dt} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{N}}_{\text{koordinátarendszer forgásából}} = M}$$

Euler egyenletek

Miért egyszerű?

csak diagonális elemek

$N_{x}' = \Theta_1\omega_1 \quad N_{y}' = \Theta_2\omega_2 \quad N_{z}' = \Theta_3\omega_3$

$\Theta_{1,2,3} = \text{állandó}$

$\Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 = M_1$

$\vec{\omega} \times \vec{N} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix}$

$\vec{\omega} \times \vec{N} = \omega_2 N_3 - \omega_3 N_2 =$

$= \omega_2(\omega_3\Theta_3) - \omega_3(\omega_2\Theta_2) =$

$= \omega_2\omega_3(\Theta_3 \Theta_2)$

További Euler egyenletek

$\Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 = M_1$

$\Theta_2\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_3\omega_1 = M_2$

$\Theta_3\dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta)\omega_1\omega_2 = M_3$

- forgó Kr-ben a centrifugális tehetetlenségi erő forgatónyomatéka

$\vec{F}_i = m_i\vec{\omega} \times (\underline{\vec{\omega} \times \vec{r}})$

Erőmentes szimmetrikus pörgettyű, Euler egyenlet

- egy pontjában alátámasztott merev test

$\Theta_1 = \Theta_2 + \Theta_3 \qquad \vec{M} = 0\,;$

nehézségi erőtérben a tömegpont alatt alátámasztva

$\Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta)\omega_2\omega_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}_1 + \frac{\Theta_3 + \Theta_1}{\Theta_1}\omega_2\omega_3 = 0$

$\Theta_1\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 + \Theta_3)\omega_1\omega_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}_1 + \frac{\Theta_3 + \Theta_1}{\Theta_1}\omega_1\omega_3 = 0$

$\Theta_3\dot{\omega}_3 = 0 \qquad \omega_{1,2,3} = ? \qquad \alpha = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_1}\omega_3 = \text{áll}$

$\omega_3 = \text{állandó}$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\alpha\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= +\alpha\omega_1 \end{aligned}}$$

$\rightarrow \dot{\omega}_1 = -\alpha^2\omega_1$

$\omega_1 = a\cos(\alpha \cdot t + \delta)$

$\omega_2 = -a\sin(\alpha t + \delta)$

a konstans amplitúdó

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = a^2 + \omega_3^2 = \text{állandó}$$

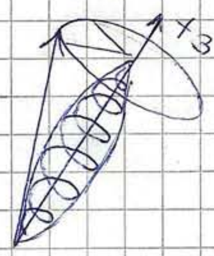
– mint egy körmozgás

A Földnek Föld alakja van – Valami egészen bonyolult valami

Következmény:

Együttmozgó rendszerben

ω pill. forgástengely iránya



kúppalástot ír le az x_3 szimmetriatengely körül

$$\omega = \alpha = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1}\omega_3 \qquad T = \frac{2\pi}{\alpha}$$

→ Föld esetén is megfigyelhető

$$\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1} = \frac{1}{300} \to T = 300 \text{ nap}$$

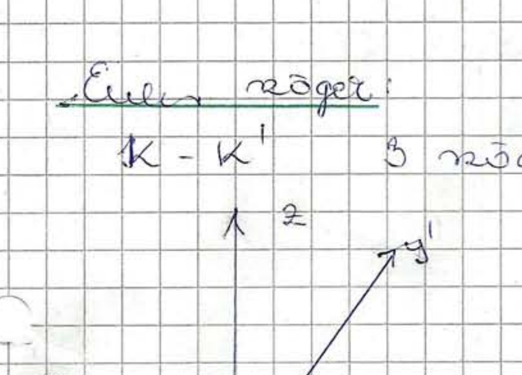
→ Chandler nutáció megfigyelt 433 nap

Euler szögek:

$K - K'$ 3 szög

$O = O'$

két [illegible] írok, hibásak egyben. Ez az ugyanolyan szögek, megjegyzés



$\vartheta = (z, z') \measuredangle \; (0, \pi)$

$\psi : (x, OC) \measuredangle \; (0, 2\pi)$

$\varphi : (x', OC) \measuredangle \; (0, 2\pi)$

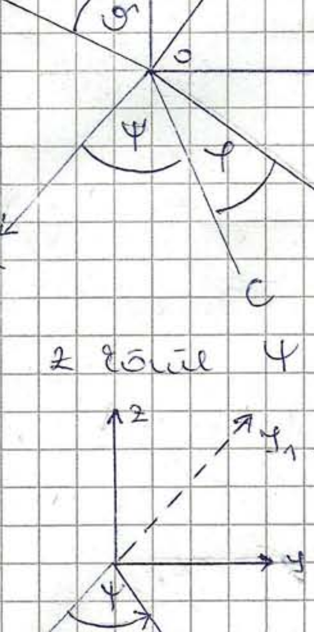
OC : (x, y) és (x', y') csomóvonala

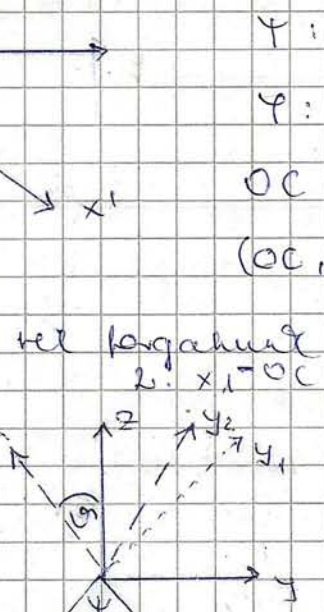
(OC, z, x_3) jobbsodrású rendszer

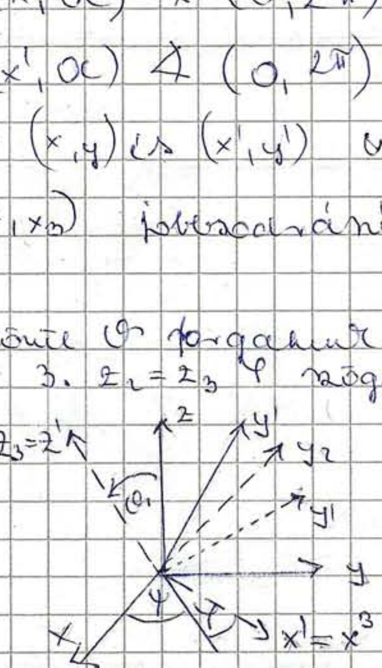
1, z körül ψ-vel forgatunk

2. $x_1 = OC$ körül ϑ forgatunk

3. $z_2 = z_3$ φ szöggel forgatunk







$\left(\vartheta(t), \psi(t), \varphi(t)\right) \Leftrightarrow \vec{\omega}(t)$

Szögsebesség komponenseinek kifejezése

$\boxed{\dot{\vartheta}}$ OC irányába mutat x', y', z'

$$\dot{\vartheta}_{x'} = \dot{\vartheta}\cos\varphi \quad \dot{\vartheta}_{y'} = \dot{\vartheta}\sin\varphi \quad \dot{\vartheta}_{z} = 0$$

$\boxed{\dot{\psi}}$ z irányú

$$\dot{\psi}_z = \dot{\psi}\cos\vartheta$$

x', y' síkra $\sim \dot{\psi}\sin\vartheta$ $\sim$ OC $\perp$ $(x' - y')$

$$\dot{\psi}_{x'} = \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi \quad \dot{\psi}_{y} = \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi$$

$\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi}_{x'} = 0 \quad \dot{\varphi}_{y'} = 0 \quad \dot{\varphi}_z = \dot{\varphi}$$

ω derékszögű koordinátarendszerben

$\vec{\omega}$ ferdeirányú (OC, z, z') $(\dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi})$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi \\ \omega_{y'} &= -\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta \end{aligned}}$$

Általános koordináták: $(\vec{r}_0, \vartheta, \psi, \varphi) \sim 6$

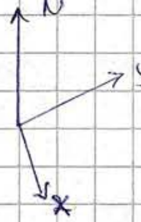
~~K inerciamátrix Euler~~

Erőmentes szimmetrikus pörgettyű Euler szögek időfüggése

K inerciamátrix, Euler egyenletek időfüggése

$\dot{N}$ $N =$ áll z irány

$N_z \neq 0$ állandó



x', y', z' főtehetetlenségi irányok

$$N_{x'} = N \sin\vartheta \sin\varphi = \Theta_1 \omega_1$$

$$N_{y'} = N \sin\vartheta \cos\varphi = \Theta_2 \omega_2$$

$$N_{z'} = N \cos\vartheta = \Theta_3 \omega_3$$

$$N_{x'} = \Theta_1 (\dot\vartheta \cos\varphi + \dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi)$$

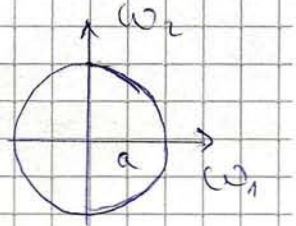
$$N_{y'} = \Theta_2 (-\dot\vartheta \sin\varphi + \dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi)$$

$$N_{z'} = \Theta_3 (\dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta) = \text{állandó} \qquad \omega_3 = \text{áll.}$$

$$(x', y') \to |N| \sim \text{áll.} \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{állandó} \quad \dot\vartheta = 0$$

$$N_{x'} \to \dot\psi = \frac{N \sin\vartheta \sin\varphi}{\Theta_1 \sin\vartheta \sin\varphi} = \frac{N}{\Theta_1} \qquad \boxed{\psi = \frac{N}{\Theta_1} \cdot t + \psi_0}$$

Euler egyenletből tudjuk



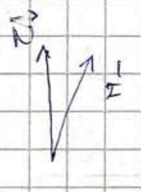
$$\omega_1 = a \cos(\alpha t + \delta) = \frac{N}{\Theta_1} \sin\vartheta_0 \sin\varphi$$

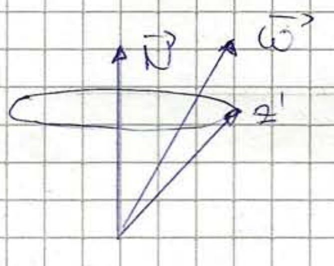
$$\omega_2 = -a \sin(\alpha t + \delta) = \frac{N}{\Theta_1} \sin\vartheta_0 \cos\varphi$$

$$a_1 = \frac{N}{\Theta_1} \sin\vartheta_0 = \frac{\sqrt{N_{x'}^2 + N_{y'}^2}}{\Theta_1} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} - (\alpha t + \delta) = -\alpha t + \varphi_0}$$

$\vartheta = \vartheta_0^* \;$ áll





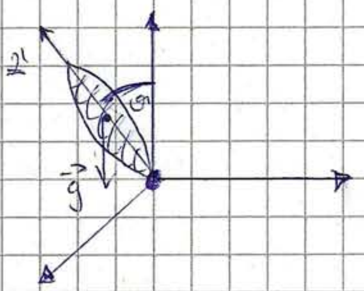
szimmetriatengely áll. szöget zár be

$\dot\psi = \frac{N}{\Theta_1}$ impulzusmomentum

körüli forgás precesszió szögsebessége

$\omega_3 = \frac{\Theta_1}{\Theta_3 - \Theta_1} \alpha \sim \alpha$ szimmetriatengely körüli forgás

Alsó pontban rögzített súlyos pörgettyű



$r \times F$ a tábla síkjába mutat

$m, \vec{g}, \vec{M} = 0$

Lagrange: $\Theta_1 = \Theta_2$

$$L = \frac{\Theta_1}{2}\omega_1^2 + \frac{\Theta_2}{2}\omega_2^2 + \frac{\Theta_3}{2}\omega_3^2 - V(\vartheta, \varphi, \psi) =$$

$$= \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2(\vartheta)\right) + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos(\vartheta)\right)^2 - Mgl\cos\vartheta$$

$\vartheta, \varphi, \psi \to$ 3 változó

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$ ciklikus koordináta

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \Theta_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos(\vartheta)\right) = N_{z'} = \text{áll.}$$

φ : $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ φ ciklikus

$$\left(\Theta_1 \sin^2\vartheta + \Theta_3\cos^2(\vartheta)\right)\dot\varphi + \Theta_3\cos\vartheta \cdot \dot\psi = N_z = \text{áll.}$$

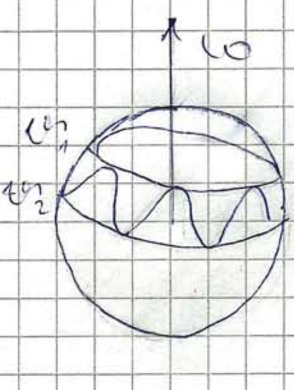
$$E = \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2(\vartheta)\right) + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos(\vartheta)\right)^2 + Mgl\cos\vartheta = \text{áll.}$$

Ált. elliptikus integrálokra vezet

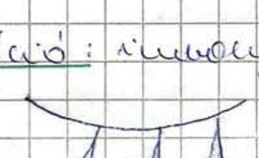
Gyors pörgettyűk

$$\omega_3^2 >> 2\,Mgl\frac{\Theta_1}{\Theta_3}$$

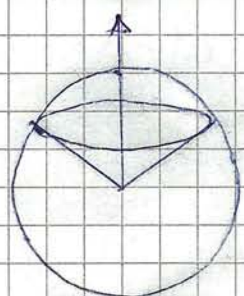
$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{\Theta_1 Mgl \sin\vartheta_0}{\Theta_3^2\omega_3^2}\left(1 - \cos\left(\frac{\Theta_3}{\Theta_1}\omega_3 t\right)\right)$$



nutáció: imbolygó mozgás



precesszió



$\vartheta_1 = \vartheta_2$

reguláris precesszió