Németh Viktória

I. Mechanika tárgya, kinematika

(természetes koord. r., polárkoordináták)

- mechanika tárgya: mozgás, mozgás törvényszerűségének vizsgálata
  - deduktív eljárás: néhány axiómát / törvényt megfogalmazunk, ebből következtetünk mozgásokra, jelenségekre
  - testek állapotát kell leírni: egyszerűsített modell / vonatkoztatási rendszer

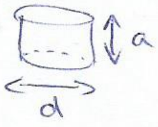
$\boxed{r(t)}$ ezt szeretnénk megismerni → ebből tudjuk a mozgást

↑ 1 értékű, folyt., 2x diffható

  - tömegpont elgondolás: tömeg van, kiterjedés nincs
  - pontrendszerek leírása: merev testek / deformálható testek

- fizikai mennyiségek mérése
  - távolság (méter) Sevres - normál méter; 1960 SI - atomi átmenethez kötötték; 1983 fény sebességéhez kötötték
  - idő (másodperc) Naphoz kötötték $\frac{1}{86400}$ $\quad \frac{1}{299\,792\,458}$ s

    ^{133}Cs hiperfinom átmenethez tartozó periódusidő 9 192 631 770-szerese.
  - szögmérés
    - síkban: radián  egységnyi ívhossz
    - térben: szteradián  1 sr ⇒ T = 1
  - tömeg (kilogramm) Sevres etalon: Platinium-Iridium ötvözet

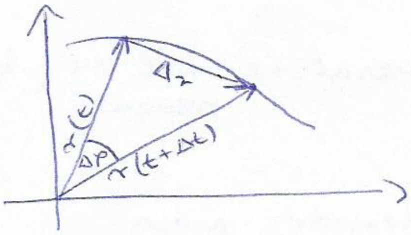
    a = d = 39 mm 
  - erő (Newton)

$$1\,N = 1\,\frac{kg\,m}{s^2}$$ származtatott mértékegység.

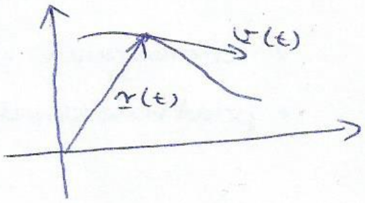
Németh Kitti...

- **Kinematika**: a test mozgásának a leírásával foglalkozik, nem vizsgálja azt, hogy mi hozta létre azt.
  - tömegpontok és nagy testek mozgásának leírására is alkalmas.

- $\boxed{\underline{r}(t)}$
  - ∟ 1 értékű, folyt., 2x diffható
  - ∟ ha ezt ismerjük, akkor ismert a mozgás
  - ∟ helyvektor, folytonos fv-e az időnek
  - ∟ térben egy folytonos görbe = mozgás pályája



$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t+\Delta t) - r(t)$ elmozdulás vektor



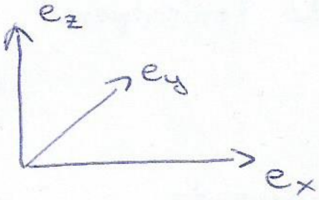
- sebesség: $\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}}(t)$

  iránya: görbe érintője

  abszolútértéke: $|\underline{v}| = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

- gyorsulás: $\underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \ddot{\underline{r}}(t)$

Koordináta-rendszerek



Descartes (derékszögű)

- $\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z = \underbrace{r \cdot \underline{e}_r}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$ → sugár irányú egységvektor

  $\dot{\underline{e}}_x = 0$

  $\dot{\underline{e}}_y = 0$

- $\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

- $\underline{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{x}\underline{e}_x + \ddot{y}\underline{e}_y + \ddot{z}\underline{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$

Síkbeli polárkoordináták

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

- $\underline{r} = r \cdot \underline{e}_r \qquad |\underline{e}_r| = 1$

- $\underline{v} = \dot{r} = (r \cdot \underline{e}_r)^{\bullet} = \dot{r} \cdot \underline{e}_r + r \dot{\underline{e}}_r$ → ez mi?

Németh Viktória

mivel $\underline{e}_r$ egységvektor: $\underline{e}_r^2 = 1$

$$\underline{e}_r \cdot \dot{\underline{e}}_r = 0 \rightarrow \dot{\underline{e}}_r \perp \underline{e}_r$$

$$\dot{\underline{e}}_r \parallel \underline{e}_\varphi$$ - ez a iránya

nagysága? $\rightarrow |\dot{\underline{e}}_r| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta \underline{e}_r}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi}$ $\qquad |\Delta \underline{e}_r| = \underline{e}_r \cdot \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$

tehát: $\dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi} \cdot \underline{e}_\varphi$

$$\underline{v} = \dot{r} \cdot \underline{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \underline{e}_\varphi \qquad v_r = \dot{r} \qquad v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi}$$

- $\underline{a} = \dot{(\dot{r}\underline{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \underline{e}_\varphi)} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\underbrace{\dot{\underline{e}}_r}_{\dot{\varphi}\cdot\underline{e}_\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}\cdot\underline{e}_\varphi + r\cdot\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\cdot\dot{\varphi}\underbrace{\dot{\underline{e}}_\varphi}_{-\dot{\varphi}\underline{e}_r}$

$$\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underline{e}_\varphi \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

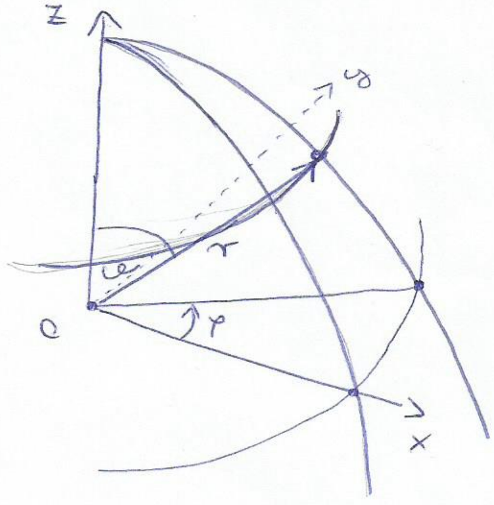
$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$$

Térbeli polárkoordináták

$x = r \cdot \sin\vartheta \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\vartheta \sin\varphi$

$z = r \cdot \cos\vartheta$



- $\underline{v} = \dot{r} \cdot \underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r =$

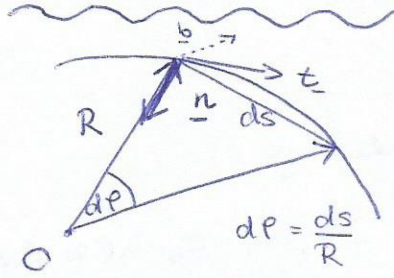
$= \dot{r}\underline{e}_r + r \cdot \dot{\vartheta}\,\underline{e}_\vartheta + r \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$

- $\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\cdot\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta)\underline{e}_r + (r\cdot\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r\cdot\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta)\underline{e}_\vartheta +$

$(r\ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + 2r\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta)\underline{e}_\varphi$

Németh Klaudia

Természetes koordinátarendszer



$\underline{t}$ - érintő

$\underline{n}$ - normál vektor

$\underline{b}$ - binormális vektor

$\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ jobbcsavar

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \underline{t} \cdot v$$

↖ sebesség abszolútértéke

$v_t = v = \dot{s}$

$v_n = 0$

$v_b = 0$

$$\underline{a} = \frac{d}{dt}(v \cdot \underline{t}) = \dot{v}\underline{t} + v\dot{\underline{t}} = \dot{v}\underline{t} + v \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \underline{n} = \dot{v}\underline{t} + v \cdot \dot{\varphi} \cdot \underline{n} =$$

$$= \dot{v}\underline{t} + \frac{v^2}{R} \cdot \underline{n}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

$a_t = \dot{v}$

$a_r = \frac{v^2}{R}$

$a_b = 0$

Németh Viktória

II. Newton tv.-ek, erő, tömeg, Galilei-transzformáció, Galilei-féle relativitási elv

1. definíció

inercia rendszer: olyan koord. r., ahol 3 nem egy síkban indított, magára hagyott test egyenes pályán mozog.

inercia idő-ben mérve, a magára hagyott test egyenletesen mozog

1. axióma

tehetetlenség törvénye: inercia r.-ben, a magára hagyott testek egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek vagy nyugalomban maradnak

2. definíció

erő: próbatesten létrehozott gyorsulással definiáljuk.

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}$$ erő ezzel a gyorsulással lesz arányos

2. axióma

Dinamika alaptörvénye / Newton II.

$$\frac{|\underline{F}|}{|\underline{a}|}$$ = a testre jellemző mennyiség, állandó adott testen

$$m\underline{a} = \underline{F} \to \underline{F} \parallel \underline{a}$$

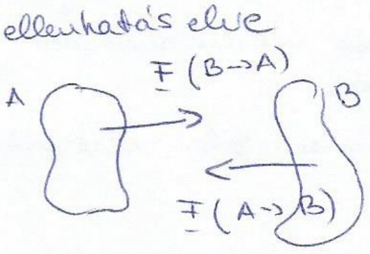
→ az arányossági tényező (tehetetlen tömeg) csak a testre jellemző adat

3. definíció

tömeg: $m = \frac{|\underline{F}|}{|\underline{a}|}$ testekre ható ellenállás / tehetetlenség mértéke

3. axióma

hatás-ellenhatás elve



$$\underline{F}(B \to A) = -\underline{F}(A \to B)$$

erő és ellenerő különböző testre hatnak, amit meg lehet nevezni

4. axióma

szuperpozíció elve: erőhatások függetlenek

$\underline{F}_1 \downarrow \underline{a}_1$ $\underline{F}_2 \downarrow \underline{a}_2$

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$$

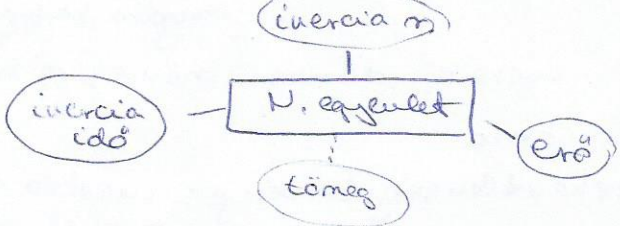
Németh Klaudia

A Newton egyenlet rejtett feltételei

– abszolút idő ($t = t'$) ; abszolút tér; m független a sebességtől; zárt rendszer tömege állandó

a definíciók mind csak a 2. axiómával együtt lesznek teljesek

az egész egy nagy fogalom (newtoni világkép)



erő tulajdonságai

- van olyan objektum, ami az erőhatást okozza
- létezik meghatározott erőtér.
- erő vektormennyiség $\underline{F} \sim \underline{a}$ $\qquad \underline{F} = m\underline{a}$
- hatás – ellenhatás $\underline{F}, -\underline{F}$
- szuperpozíció $\qquad \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = \underline{F}$

Galilei-transzformáció, Galilei-féle relativitási elv

mozgásegyenlet – nincs kitüntetett pont (r_0) és nincs kitüntetett nyugalmi állapot ($\underline{v}_{tr}$)

...ha van két koordináta-rendszer, amely egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, akkor nem tudunk különbséget tenni a két koord. r. között

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = t_2 \\ \underline{v}_1 = \underline{v}_2 + \underline{V} \end{array}\right. \rightarrow \dot{\underline{v}}_1 = \dot{\underline{v}}_2 \Rightarrow \underline{a}_1 = \underline{a}_2$$

ez maga a Galilei-transzf.

a tömegpont gyorsulása a két rendszerben ugyanaz

$$\underline{F}_1 = \underline{F}_2 \qquad \underline{F}_1 = m\underline{a}_1 = \underline{F}_2 = m\underline{a}_2$$

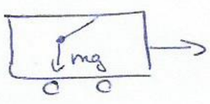
- a tömeg és így a mozgásegyenlet is invariáns a Galilei-transzformációra
- mindkét koor. r. inercia r. (mert teljesül a tehetetlenség elve)
- nincs kitüntetett mozgásállapot., tehát a két inerciarendszer teljesen egyenértékű a mechanika szempontjából

↳ ezt nevezzük Galilei-féle relativitási elvnek

Példák

1.) csak transzlációs gyorsulás

$$\underline{a}_{tr} \neq 0 \qquad \underline{\omega} = 0 \quad \dot{\underline{\omega}} = 0$$



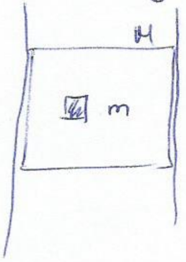
külső r.: $\quad m\underline{a}_{tr} = \underline{K} + m\underline{g}$

együtt mozgó r.: $\quad 0 = \underline{K} + m\underline{g} - m\underline{a}_{tr}$

a = 0

Németh Viktória

2., Einstein lift -



$\underline{a}_{tr} = \underline{g}$ lift: $M_t \underline{a}_{tr} = M_s \cdot \underline{g}$

$$a_{tr} = \frac{M_s}{M_t} \cdot g$$

tárgy:

$$m_t \cdot \underline{a} = m_s \underline{g} - m_t \cdot \underline{a}_{tr}$$

$$m_t \cdot \underline{a} = m_s \underline{g} - m_t \frac{M_s}{M_t} \cdot \underline{g}$$

$$\underline{a} = \frac{m_s}{m_t} \cdot \underline{g} - \frac{M_s}{M_t} \cdot \underline{g}$$

$$a = \underline{g}\left(\frac{m_s}{m_t} - \frac{M_s}{M_t}\right)$$

csak akkor lesz $a=0$, ha a súlyos és tehetetlen tömeg aránya független az anyagi minőségtől

$\frac{m_s}{m_t} \rightarrow \underline{g}$ minden testre ugyan akkora

3., $\underline{a}_{tr} = 0$ $\underline{\omega} \neq 0$ $\dot{\underline{\omega}} = 0$

Föld $\omega = \frac{2\pi}{86164} \frac{1}{s}$

$$\underbrace{m_t \cdot \ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{m_s M_s}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{r} - m_t \cdot \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})}_{\text{nehézségi erő}} - 2m(\underline{\omega} \times \underline{v})$$

Eötvös inga !

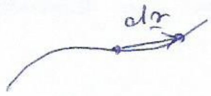
Németh Viktória

III. Munka, munkatétel, (konzervatív) erőtér, potenciál

- m tömegű anyagi pontra $\underline{F} = áll$ erővel hatok, ami elmozdítja azt egy s szakasszal egy egyenes mentén, akkor a munka:

$$W = \underline{F} \cdot \underline{s} \qquad [W] = J = N \cdot m$$

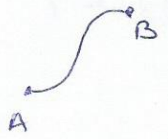
- ha az erő helyfüggő $\underline{F}(\underline{r})$, vagy a mozgás pályája nem egyenes, akkor az elemi munka:



$$\delta W = \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

└ olyan elemi elmozdulás, ahol az erő állandónak tekinthető

- a pálya két pontja közötti véges szakaszon vett munka:



$$W_{AB} = \sum_i \delta W_i = \sum_i \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i$$

↓

a felosztás minden határon túl finomítva (limesz)

$$W_{AB} = \int_A^B \underline{F}\, d\underline{r}$$

vonalmenti integrál, rögzített pálya

- ívhossz szerinti paraméterezés

$$\underline{r} = \underline{r}(s)$$

$$W = \int_{s_A}^{s_B} \underline{F}(\underline{r}) \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot ds = F_t \cdot ds$$

└ erő tangenciális komponense (pálya érintő iránya)

$$W = F_t(\underline{r}(s))\, ds$$

- descartes koord. r.

$$x_i = x, y, z$$

$$W = \int_{s_A}^{s_B} \sum_i F_i\, dx_i$$

$$W = \int_{s_A}^{s_B} F_x[x(s), y(s), z(s)] \frac{dx}{ds} ds + \int_{s_A}^{s_B} F_y[x(s), y(s), z(s)] \frac{dy}{ds} ds +$$

$$+ \int_{s_A}^{s_B} F_z[x(s), y(s), z(s)] \frac{dz}{ds} ds$$

Németh Viktória

Munkatétel (kinetikus energia tétele) — mozgásegyenlet megoldása nélkül tudunk infót mondani a mozgásról

$$W_{AB} = \int_A^B \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{r_A}^{r_B} m\ddot{\underline{r}}\, d\underline{r} = \int_{t_A}^{t_B} m\ddot{\underline{r}}\cdot\dot{\underline{r}}\, dt =$$

$$d\underline{r} = \dot{\underline{r}}\cdot dt$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m\dot{r}^2\right) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$\boxed{T = E_k = \frac{1}{2} m v^2}$ → m tömegű anyagi pont kinetikus (mozgási!) ~~e~~ energiája

$\boxed{W_{AB} = T_B - T_A}$ ez a munkatétel

/az erő által végzett munka a tömegpont mozgási energiájának növekedésével egyenlő/

időegység alatt végzett munka: teljesítmény $[P] = W$

pillanatnyi teljesítmény: $P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\underline{F}\underline{r})}{dt} = \underline{F}\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{F}\cdot\underline{v}$

Erőtér, konzervatív erőtér, potenciál

$$\underline{F}(r, v, t) \xrightarrow[\text{tfh.}]{} \underline{F}(r, t) \quad \text{~~erőtér~~}$$

└ a tér minden pontjához egy bizonyos időpontban meghatározott erő tartozik

└ ezt nevezzük erőtérnek!

sztatikus, ha időben állandó

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{r})$$

def.: konzervatív (potenciálos) erőtér

↓

olyan sztatikus erőtér, amely egy $V(\underline{r})$ skalárfv. negatív gradienseként állítható elő

$$\underline{F} = -\operatorname{grad} V(\underline{r})$$

$V(\underline{r})$ az erőtér potenciálja

$\operatorname{rot}\underline{F} = 0$ ← mivel grad V rotációja 0 / $\operatorname{rot}\operatorname{grad} V = 0$, $\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\cdot V) = 0$ /

⇐ a konzervatív erőtér rotációmentes

munka:

$$W_{AB} = \int_A^B \underline{F}\, d\underline{r} = \int_A^B -\operatorname{grad} V\, d\underline{r} = -\int_A^B \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z}\, dz\right)}_{dV} =$$

$$= -\int_A^B dV = V_A - V_B$$

Németh Viktória

konzervatív erőtérben a munka: $W_{AB} = V_A - V_B$

munkatétel: $W_{AB} = T_B - T_A$

$$T_B - T_A = V_A - V_B$$

$$T_A + V_A = T_B + V_B = E$$ $\Rightarrow$ konzervatív erőtérben a teljes mechanikai energia megmarad

$$\underline{\underline{E = T + V = \text{áll}}}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r)$$

másképp is megkapható:

$$m\ddot{r} = F \quad / \cdot \dot{r}$$

$$\dot{r} m \ddot{r} = F \cdot \dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2\right) = F \dot{r}$$

ha az erő konzervatív:

$$F \cdot \dot{r} = -\text{grad}\, V \cdot \dot{r} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}\right) = -\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = P = -\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(T+V) = 0 \quad / \int$$

$$\underline{\underline{T + V = \text{áll} = E}}$$

példák

1., $F = \text{áll}$ $\quad F_x = F_y = 0 \quad F_z = -mg \quad V = mgz$

2., rugóerő $\quad F_x = -Dx \quad F_y = F_z = 0 \quad V = \frac{1}{2} D x^2$

$\hookrightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} D x^2 = \text{áll}$

$x = a\cos(\omega t + b) \quad \dot{x} = -a\omega \sin(\omega t + b)$

$m\ddot{x} = -Dx$

$\ddot{x} = -\omega^2 x$

$\omega^2 = \frac{D}{m}$

$V = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D\, a^2 \cos^2(\;)$

$T = \frac{1}{2} \frac{a^2 \omega^2 m}{D} \sin^2(\;)$

$E = T + V = \frac{1}{2} D a^2$

3., $F = -\frac{\gamma m M}{r^2} \cdot \frac{r}{r} \qquad V(r) = -\gamma \frac{mM}{r} \qquad -\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \ldots = F \cdot r$

! konzervatív erőtér $\Rightarrow$ munka útfüggetlen

$$\int_A^B F\,dr = V_A - V_B$$

$V = 0$-t rögzíteni kell!

$\downarrow$

$V(\infty) = 0$

$V(A) = \int_A^0 F\,dr$ $\;$ – mező által végzett munka

$\oint F\,dr = 0 \Rightarrow$ munka zárt görbére vett integrálja 0.

Stokes tétel:

$$\boxed{\oint_G F\,dr = \int_F \text{rot}\, F\, df = 0}$$

Németh Viktória

? disszipatív erők

$\underline{F}(\underline{r}, t, \dot{\underline{r}})$

$\uparrow$ sebesség függő

$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{F}_D(\dot{\underline{r}})$

$$\frac{dT}{dt} = \underline{F}\dot{\underline{r}} + \underline{F}_D\dot{\underline{r}} = -\frac{dV}{dt} + \underline{F}_D\dot{\underline{r}}$$

$$\frac{d}{dt}(T+V) = P_D = \underline{F}_D \cdot \dot{\underline{r}}$$ — disszipatív erő teljesítménye

a teljes mechanikai energia megváltozása

$$/\int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$T(t_2) + V(t_2) = T(t_1) + V(t_1) + \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}_D d\underline{r}$$

Németh Viktória

IV. Mozgásegyenletek, megmaradási tételek tömegpontra

Hogyan mozog a tömegpont az erő hatására?

$\frac{d}{dt} m\underline{v} = \underline{F}$ megoldásával adhatjuk meg a választ.

keressük azt az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ folytonos és diffható fv-t, ami kielégíti a mozgásegyenletet.

$\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$

ha a tehetetlen tömeg állandó: $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$

Descartes koord. r. a megoldandó feladat komponensei:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

2. rendű, közönséges diffegy.

↓

ált. mo-t keressük → 6 paraméteres megoldássereget kapunk

↓

kell egy KF, hogy az adott feladatra vonatkozó mo-t megkapjuk

megadjuk a tömegpont kezdeti állapotát $t=0$-ban

$\underline{r}_0 = \underline{r}(0)$

$\underline{v}_0 = \underline{v}(0)$

megmaradási tételek

1.) mechanikai energia - csak tömegpontra ható konzervatív erőtérben.

$\underline{F} = -\operatorname{grad} V(\underline{r})$

↓

$E = T + V \rightarrow E = \frac{1}{2} m\dot{\underline{r}}^2 + V(\underline{r})$

↓ mozgási energia ↘ potenciális energia

$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \quad / \cdot \dot{\underline{r}}$

$\underbrace{m\ddot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}}} = \underline{F}\dot{\underline{r}} = -(\operatorname{grad} V) \cdot \dot{\underline{r}}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2\right) = -\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V\right) = 0 \quad / \int$$

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V = áll = E$$

Németh Viktória

2, impulzus megmaradás

impulzus $\underline{I} = m\dot{\underline{r}}$ $\qquad m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$

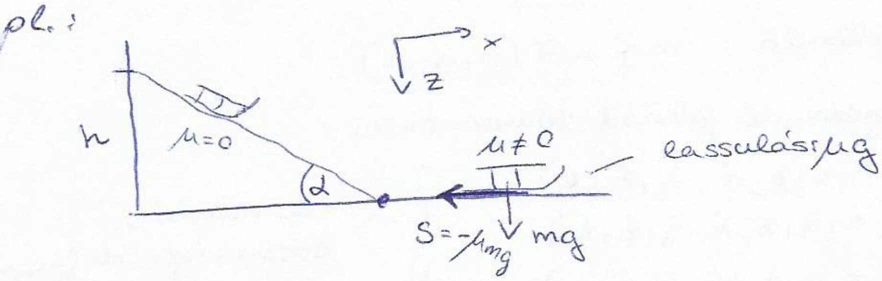
$$\frac{d\underline{I}}{dt} = m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \quad \Big/ \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$\underline{I}(t_2) - \underline{I}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\, dt$$

ha a pontra ható erők eredője zérus ($F=0$), akkor:

$$\underline{I}(t_2) = \underline{I}(t_1) = \text{áll}$$

pl.:



$v_0 = \sqrt{2gh}$ sebességgel érkezik az alsó ponthoz, mi lesz ott?

$I = mv_0$ — $I_x = mv_0 \cdot \cos\alpha$ — ez marad v. csökken

— $I_z = mv_0 \sin\alpha$ — ez eltűnik

$$F = \underbrace{F_{ütk}}_{} + mg \qquad \text{ütközés } \Delta t \text{ idő}$$

└ ütközés alatt fellépő erő: $I_z - 0 = mv_0 \sin\alpha =$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (F_{ütk} + mg)\, dt = F_{ütk} \cdot \Delta t + mg\Delta t = mv_0 \sin\alpha$$

$$F_{ütk} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{\Delta t} - \cancel{mg}$$

eltekintünk

Δt: $\quad S = -\mu F = -\mu F_{ütk} - \mu mg$

hogyan változik az x irányú impulzus?

$$I_x(t_0+\Delta t) - I_x(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} S\, dt = S \cdot \Delta t =$$

$$= -\mu F_{ütk} \cdot \Delta t - \mu mg\Delta t = -\mu m v_0 \cdot \sin\alpha$$

$v_x(t_0) = v_0 \cos\alpha$

$v_x(t+\Delta t) = v_0(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$

Németh Viktória

3.) impulzusmomentum (perdület)

def.: $\underline{N} = \underline{L} = \underbrace{m\underline{r}}_{I} \times \dot{\underline{r}} \rightarrow \boxed{\underline{N} = \underline{L} = \underline{r} \times \underline{I}}$ - impulzusmomentum

$\boxed{\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}}$ - forgatónyomaték

$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \quad / \underline{r} \times \quad \cancel{\underline{F}dt}$

$\underline{r} \times m\ddot{\underline{r}} = \underline{r} \times \underline{F}$

$\frac{d}{dt}(m\underline{r} \times \dot{\underline{r}}) = \underline{r} \times \underline{F}$

$\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}}$ impulzusmomentum tétel

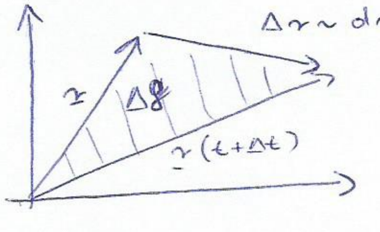
$\underline{N} = \text{áll}$ — $\underline{F} = 0$

\ $\underline{r} \times \underline{F} = 0 \rightarrow \underline{F} \parallel \underline{r} \rightarrow$ centrális erőtér

? centrális erőtér, centrális mozgás

$N = \underline{r} \times \underline{I} \perp \underline{r} \rightarrow \boxed{\underline{N} \cdot \underline{r} = 0}$ - mozgást leíró egyenlet (sík egyenlet)

$\underline{r} \times \dot{\underline{r}} = \text{áll}$



$\underline{r} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \rightsquigarrow \underline{r} \times \Delta\underline{r} \rightarrow \underbrace{2 \cdot \Delta S}$ a háromszög terület kétszerese

$\underline{r} \times \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = 2 \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}$

$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\, \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = \text{áll}$

ez a területi sebesség

L helyvektor által időegység alatt súrolt terület

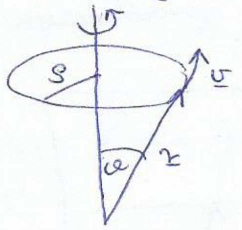
$S \perp$ síkra

$\underline{r}, \dot{\underline{r}}, \; \underline{S} \parallel \underline{N}$, síkmozgás

Németh Viktória

V. Gyorsuló vonatkoztatási rendszerek, súlyos és tehetetlen tömeg, jelenségek a forgó Földön.

- szögsebesség $\underline{\omega}$



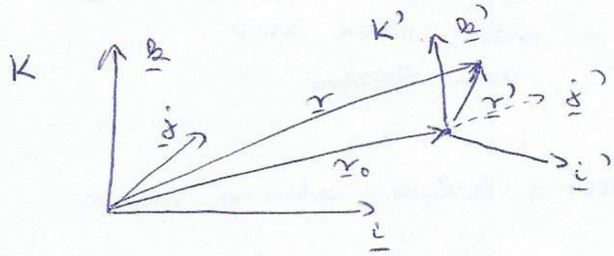
$$|\underline{v}| = \varrho \cdot \omega = r \cdot \sin\alpha \cdot \omega$$

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} = \frac{d\underline{r}}{dt} \quad - \text{ tértükrözés}$$

$$|\underline{\omega}| = \omega$$

└ iránya pozitív forgásirány (pszeudo/axiál vektorok)

gyorsuló rendszer



K' $\underline{\omega}$-val forog a K körül.

$$\underline{A} = A_x \underline{i}' + A_y \underline{j}' + A_z \underline{k}'$$

$$\frac{d\underline{A}}{dt} = \underbrace{\frac{dA_{x'}}{dt}\underline{i}' + \frac{dA_{y'}}{dt}\underline{j}' + \frac{dA_{z'}}{dt}\underline{k}'}_{\frac{d'\underline{A}}{dt}} + A_{x'}\underbrace{\frac{d\underline{i}'}{dt}}_{\underline{\omega}\times\underline{i}'} + A_{y'}\underbrace{\frac{d\underline{j}'}{dt}}_{\underline{\omega}\times\underline{j}'} + A_{z'}\underbrace{\frac{d\underline{k}'}{dt}}_{\underline{\omega}\times\underline{k}'}$$

$$\boxed{\frac{d\underline{A}}{dt} = \frac{d'\underline{A}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{A}} \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{d's}{dt}$$

vektor mennyiség — skalár mennyiség

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{r}'$$

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}_0}{dt} + \frac{d\underline{r}'}{dt} = \frac{d\underline{r}_0}{dt} + \frac{d'\underline{r}'}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}' \qquad \underline{r}' = \underline{r} - \underline{r}_0$$

$$\underline{v} = \underline{v}_{tr} + \underline{v}' + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d\underline{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\underline{v}'}{dt} + \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}'}{dt} + \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r}' =$$

$$= \frac{d\underline{v}_{tr}}{dt} + \frac{d'\underline{v}'}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{\omega} \times \Big(\underbrace{\frac{d'\underline{r}'}{dt}}_{\underline{v}'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'\Big) + \frac{d'\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r}' + \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{\omega})}_{0} \times \underline{r}' = \Rightarrow$$

Németh Viktória

$$= \underbrace{\frac{dv_{tr}}{dt}}_{a_{tr}} + \underbrace{\frac{d'v'}{dt}}_{a'} + 2\,\underline{\omega}\times\underline{v}' + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + \frac{d'\omega}{dt}\times\underline{r}'$$

tehát, a mozgásegyenlet K'-ben (vesszőt elhagyva, K'-ben gondolkodva):

$$\boxed{m\underline{a} = \underline{F} - m a_{tr} - m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) - 2m(\underline{\omega}\times\underline{v}) - m(\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r})}$$

↑ transzlációs ↑ centrifugális ↑ Coriolis-erő ↑ Euler-erő

ezek a tehetetlenségi erők. pszeudo erő => mert nem tudok rámutatni arra, ami okozza

<u>súlyos és tehetetlen tömeg</u>

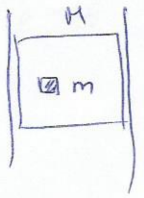
tehetetlen tömeg: mennyire ellenálló egy test a kölcsönhatásra nézve

$$m_t \cdot \underline{a} = \underline{F}$$

súlyos tömeg: két test mennyire „kedveli" egymást

$$\gamma\frac{m_s M_s}{r^2} = F_{gr}$$

<u>Einstein lift</u>



— lift zuhan

$$a_{tr} = \underline{g}$$

lift: $M_t \cdot a_{tr} = M_s \cdot \underline{g}$

$$a_{tr} = \frac{M_s}{M_t}\cdot\underline{g}$$

tárgy: $m_t \cdot \underline{a} = m_s\underline{g} - m_t \cdot \underline{a}_{tr}$

$$m_t \cdot \underline{a} = m_s\underline{g} - m_t \cdot \frac{M_s}{M_t}\cdot\underline{g}$$

$$\underline{a} = \frac{m_s}{m_t}\cdot\underline{g} - \frac{M_s}{M_t}\cdot\underline{g} = \underline{g}\left(\frac{m_s}{m_t} - \frac{M_s}{M_t}\right)$$

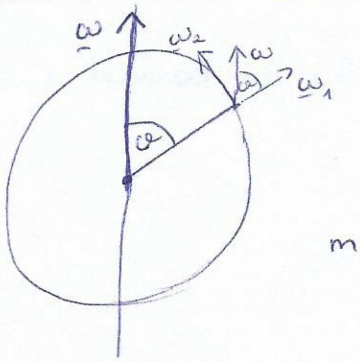
csak akkor lesz $a = 0$, hogy ha a súlyos és a tehetetlen tömeg aránya független az anyagi minőségtől.

$\frac{m_s}{m_t}$ arány független -> mert $\underline{g}$ minden testre ugyan akkora és ugyanolyan irányú

Németh Viktória

Jelenségek a forgó Földön

• Coriolis erő következményei $\rightarrow$ $F_{cor} = 2m(\underline{v} \times \underline{\omega})$



$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$$

$$m_t \ddot{\underline{r}} = m_s \underline{g} - 2m(\underline{\omega} \times \underline{v})$$

$$m_t \ddot{\underline{r}} = m_s \underline{g} - \underbrace{2m(\underline{\omega}_1 \times \underline{v})}_{\downarrow} - \underbrace{2m(\underline{\omega}_2 \times \underline{v})}_{\downarrow}$$

vízszintes eltérítés

északon jobbra térít

- puskagolyó
- folyómeder
- ciklon anticiklon

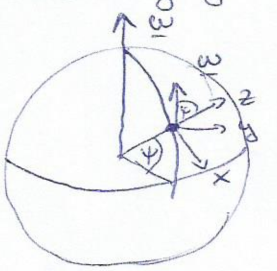
A M

súlyváltozást hoz létre

K - csökken a súly

Ny - nő a súly

└ szabadesés forgó Földön



$$\cancel{m}\ddot{\underline{r}} = \cancel{m}\underline{g} - 2\cancel{m}(\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}})$$

- Coriolis erő

$$\underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega\cos\psi \\ 0 \\ -\omega\sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\omega\cos\psi & 0 & -\omega\sin\psi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\dot{y}\sin\psi \\ \omega\dot{x}\sin\psi + \omega\dot{z}\cos\psi \\ -\omega\dot{y}\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y}\sin\psi \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x}\sin\psi - 2\omega\dot{z}\cos\psi \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{y}\cos\psi \end{aligned}}$$

ezek a mozgásegyenletek írják le a szabadon eső test mozgását, ha eltekintünk a közegellenállástól

$S \rightarrow \dot{x}$

$S \rightarrow \dot{z}$

$\dot{x}, \dot{z} \rightarrow \ddot{y}$-ba behelyettesítjük, ... kijön.

Másik módszer: észrevesszük, hogy különböző nagyságrendű dolgok vannak $\rightarrow$
$\rightarrow$ tudjuk, hogy mi fontos és mi nem.

$\dot{z} \gg \dot{x}, \dot{y}$ $\rightarrow$ $\omega = 0$-nál $\dot{x}, \dot{y} = 0$

$\dot{x}, \dot{y} \sim \omega^2$ rendűek

Németh Viktória

Szubcesszív approximáció (fokozatos közelítés módszere):

$\ddot{z} = -g \quad \dot{z} = -gt \quad v_{z0} = 0 \quad z = h - \frac{1}{2} g t^2$

ezt visszahelyettesítem -> látjuk, hogy $\ddot{y}$-ban szerepel, ide beírva $\dot{z}$-ot, jó közelítést kapunk

$\dot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = 2\omega g t \cos\varphi$

$\dot{y} = g \cdot t^2 \omega \cdot \cos\varphi \qquad \dot{y}|_0 = 0$

$y = \frac{1}{3} g t^3 \omega \cos\varphi \qquad y_0 = 0$

keleti irányú kitérés

ωt -> kis paraméter

$\ddot{x} = 2\omega g t^2 \omega \cdot \cos\varphi \sin\varphi = 2 g \omega^2 t^2 \cos\varphi \sin\varphi$

$\dot{x} = \frac{2}{3} g t^3 \omega^2 \cos\varphi \sin\varphi$

$x = \frac{1}{6} g \omega^2 t^4 \cos\varphi \sin\varphi$

egymást követő rendben következnek a kitérések:

$z \sim \frac{1}{2} g t^2$

$y \sim \frac{1}{3} g t^2 \cdot \cos\varphi \cdot \omega t$

$x \sim \frac{1}{6} g t^2 \cdot \cos\varphi \sin\varphi \cdot (\omega t)^2$

Tehát

A Coriolis erő – „felfelé" irányuló $\underline{\omega}$, vízszintes $\underline{v}$ $\quad -(\omega \times v) = F_{cor}$

$(v \times \omega) = F_{cor}$

Északon jobbra térül (pusztagyú)!

– „északra" irányuló $\underline{\omega}$, vízszintes $\underline{v}$

Kelet felé mozogva könnyebb vagyok!

– „északra" irányuló $\underline{\omega}$, függőleges $\underline{v}$

szabadon eső test északon keletre térül el!

Németh Viktória

VI. Pontrendszerek, megmaradási tételek, mozgásegyenletek 10 integrálja

Test: anyagi pontok (tömegpontok) rendszere.

reálisabb leírást ad, ha n db tömegpontként képzeljük el

- minden tömegpontra tudjuk, hogy: (Newton axióma)

$$m\ddot{\underline{r}}_i = \underbrace{\underline{F}_i(r_i,\dots)}_{F_i^k \text{ - külső erők}} + \underbrace{\sum_{i,j} \underline{F}_{i,j}(r_j \dots r)}_{F_i^b \text{ - belső erők}} \qquad i=1,2,\dots n$$

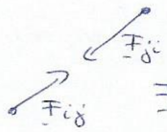
- 3. axióma $\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji}$

  + feltevés: $\underline{F}_{ij} \parallel \underline{r}_{ij}$ – az erők centrálisak

$$\underline{r}_{ij} = r_i - r_j$$

- a mozgást leíró egyenletek:

$$\sum_i m_i\ddot{r}_i = \underbrace{\sum_i \underline{F}_i}_{F_i^k} + \underbrace{\sum_{i,j}\underline{F}_{ij}}_{F_i^b = 0} = \sum_i \underline{F}_i$$



$\underline{F}_{ij} + \underline{F}_{ji} = 0$

$$\underline{F} = \sum_i m_i\ddot{r}_i \quad \text{– külső erők eredője}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\dot{r}_i\right)}_{} = \sum_i \underline{F}_i = \underline{F}$$

$$\dot{\underline{I}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\underline{r}}_i = \sum_i \underline{I}_i \qquad \boxed{\dot{\underline{I}} = \underline{F}}$$

Impulzustétel (2. axióma pontrendszerre)

pontrendszer teljes impulzusára vett deriváltja egyenlő a külső erők eredőjével

- TKP (tömegközéppont)

$$\underline{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum m_i} \qquad m = \sum_i m_i \text{ – pontrendszer teljes tömege.}$$

$$m\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F} \quad \text{– a tkp mozgását leíró egyenlet.}$$

tömegközépponti tétel.

– a tkp úgy mozog, mintha abban a teljes tömeg volna egyesítve és rá csak a külső erők eredője hatna

Németh Viktória

– Impulzusmegmaradás tétele

Zárt rendszer esetén, ahol a rendszerre külső erők nem hatnak, az impulzus állandó.

$$\underline{F} = 0 \rightarrow \dot{\underline{I}} = 0 \rightarrow \boxed{\underline{I} = \text{állandó}}$$

ebből a mozgásegyenlet 6 integrálját kapjuk:

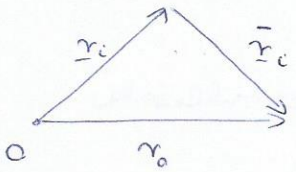
$$r_0 = \underline{a}\cdot t + \underline{b} \qquad \left.\begin{matrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{matrix}\right\} \text{6 megmaradó mennyiség}$$

↓

a tkp kezdeti helye és állandó sebessége

• célszerű bevezetni a tömegközépponti rendszert

↳ a rendszer pontjainak helyét a tkp-hoz viszonyítva adjuk meg



$$r_i = r_0 + \bar{r}_i$$

– a tömegpontok inerciar.-beli r_i és a TK-rendszerhez viszonyított $\bar{r}_i$ helyvektorok közötti összefüggés.

$$\bar{\underline{I}}_i = m_i \dot{\bar{r}}_i$$

$$\bar{\underline{I}} = \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i = \underline{I} - \sum_i m_i (\dot{r}_0 - \dot{r}_i) = \sum_i m_i \dot{r}_0 - \sum_i m_i \dot{r}_i = 0$$

$$\boxed{\bar{\underline{I}} = 0}$$

A pontrendszerek teljes impulzusa a TK-rendszerben nulla.

– pontrendszer impulzusmomentuma

A pontrendszer valamilyen O pontra vonatkoztatott impulzusmomentuma az egyes tömegpontok $\underline{N}_i = r_i \times p_i$ impulzusmomentumának összege:

N = L = imp.mom.
p = I = impulzus

$$\underline{N} = \sum_i N_i = \sum_i r_i \times p_i$$

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_j \underline{F}_{ij} \qquad / \, r_i \times \ldots / \sum_i$$

$$\sum_i r_i \times m_i \ddot{r}_i = \sum_i r_i \times \underline{F}_i + \sum_{ij} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}$$

mert párhuzamosak

↓

$$\underbrace{r_i \times F_{ij} + r_j \times F_{ji}}_{F_{ij} = -F_{ji}} = (r_i - r_j) \times \underline{F}_{ij} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(r_i \times m_i \dot{r}_i\right)}_{\underline{N}} = \underbrace{\sum_i r_i \times \underline{F}_i}_{\underline{M} = \sum_i r_i \times F_i}$$

! ha a belső erők nem centrálisak: $N = M_b + M_k$

$$\boxed{\dot{\underline{N}} = \underline{M}}$$

pontrendszer impulzusmomentum tétele

$\Longrightarrow$ $\underline{M} = 0 \rightarrow \underline{N} = \text{áll}$

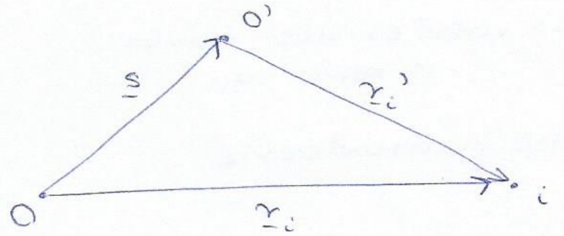
↓

3 megmaradó mennyiség

(3 további integrál)

Németh Viktória

- impulzusmomentum más vonatkoztatási pontra:



$$r_i = s + r_i'$$

$$O: \quad N = \sum_i m_i r_i \times \dot{r}_i$$

$$O': \quad N' = \sum_i m_i r_i' \times \dot{r}_i' = \sum_i m_i (r_i - s) \times (\dot{r}_i - \dot{s}) = \underbrace{\sum_i m_i r_i \times \dot{r}_i}_{N} -$$

$$- s \times \underbrace{\sum m_i \dot{r}_i}_{m\dot{r}_0} + \dot{s} \times \underbrace{\sum m_i r_i}_{m r_0} + \sum m_i s \times \dot{s}$$

$$\dot{N}' = \dot{N} - \cancel{\dot{s} \times m\dot{r}_0} - s \times m\ddot{r}_0 + \ddot{s} \times m r_0 + \cancel{\dot{s} \times m\dot{r}_0} + m s \times \ddot{s} + \underbrace{m\dot{s} \times \dot{s}}_{0}$$

$$\dot{N}' = \dot{N} - s \times m\ddot{r}_0 + m(r_0 - s) \times \ddot{s}$$

$$O: \quad \dot{N} = M = \sum_i r_i \times F_i$$

$$O': \quad \dot{N}' = M \underbrace{- s \times m\ddot{r}_0}_{} + (r_0 - s) \times m\ddot{s}$$

$$\sum_i r \times F_i \qquad - s \times \sum m_i \ddot{r}_i$$

$$- s \times F_i$$

$$\dot{N}' = \underbrace{\sum_i (r_i - s) \times F_i}_{M'} + (r_0 - s) \times m\ddot{s}$$

— az impulzusmomentum tétel érvényes, ha: $\ddot{s} = 0$

O' is inerciarendszer.

ha $r_0 - s = 0 \rightarrow r_0 = s \rightarrow$ TKP

– energiatétel pontrendszerre

$$m\ddot{r}_i = F_i + \sum_i F_{ij} = F_i^* \quad / \cdot \dot{r}_i$$

$$\sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \ddot{r}_i = \sum_i \dot{r}_i F_i^*$$

a kin. energia idő szerinti vett deriváltja

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$$ – pontrendszer teljes kinetikus energiája

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i F_i^* \dot{r}_i \quad / \int_{t_1}^{t_2}$$

Németh Viktória

$$T(t_2)-T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} F_i \, d\underline{r}_i = W$$

külső és belső munka is benne van

$$\boxed{T(t_2)-T(t_1) = W}$$ – munkatétel pontrendszerre

konzervatív: $\underline{F}_i^{sz} = -\operatorname{grad} V(\underline{r}_i)$

$$F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

szabad erők munkája:

$$W_{sz} = \sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \underline{F}_i \, d\underline{r}_i = \sum_i \int_1^2 \left(-\frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial V}{\partial y_i} dy_i - \frac{\partial V}{\partial z_i} dz_i \right) =$$

$$= -\int_1^2 dV = V_1 - V_2$$

ha a kényszererők munkája 0 $\to \sum W_i^{(k)} = 0$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$E = T + V$$

– mozgásegyenlet +1 integrálja

– Mozgásegyenlet 10 integrálja
(vagyis a megmaradó mennyiségek)

6 : TKP mozgása $\underline{r}_0 = \underline{a}t + \underline{b}$

3 : impulzusmomentum, ha megmarad $\Rightarrow M = \sum \underline{r}_i \times \underline{F}_i = 0$

1 : teljes mechanikai energia, ha megmarad (konzervatív erő kényszererők munkája 0.)
$E = T + V$

Németh Viktória

VII. Kényszermozgás,

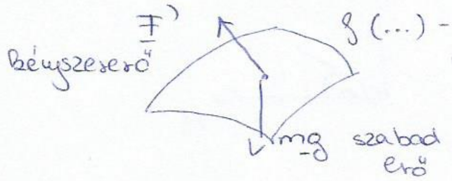
Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletek

A testre ható erőn kívül más külső körülmények is hatással vannak a testek mozgására, pl a mozgás folyamán egy meghatározott felületen vagy görbén kell maradnia.

Az ilyen mozgásokat kényszermozgásoknak nevezzük.

I. módszer

kényszert erőkkel írjuk fel



$$\left.\begin{array}{l} m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{F}' \\ f(x,y,z,t) = 0 \end{array}\right\}$$ 4 egyenlet, 6 ismeretlen

axiómákból nem következő feltevés: $\underline{F}' \perp$ a felületre.

tapasztalat - kényszererő nem befolyásolja a felület menti mozgást

↳ szerepe: megakadályozza a tömegpont felületen való áthaladását

geometria: $\operatorname{grad} f \perp$ felületre → $\underline{F}' \sim \operatorname{grad} f$

kényszererő: $\underline{F}' = \lambda(t) \operatorname{grad} f(x,y,z,t)$

└ kényszererő egyetlen jellemző paramétere

Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenlet:

$$\left.\begin{array}{l} m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \lambda \operatorname{grad} f \\ f(\underline{r}, t) = 0 \end{array}\right]$$

4 egyenlet, 4 ismeretlen
⇓
egyértelműen meghatározzák a kényszererőt és a mozgás pályáját.

általános megoldás recept:

- képezzük az $f(\underline{r}, t)$ idő szerinti második deriváltját
  (feltételezzük, hogy a felület nem mozog, vagyis az egyenlet az időt explicite nem tartalmazza)

$\frac{d^2 f}{dt^2} = \ldots$ kifejezzük $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ -ot a mozgásegyenletből ($m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \lambda \operatorname{grad} f$)

behelyettesít

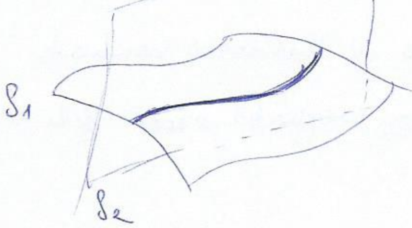
λ meghatározható az x, y, z koord. és az $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sebességkomponensek fv.-e ként

$\lambda = \lambda(x,y,z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ → mozg. egyenlet megoldható!

Németh Viktória

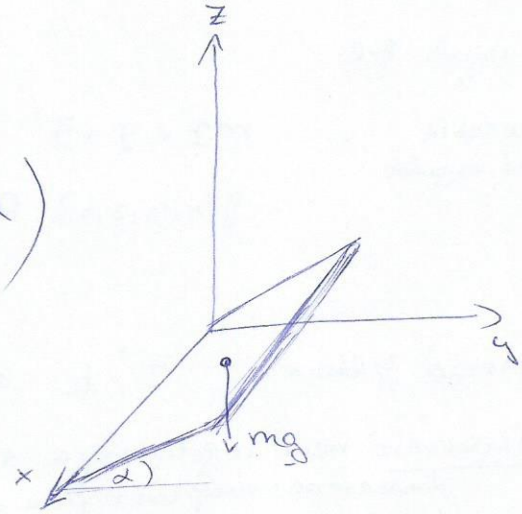
előírt görbén mozgás (térgörbén mozgás)

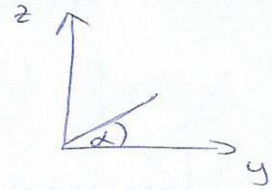
térgörbét két felület metszésvonalaként képzeljük el, és a felületek egyenleteit adjuk meg kényszerfeltételként.



$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{F}'$$
$$f_1(\underline{r},t)=0$$
$$f_2(\underline{r},t)=0$$
$$F' = \lambda_1 \,\mathrm{grad}\, f_1 + \lambda_2 \,\mathrm{grad}\, f_2 \ldots$$

példa mozgás síklejtőn





$$f(\underline{r}) = z - y\cdot \mathrm{tg}\alpha$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad \mathrm{grad}\, f = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{tg}\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= -\lambda\cdot \mathrm{tg}\alpha \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda \end{aligned}\right\}$$

$$z - y\,\mathrm{tg}\alpha = 0 \quad \Big/ \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\ddot{z} = \ddot{y}\,\mathrm{tg}\alpha$$

$$-g + \frac{\lambda}{m} = -\frac{\lambda}{m}\,\mathrm{tg}^2\alpha \quad \longrightarrow \quad \lambda = mg\cos^2\alpha$$

$$mg = \lambda(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)$$

$$\lambda = mg\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = mg\,\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g\sin\alpha\cos\alpha \\ \ddot{z} &= -g + g\cos^2\alpha = -g\sin^2\alpha \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y &= -\tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos t + v_{y0}\cdot t + y_0 \\ z &= -\tfrac{1}{2}g\sin^2\alpha\, t^2 \ldots \end{aligned}$$

spec. eset:

$\lambda = \lambda(t)$ ~ időfüggő felület $\quad f(\underline{r},t) = f(t)$

pl.: $\quad z - y f(t) = 0$

$$\dot{z} - \dot{y}f - y\dot{f} = 0$$

$$\ddot{z} - \ddot{y}f - 2\dot{y}\dot{f} - y\ddot{f} = 0 \longrightarrow$$ ide kell behelyettesíteni a mozg. egy.

$$\lambda(x, y, z, t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, f, \dot{f}, \ddot{f})$$

Németh Viktória

II. módszer

jó koordináta-rendszert kell választani

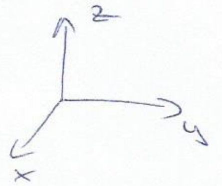
$\downarrow$

úgy, hogy a mozgásegyenlet kényszermentes legyen

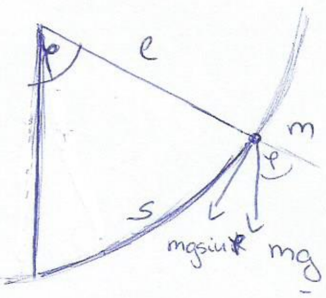
„kényszermenti komponens"

$m\ddot{\underline{r}}_t = \underline{F}_t$ – felület érintősíkjában (görbe érintője mentén)

pl.: matematikai inga



z-y-ban leng



$y^2+z^2=l^2$

polár koord. $r=l=áll$

$\varphi(t)=?$

$s=l\cdot\varphi$

mert a polár koor. előjeles : ↻ – ↺ +

$\cancel{m}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=-\cancel{m}g\sin\varphi$

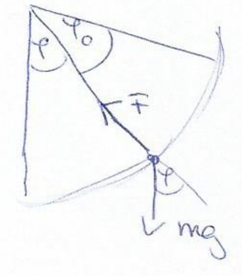
$l\ddot{\varphi}=-g\sin\varphi$ kis lengésekre $\sin\varphi=\varphi$

$\ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\cdot\varphi$

$t=0$

$\varphi_0,\ \dot{\varphi}=0$ $\varphi=\varphi_0\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot(t-t_0)\right)$

kényszererő; normális



$m\underline{a}_r=-mg\cos\varphi+\underline{F}_r'$

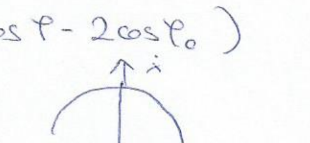
$a_r=-\frac{v^2}{l}$

energiamegmaradásból:

$\frac{1}{2}mv^2-mgl\cos\varphi=-ml\cos\varphi_0$

$F_r'=mg(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)$ $|\varphi|\le\varphi_0$

(binormális irányban $\underline{F}_b=0$ $\underline{F}_b'=0$)



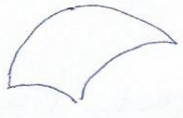
Németh Viktória

VIII. Virtuális munka elve, kényszerek osztályozása, D'Alembert-elv

mechanika elvei: Newton mozg. egyenletekkel ekvivalens leírását adják a világunknak, axiómákhoz hasonló a helyzetük.

- virtuális munka elve

virtuális elmozdulás: kényszer által megengedett, végtelen gyorsan ($\delta t = 0$ idő alatt) végbemenő elmozdulás.
$\downarrow$
$\delta \underline{r}$



$$\left.\begin{matrix} f(\underline{r}, t) = 0 \\ f(\underline{r} + \delta \underline{r}, t) = 0 \end{matrix}\right\} \text{grad } F \, \delta \underline{r} = 0 \quad (\nabla F \, \delta \underline{r} = 0)$$

$$\underline{F}' \perp \text{felületre} \Rightarrow \underline{F}' \delta \underline{r} = 0$$

- rendszer akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők ún. virtuális munkája zérus, vagyis

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} F_i \delta r_i = 0} \quad \text{– Bernoulli megfogalmazása}$$

mivel a rendszer szabadon mozoghat az erők hatása alatt, ezért δr_i tetszőleges, így ahhoz, hogy $F_i \delta r_i = 0$

$$\Uparrow$$
$$F_i = 0 \qquad i = 1, \dots, N$$

NII -> VME

Egyensúlyban a szabad erők virtuális munkája 0!!!

- Egyensúly: $\sum F = 0 \rightarrow F + F' = 0$

$\swarrow$

II. axióma

$$\underline{F} \delta \underline{r} + \cancel{\underline{F}' \delta \underline{r}} = 0$$

$\llcorner$ kényszererő virt. munkája nulla

$$\boxed{\underline{F} \delta \underline{r} = 0} \quad \text{– virtuális munka elve!}$$

/csak szabad erők szerepelnek benne/

VME -> NII.

$$\cancel{(F + F')\, \delta \underline{r} = 0} \rightarrow$$

$$\underline{F} \delta \underline{r} = 0 \qquad / + 0 = \lambda \text{ grad } f \, \delta \underline{r} \qquad \nabla f \perp \delta r$$

$$(\underline{F} + \lambda \text{ grad } f)\, \delta \underline{r} = 0$$

pl.: $\delta \underline{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$ – 2 komponens független

Németh Viktória

λ-t válasszuk meg úgy, hogy $\left(F_z + \lambda \, \mathrm{grad}\, f\right) = 0$

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(F_y \cdot \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y = 0$$

δx és δy független: együtthatóiknak azonosan el kell tűnniük

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F + \lambda \nabla f = 0$$

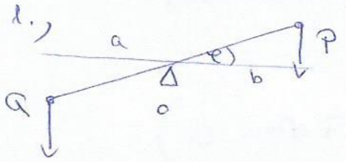
$$F + F' = 0$$

↓ és maga a Lagrange-féle elsőfajú mozg. egyenlet

ezt így adtuk meg ⟵ $F_z + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$

példa

1.)



Q terhet mekkora P erővel tudjuk egyensúlyban tartani?

geometriai kényszer: rúd nem hajlik, φ szöggel jellemezhető

Q rész virtuális elmozdulása: $\delta s_Q = -a\,\delta\varphi$

P — " — $\delta s_P = b \cdot \delta\varphi$

$$\sum F_i \delta \underline{r}_i = 0$$

$$Q \cdot \delta s_Q + P\,\delta s_P = 0$$

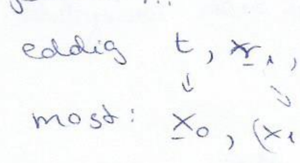
$$Pb\,\delta\varphi + Q \cdot a \cdot \delta\varphi = 0$$

$$Pb = Qa$$ – ez az egyensúly feltétele

$$M_Q^{(o)} = M_P^{(o)}$$

↓ az O vonatkoztatási pontra vett forgatónyomatékok egyenlősége

2.)



$$\sum_i F_i \delta \underline{r}_i = 0$$

$$P\delta_p - Q\,\delta q = 0$$

$$(2P - Q)\,\delta q = 0$$

$$P = \frac{Q}{2}$$

geometriai kényszer: $\delta p = 2 \cdot \delta q$

– kényszerfeltételek osztályozása

új jelölés !!!

eddig $t, \underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots \underline{r}_n$

most: $x_0, (x_1, x_2, x_3)(x_4\ x_5\ x_6) \dots x_{3n}$

$$f_k(x_0, x_1 \dots x_{3n}) = 0 \qquad k = 1, \dots r$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial f_k}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_{3n}} dx_{3n} = 0$$

– diff. alak

$$a_{k1} dx_1 + a_{k2} dx_2 + \dots + a_{k3n} dx_{3n} + a_{k0}\, dt = 0$$

Németh Viktória

az osztályozás:

1. nem integrálható ANHOLONOM kényszer

a_{k0}, a_{ki} tetszőleges, ~~nincs~~ olyan f_k, hogy $a_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$

a.) ANHOLONOM REONOM - időfüggő

b.) ANHOLONOM SZKLERONOM - időfüggetlen $a_{k0} = 0$ $\frac{\partial a_{ki}}{\partial t} = 0$

2. integrálható HOLONOM kényszer

$$a_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

a.) HOLONOM REONOM - $a_{k0} = \frac{\partial f_k}{\partial t}$

b.) HOLONOM SZKLERONOM

$$a_{k0} = 0 \quad a_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \partial_t a_{ki} = 0$$

- D'Alembert-elv

virtuális munka továbbfejlesztése dinamikára és pontrendszerekre

$$\sum F_i \delta r_i = 0$$

$$\boxed{\sum (F_i - \dot{p}_i)\, \delta \underline{r}_i = 0}$$

- egyetlen egyenlet a teljes pontrendszerre

feltevés: kényszererők teljes virtuális munkája 0.

⇓

CSAK HOLONOM - SZKLERONOM ESETBEN IGAZ!

• N II → d'A

$p = mv$

$\dot{p} = m\dot{v} = ma$

$$\dot{p}_i = F_i + F_i' \quad / \delta r_i$$

$$0 = (F_i - \dot{p}_i + F_i')\, \delta \underline{r}_i$$

$$0 = \underbrace{\sum_i (F_i - \dot{p}_i)\, \delta r_i}_{\text{d'Alembert} \checkmark} + \underbrace{\sum_i F'_i\, \delta r_i}_{0 \text{ - feltevés miatt}}$$

• d'A → N II.

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m\ddot{\underline{r}}_i)\, \delta \underline{r}_i = 0$$

m tömegpont

ha nem lenne kényszer, akkor $\forall\, \delta r_i$ flen, csak akkor 0, ha a szorzója 0.

ha van kényszer: $a_{ki} = \nabla_i f_k$

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ki}\, \delta r_i = 0 \qquad k = 1, 2, \dots r$$

$(3n - r)$ db flen koordináta

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ Lagrange-multiplikátor

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla_i f_k - m\ddot{r}_i \right) \delta r_i = 0$$

r db λ_i-t választunk, hogy eltűnjön az együttható:

Németh Viktória

$$\underline{F}_i - m\ddot{\underline{r}}_i + \sum \lambda_k \nabla_i f_k = 0 \qquad k = \underbrace{3n-r \dots 3n}_{r\ db}$$

3n-r db független koordináta

$$\sum_{i=1}^{3n-r} \left(F_i - m\ddot{\underline{r}}_i + \sum \lambda_k \nabla_i f_k\right) \delta x_i = 0$$ – minden együttható 0 kell legyen

$$\boxed{F_i - m\ddot{\underline{r}}_i + \sum_k \lambda_k \nabla_i f_k = 0}$$ – Lagrange-féle I. fajú mozg. egy.

↓ ebből a kényszererő:

$$F_i' = \sum_k \underbrace{\lambda_k \nabla_i f_k}_{a_{ki}}$$

kényszererők virtuális munkája 0 $\quad \nabla f_k \perp \delta r_i$

$$\sum_i \underline{F}_i' \delta \underline{r}_i = \sum_{k,i} \lambda_k \nabla_i f_k \delta \underline{r}_i = 0$$

Kényszererők valódi munkája – időfüggő kényszer esetén

$$\sum_i F_i' d\underline{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_{ki} \cdot d\underline{r}_i$$

igazi elmozdulás

$$\underbrace{\sum_i (a_{ki}\, d\underline{r}_i)}_{-a_{k0}\cdot dt} + a_{k0}\, dt = 0$$ └ időfüggő

$$W^{\text{kényszer}}_{\text{valódi}} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k (-a_{k0}\, dt) = -\sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_{k0}\, dt$$

példák füzet: 31 ; 32

Németh Viktória

IX. Általánosított Hamilton-elv, variációszámítás, legrövidebb út/idő példák

mechanikai mozgástörvények olyan általános megfogalmazása, amely egyenértékű a Newton-félével, de túlmutat a mechanikán.
Ez a mozgástörvények univerzális alakja $\Rightarrow$ Hamilton elv (1834-35)

„A rendszer mechanikai állapota két rögzített t_1 és t_2 időpont között úgy változik az időben, hogy a Lagrange-függvények a (t_1, t_2) intervallumra vett idő szerinti integrálja szélsőérték"

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \text{extr.}$$

jelent: a kényszerek által megengedett lehetséges (elgondolt) állapotváltozásokhoz képest a valóságban bekövetkező mozgásállapot-változás a fenti integrált szélsőértékké teszi.

a Lagrange-függvény a t időn kívül a q_k általános koordinátáknak és a $\dot{q}_k$ általános sebességeknek a függvénye, ezért ezt az integrált hatásintegrálnak nevezzük

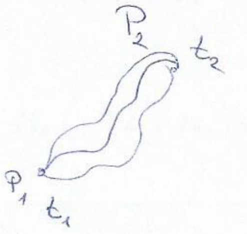
$\hookrightarrow$ integrál: energia $\cdot$ idő = hatás dimenziójú

$\downarrow$

megkereshető a mozgást leíró $q_k(t)$ függvények

$q_k(t) = ?$, hogy S extr.

mi tünteti ki a valódi pályát a többi kényszerek által megadott pályától?



pályát variáljuk a következő szabályok szerint:

1.) virtuális elmozdulásokat vizsgálunk

$$\delta r_i = r_i'(t) - r_i(t)$$

2.) csak olyat, ami t szerint deriválható

$$\delta r_i - t \text{ diffható}$$

3.) időt nem variáljuk $\to \delta t = 0$

4.) azonos időkhöz feleltetünk meg variált pontokat

5.) kezdő- és a végpontot nem variáljuk $\delta r_i(t_1, t_2) = 0$

6.) a variációk mindig teljesítik a kényszereket δr_i virt. elm.

variálás és idő szerinti deriválás felcserélhető ; $\frac{d}{dt}(\delta x_i) = \frac{dx_i'}{dt} - \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i' - \dot{x}_i = \delta \dot{x}_i(t)$

Németh Viktória

def.: van egy ϕ ami függ az összes koord., seb. és idő:

$\phi(x_1 \dots x_{3n}, \dot{x}_1 \dots \dot{x}_{3n}, t)$ – ez leírja a mechanikai rendszert

variálom:

$$\delta\phi = \phi(x_1+\delta x_1 \dots x_{3n}+\delta x_{3n}, \dot{x}_{3n}+\delta\dot{x}_{3n}, t) - \phi(x_1, \dots x_{3n}, \dot{x}_1 \dots \dot{x}_{3n}, t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3n} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\phi}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i \right)$$

A d'Alembert elvből levezethető általános Hamilton-elv:

$$\sum_i^{3n} (\underbrace{F_i}_{①} - \underbrace{m\ddot{x}_i}_{②})\delta x_i = 0$$

δx_i virtuális elmozdulás = valódi pályához képesti variáció

$$\boxed{\underbrace{\ddot{x}_i\delta x_i}_{②} = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i) - \dot{x}_i\delta\dot{x}_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i) - \frac{1}{2}\delta\dot{x}_i^2}$$

$$\underbrace{\sum_i F_i\delta x_i}_{①} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i\delta\dot{x}_i^2}_{②} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\dot{x}_i\delta x_i\right)$$

① szabad erők virtuális munkája $\Downarrow$ $\delta' A$

② $\delta\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{x}_i^2$ – pontrendszer teljes kinetikus energiájának variációja $\Downarrow$ δT

$$\delta' A + \delta T = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\dot{x}_i\delta x_i \quad \Big/ \int_{t_1}^{t_2}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta' A + \delta T)\,dt = \sum_i m_i\dot{x}_i\delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

mert végpontokban nem variálunk

$\delta x_i(t_1) = 0$

$\delta x_i(t_2) = 0$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}(\delta' A + \delta T)\,dt = 0}$$

általánosított Hamilton-elv

- $\delta' A$ nem igazi variáció, ezt csak így definiáltuk. Ez a szabad erők virt. munkája
- ez egy integrál-elv
- idő kiemelt
- megfogalmazás koordináta-rendszer független
- kiválasztja a valódi mozgást / pályát
- tömegpontok helyett erőterekre és térelméletekre is lehet alkalmazni

Németh Viktória

Variációszámítás alapfeladata

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F\left(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots \dot{x}_n(t), t\right) dt = \text{extr.}$$

$F(\dots)$ adott – ez a funkcionál

$$\left.\begin{aligned} x_i(t_1) &= x_{i1} \\ x_i(t_2) &= x_{i2} \end{aligned}\right\} \text{adott}$$

„n adott egy I mennyiség egy rögzített (t_1, t_2) intervallumon fv-ektől függő fv (funkcionál) integrálja, ami legyen extr."

variációs feladat Euler-egyenlete:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0}$$

– ez n db közönséges másodrendű diffegy.

levezetés

$\delta I = 0$ – akkor lesz szélsőérték

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta F \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg(\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i} \Bigg) dt$$

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i \, dt + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i \right) dt}_{\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right]_{t_1}^{t_2} = 0}$$

mert a határokon nem variálunk

ha δx_i-k teljesen függetlenek, akkor együtthatóiknak minden pontban és időben el kell tűnniük

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0}$$

Variációs probléma Euler egyenlete.

példák: 38, 39 + matmód. 71

Németh Viktória

Euler – Lagrange egyenletek viszonya a szokásos mechanikai rendszerekkel

(1) kényszer nélküli konzervatív rendszer esetén

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \quad \text{Hamilton elv}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2 - V(x_i)$$

variációs probléma spec. Lagrange fv-el

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1 \dots 3n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j \Big/ \frac{d}{dt} \qquad -\frac{\partial V}{\partial x_j} = -F_j$$

$$m_j \ddot{x}_j$$

$$\boxed{m_j \ddot{x}_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j} = -F_j}$$

Newton II-vel ekvivalens

(2) legyenek kényszerek

$$a_{k1}\delta x_1 + \dots + a_{k3n}\delta x_{3n} = 0 \qquad k = 1 \dots r$$

$$S = \int \delta L\,dt + \sum_k \lambda_k \int \sum_i a_{ki}\,\delta x_i\,dt$$

a variációhoz

Lagrange multiplikátorokkal a kényszerek munkáját hozzáadjuk a kezdeti d'Alembert elvhez (feltételes kényszert hozzáadjuk)

δx_i-k választhatók függetlennek

ami nem az azt λ_k-val annak választjuk

a variációs probléma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_k a_{ki}$$

– feltételes szélsőérték

λ_k – tetszőleges Lagrange-multiplikátorok

beírjuk $L = T + V$-t és

Lagrange-féle I fajú mozg. egyenletet kapjuk

Németh Viktória

X. Hamilton-elv, Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek, általános koordináták

• Hamilton-elv

konzervatív erőtér $V(x_1, \dots x_{3n}, t)$

szabad erők $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ $\longrightarrow$ $\delta' A$ igazi variáció lesz

$$\delta' A = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i = -\delta V$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V)\, dt = 0$$

– mivel se az időt se a végpontokat nem variáljuk, ezért a variálás kiemelhető.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\, dt = 0$$

$\boxed{L = T - V}$ – Lagrange-fv.

kinetikus potenciális

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0}$$

– Ez a Hamilton elv = legkisebb hatás elve

konzervatív rendszer két adott pont közötti Lagrange fv. integrálja szélsőérték – tetszőleges kényszerfeltételek mellett

• Általános koordináták, Lagrange-féle másodfajú mozg. egy.

holonom kényszer esetén a kényszerfeltételek kiküszöbölhetők megfelelő koordináták választásával

n db tömegpont

3n db koordináta

r db holonom kényszer

└ csak a koord. fv-eként felírható $f_k(r_1, r_2, \dots r_n) = 0$

szabadsági fok: $f = 3n - r$

$q_1, q_2, \dots q_f$ – ami tökéletesen jellemzi a rendszert és rájuk további kényszerek már nem vonatkoznak

⇓

általános koordináták

általános sebességet is kell definiálni → $\dot q_1, \dot q_2 \dots \dot q_f$

$$x_i = x_i(q_1, \dots q_f, t) \qquad i = 1 \dots 3n$$

$$\dot x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot q_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_f}\dot q_f + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

ennek segítségével a teljes Lagrange-fv:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - V(x_1 \dots x_{3n})$$

kifejezhetjük az x_i, $\dot{x}_i$ -et q_i-vel, és kapunk egy Lagrange-fv-t, ami

$$L = (q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, t)$$

egymástól független koordinátáktól függ

Hamilton elv:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$$ tudjuk, hogy $L(q_1, \dots \dot{q}_1 \dots t)$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$ - variációs probléma

Euler-Lagrange egyenlete

⇓

ez Lagrange II. (Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek)

levezetés:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = \text{extremum}$$

$q_i\ (t_1, t_2)$ rögzített

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i}_{} \right) dt$$

se az időt, se a határokat nem variáljuk, ezért bevihető

mindkettő egymástól függetlenül variálható

$$\frac{d}{dt} \delta q_i = \delta \dot{q}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt + \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}$$

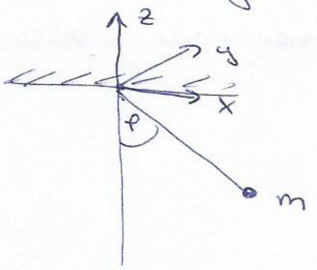
mert $\delta q_i (t_1, t_2) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Németh Viktória

példák

- matematikai inga



z, x síkban mozog → 3 koord. lenne, de vannak kényszerek:

$y = 0$

kötél

ált. koord: φ

$x = l\sin\varphi \qquad \dot{x} = l\cos\varphi$

$z = -l\cos\varphi \qquad \dot{z} = l\sin\varphi \qquad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = l^2\dot{\varphi}^2$

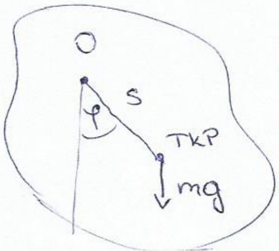
$$L = \frac{1}{2}mv^2 + mgl\cos\varphi = \underline{\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi} \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$

$$\underline{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0} \quad - \text{ mozg. egy.}$$

-



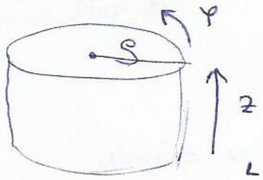
$$T = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 \qquad V = -mgs\cos\varphi$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 + mgs\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgs\sin\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta\ddot{\varphi}$$

$$\underline{\Theta\ddot{\varphi} = -mgs\sin\varphi}$$

-



$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\varrho}^2 + (\varrho\cdot\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$\llcorner \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} = m\ddot{\varrho} \qquad \frac{\partial L}{\partial \varrho} = m\varrho\cdot\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \varrho}$$

$$m\ddot{\varrho} - m\varrho\cdot\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial V}{\partial \varrho}$$

$$\llcorner \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi} \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \qquad m\varrho^2\ddot{\varphi} + 2m\dot{\varrho}\dot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\llcorner \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Németh Viktória

Nem konzervatív rendszer Lagrange-féle másodfajú mozg. egy.

vissza kell menni a d'Alembert elvben addig, ahol még nem tételezzük fel, hogy konzervatív az erőtér

általánosított Hamilton elv:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta' A)\, dt = 0$$

szabad erők virtuális munkája

$$\delta' A = \sum_{i=1}^{3n} F_i \delta x_i = \left(\sum_{i=1}^{3n} F_i \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{f} Q_i \delta q_i$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$ általánosított erők

$$\delta T = \sum \left(\underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} \delta \dot q_k}_{\text{átírhatjuk a szokott módon}} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k \right)$$

$$\delta' A = \sum Q_k \cdot \delta q_k$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} + Q_k \right) \delta q_k \, dt = 0$$

holonom kényszer → δq_k független

együtthatóknak el kell tűnniük

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k}$$ nem konzervatív r. II. fajú ~~m~~ egyenlet

? Spec. ha $L(q_i, \dot q_i)$; $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ explicit nem függ az időtől

→ találunk időben megmaradó fv-t — Beltrami azonosság

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \ddot q_i \right) =$$

$$= \sum \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \ddot q_i \right) = \frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(L - \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i - L \right) = \text{állandó}$$ — ha $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ holonom, szkleronom

konzervatív szkleronóm

$$L = T(\dot q_i) - V(q_i)$$ ← $\dot q_i$ homogén kvadratikus fv-e

$$T = a_{11} \dot q_1^2 + \ldots + a_{ff} \dot q_f^2$$

Euler-tétel: $\sum \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} \dot q_i = 2T$

Németh Viktória

XI Hamilton függvény, kanonikus egyenletek

f szabadsági fok $\rightarrow$ ennyi db 2. rendű közönséges Lagrange-egyenlet (diffegy)

f db változó $\rightarrow$ $2f$ db kezdőfeltétel $\rightarrow$ $2f$ db független adat

$\longleftarrow$

$2f$ db független változós elsőrendű diffegy!

$L(q_i, \dot{q}_i, t)$ – ez adott

matematikailag q_i és $\dot{q}_i$ nem független, mert egyik a másiknak idŏderiváltja

bevezetjük: általános impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{– } q_i\text{-hez kanonikusan konjugált impulzus}$$

Így a mechanikai rendszer fizikai állapotát a q_i, p_i – $2f$ számú független változóval adjuk meg.

Ebben a tárgyalásban a rendszert nem a Lagrange-fv-el, hanem a **Hamilton függvénnyel** jellemezzük.

$$H = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

$$\boxed{H = \underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i}_{} - L = 2T - T + V = T + V}$$

teljes mechanikai energia

Euler-tétel:

$$\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T$$

$$H(p_k, q_k, t) \qquad \dot{q}_k = \dot{q}_k(p_k, q_k, t)$$

Legendre-transzformáció:

$\dot{q}_i$-t kifejezzük q_i, p_i-vel $\Rightarrow$

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow H(p_i, q_i, t)$$

p_k és q_k időfüggési egyenletei:

$$dH = \sum_{k=1}^{f}\left(\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_k}dq_k} + \frac{\partial H}{\partial p_k}dp_k\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

definíció szerint a dH képezhető úgy is, hogy:

$$dH = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum\left(dp_i \dot{q}_i + p_i d\dot{q}_i\right) - \sum_i\left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\dot{p}_i}dq_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i}d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

E-L miatt $\dot{p}_i$ def. miatt p_i

$$= \sum\left(\dot{q}_i dp_i - \boxed{\dot{p}_i dq_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

a kettő azonos kell, hogy legyen $\rightarrow$ akkor, ha az elhatók megegyeznek:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}}$$

(Hamilton féle)
Kanonikus egyenletek
$H(q_i, p_i, t)$
$2f$ db elsőrendű diffegy.

Összehasonlítva a Lagrange-egyenleteket használó módszerrel, megállapíthatjuk, hogy egyikben a L-fv másikban a H fv jellemzi a rendszert

L: ált. koord, ált. sebesség és idő $\quad$ H: ált koord., kanonikus imp., idő fv-e.

L: 2 rendű diffegy $\quad$ H: első rendű diffegy

f db $\quad$ $2f$ db

Kanonikus egyenlet származtatható variációs elvből

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) \right) dt$$ — ez a variációs egyenlet

δ beírható az integrálba, mert határokon nem variálunk

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt$$

parc. int.

$$\frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\sum \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) + \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) \right] dt$$

határon eltűnik

függetlenek, ha együtthatóik 0-k:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}}$$

Németh Viktória

XII Kanonikus transzformációk (oszcillátor pl.), ciklikus koordináták, Hamilton-Jacobi egyenlet (alapgondolata)

Kanonikus egyenletek: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Ha van olyan koordináta, ami nem szerepel a Hamilton fv-ben $\rightarrow$ az ciklikus koordináta

q_k ciklikus $\rightarrow$ $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$

$p_k = \text{állandó}$! – mozgásegyenletek egy integrálja

Ha az összes koord. ciklikus:

$$H = H(p_i, t)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \alpha_i = \text{áll}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \underbrace{\omega_i(t)}_{\text{adott fv.}}$$

$$q_i(t) = \int_{t_0}^{t} \omega_i(t)\,dt + \beta_i \qquad \alpha_i, \beta_i \quad 2f \text{ db integrációs állandó}$$

$\rightarrow$ teljesen integrálható modellek

Kanonikus transzformáció

$$\overset{\text{régi}}{q_i, p_i} \rightarrow \overset{\text{új}}{\underbrace{Q_i, P_i}_{\text{kanonikus egyenletnek tesznek eleget}}}$$

találjuk meg a ciklikus koord.-t!

$$q_i = q_i(Q_1, \dots Q_F, P_1 \dots P_F, t)$$
$$p_i = p_i(Q_1 \dots Q_F, P_1 \dots P_F, t)$$

mindkettő q_i, p_i Q_i, P_i ugyanabból a variációs elvből származtatható

$$\delta \int \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)\right) dt = 0$$

$$\delta \int \left(\sum P_i \dot{Q}_i - \bar{H}(P_i, Q_i, t)\right) dt = 0$$

a kettő ugyanarra a fizikára vezet, ha csak egy teljes idõderiválttal tér el $\frac{dW}{dt}$

$$\delta \int_1^2 \frac{dW}{dt} = \delta W(Q_i, q_i, t_2) - \delta W(Q_i, q_i, t_1) = 0$$

mert $\delta q_i, \delta Q_i = 0$ a határokon

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \bar{H}(P_i, Q_i, t) + \frac{d}{dt} W(q_i, Q_i, t)$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\right)$$

Németh Klaudia

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial W}{\partial q_i}\right)\dot q_i = \sum_i \left(P_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i}\right)\dot Q_i + H - \bar H + \frac{\partial W}{\partial t}$$

$\dot q_i$ és $\dot Q_i$ teljesen függetlenek → együtthatók nullák

$$\boxed{\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i} \\ P_i &= -\frac{\partial W}{\partial Q_i} \\ \bar H &= H + \frac{\partial W}{\partial t} \end{aligned}}$$

Kanonikus transzformáció

$W(q, Q, t)$ – kanonikus transzformáció alkotó fv-e.

azt, hogy mitől függ W → mi döntjük el

4 féle lehet:

$W_1(q, Q, t)$ $\quad W_2(q_k, P_k, t) \to p_k = \frac{\partial W_2}{\partial q_k}$ $\quad Q_k = \frac{\partial W_2}{\partial P_k}$

$W_3(p_k, Q_k, t)$ $\quad W_4(p_k, P_k, t)$

példák – $Q_k = Q_k(q_k, t) = f_k(q_i, t)$

$$W_2 = \sum f_k(q_i, t) \cdot P_k = W_2(q_i, P_i, t)$$

$$Q_k = \frac{\partial W_2}{\partial P_k} = f_k(q_1, \ldots q_s, t)$$

ponttranszformáció

$$p_k = \frac{\partial W_2}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \cdot P_i$$

– $H(q, p, t)$ $\quad W = \sum q_i Q_i$ $\quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i$

$$P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i} = -q_i$$

felcseréli a koord. szerepét az impulzussal

Harmonikus oszcillátor

$H = \sum_i p_i \dot q_i - L = T + V$ $\quad T = \sum a_{ki} \dot q_i \dot q_i$ kvadratikus, homogén fv.

kvadratikus alak

$H = 2T - (T - V) = T + V$ $\quad T = \frac{1}{2} m \dot q^2 = \frac{p^2}{2m}$ $\quad p = m\dot q$

Harm. oszc. Hamilton egyenlete:

$$\boxed{H(p, q) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2}$$

– ebből látszik, hogy harm. oszcillátor

kanonikus egyenlet:

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \Big/ \frac{d}{dt} \quad \to \quad \boxed{m\ddot q = -\frac{\partial V}{\partial q}} \quad \text{mozg. egyenlet}$$

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

Németh Viktória

Kanonikus transzformációja:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$ ciklikus a q? nem, mert szerepel a H-ban

$\rightarrow (P, Q)$

A': ez jó lesz $\rightarrow$ $W(q, Q, t) = W(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cdot \mathrm{ctg}\, Q$ ennek a megsejtése nem triviális

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = m\omega q\, \mathrm{ctg}\, Q$$

$$P = -\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} q^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 Q}$$

ez leírja a transzformációt

$\downarrow$

DE: Hamilton-fv felírásához

$p(Q,P)$ és $q(Q,P)$ kell.

$$q = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \sqrt{P} \sin Q$$

$$p = \sqrt{2m\omega} \sqrt{P} \cos Q$$

$$\bar{H}(P,Q) = H(q(P,Q), p(P,Q)) =$$

$$= \frac{\cancel{2m}\omega}{\cancel{2m}} P \cos^2 Q + \frac{\cancel{m}\omega^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{m\omega}} P \cdot \sin^2 Q = P\omega$$

jó a transzformáció, mert nincs a $\bar{H}$-ban Q

Q ciklikus koordináta

$\downarrow$

megoldható az egyenlet

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \qquad P = P_0 = \text{áll}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \rightarrow Q = \omega t + Q_0$$

ennek segítségével az eredeti is megkapható

$$p = \sqrt{2m\omega} \cdot \sqrt{P_0} \cdot \cos(\omega t + Q_0)$$

$Q_0 \to \omega t_0 \rightarrow \cos(\omega(t + t_0))$

$$q = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \cdot \sqrt{P_0} \cdot \sin(\omega(t + t_0))$$

$p = m\dot{q}$ ✓

XII ③

Németh Viktória

Hamilton - Jacobi egyenlet

mikor lehetünk biztosak, hogy minden koord ciklikus?

Ha $\bar{H} = 0$

$W \to S$ - ez a speciális fv fogja ezt tudni

$$\bar{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H(q_k, p_k, t) = 0$$

W_2 alkotó fv jó lesz $S(q_k, P_k, t)$ $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$ $Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}$

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right) = 0}$$ - Hamilton-Jacobi egyenlet

- ha ezt megoldjuk (kitaláljuk S-t) akkor teljesen integrálható alakra jutunk
- 1 db parc. diffegy S-re (ami a hatás) / eddig 2f db elsőrendű diffegy volt /
- Jacobi: felismerte, hogy a megoldás az S hatásfv., akkor triviálisan megoldható a probléma, mert $\forall$ koord. ciklikus

H-J teljes megoldás

$S = (q_1 \dots q_f, \alpha_1 \dots \alpha_f, t)$ → P_k - f db integrációs állandó

$\dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = 0$ $P_k = \alpha_k =$ konstans

+1 additív állandó → $S \to S + C$ is ugyanolyan jó mo.

$P_k = \frac{\partial S(q_k, \alpha_k)}{\partial q_k}$ => megadjuk a kezdeti feltételeket $q_k(0)$ $p_k(0)$ → $\alpha_k = \dots$

$Q_k = \beta_k = \frac{\partial S(q_k, \alpha_k, t)}{\partial \alpha_k} =$ áll $\dot{Q}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = 0$

→ $q_k(\alpha_k, \beta_k, t)$ fv. → formálisan így kapható meg a H-J egyenlet

S $\left.\begin{matrix}\alpha_1 \dots \alpha_f \\ \beta_1 \dots \beta_f\end{matrix}\right\}$ 2f db állandó

S alkotó fv fizikai jelentése (ez tényleg a hatás?):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS(q_k, \alpha_k, t)}{dt} = \sum \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum p_k \dot{q}_k - H = L$$

→ p_k (kanonikus transz.-ból)

$S = \int L \, dt$

hatásintegrál a Hamilton-elvben

Ha H explicit időfüggetlen:

H-J: $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$ → $S = S_0 - E \cdot t$

$H\left(q_1 \dots q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) = E$

konzervatív, szkleronom esetben: $H = E =$ áll

Németh Viktória

XIII Szimmetriák és megmaradási tételek kapcsolata

- A mechanikában az energiára (E), az impulzusra (P) és az impulzusmomentumra (N) vonatkozó megmaradási tétel szerepelt. E tételek a mozgásegyenletek következményei, ezért a belőlük nyert információk összhangban vannak a mozgástörvényekkel.
- A megmaradási tételek zárt fizikai rendszerekre vonatkoznak.

→ Az említett 3 megmaradási tétel szoros kapcsolatban van a tér és az idő szimmetriával. Ehhez a Hamilton-féle tárgyalásmódszert vesszük alapul.

Hamilton fv: $H(\underline{r}_i, \underline{p}_i, t)$ $\quad \dot{\underline{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}_i} \quad \dot{\underline{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \underline{r}_i}$

E-L: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} \quad \underline{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}$

Szimmetria: dinamikai rendszert elmozdítunk úgy, hogy a Lagrange-fv nem változik

Noether-tétel: minden folytonos szimmetriához tartozik egy megmaradó mennyiség

1., Koordináta-rendszer eltolása és az impulzus megmaradása

tér: eltolás invariancia – homogén

$\underline{r}_i' = \underline{r}_i + \underline{a} \qquad \underline{a}$: áll vektor

$\dot{\underline{r}}_i' = \dot{\underline{r}}_i \longrightarrow$ ezért a H egyenlet helyett jobb az E-L.

$\delta \underline{r}_i = \underline{a}$

$\delta L = 0 \longrightarrow$ rendszer invariáns az eltolásra

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i}\delta \underline{r}_i = \underline{a}\cdot\sum_i \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} = 0$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} = 0$$

$$\Big\downarrow \text{E-L}$$

$$\sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} = 0 = \frac{d}{dt}\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} = \frac{d}{dt}\sum \underline{p}_i = \frac{d}{dt}\underline{P} = 0$$

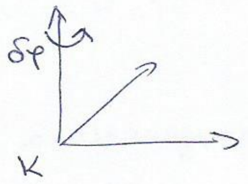
a relatív helyzetek nem változnak

$$\underline{P} = \sum_i \underline{p}_i = \text{áll}$$

Zárt rendszer esetén az impulzus megmaradás a tér homogenitásának a következménye.

homogén – tetszőlegesen eltoljuk $\underline{a}$-val, a rendszert ugyanúgy tudjuk leírni $\qquad \sum_i \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} = \sum_i\left(-\frac{\partial V}{\partial \underline{r}_i}\right) = \sum F_i = 0$

2.) A koordináta-rendszer elforgatása és az impulzus momentum megmaradása



$x, y, z \rightarrow r, z, \varphi$

hengerkoord.

z tengely körüli forgatás:

$z' = z$

$r' = r$

$\varphi' = \varphi + \delta\varphi \qquad \dot{\varphi}' = \dot{\varphi}$

$H = T + V$

a T független φ-től

$$\underbrace{0 = \delta H}_{\text{ekkor lesz a rendszer invariáns a forgatásra}} = \delta H(r, z, \varphi, \dot{r}, \dot{z}, \dot{\varphi}, t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial \varphi}\delta\varphi$$

$$\dot{p}_{\varphi_i} = \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right) = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i}$$

kanonikus egyenlet szerint

$$\sum_i \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

$$\sum_i \dot{p}_{\varphi_i} = \frac{d}{dt}\sum_i p_{\varphi_i} = 0 \longrightarrow \sum_i p_{\varphi_i} = \sum_i N_{z_i} = \text{áll}$$

$$\Rightarrow \underline{N} = \text{áll}$$

$\underline{N}_i = \underline{r}_i \times \underline{p}_i$

Tér izotrópiája (tetszőleges forgatás miatti) következménye az impulzusmomentum megmaradása.

3.) Az idő eltolása és az energia megmaradása

nincs kitüntetett időpont $\rightarrow$ idő homogén $\qquad t' = t + t_0$

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial t}\delta t = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = 0} \longrightarrow \text{zárt rendszer nem függ az időtől}$$

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial H}{\partial t}}}_{\emptyset}\delta t + \sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial r_i}\dot{r}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) =$$

$$= \sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial r_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial r_i}\right) = 0$$

időeltolás $\rightarrow$ $H = \text{áll}$

konzervatív szkleronóm esetben $H = T + V = E_{mech.}$

$\Downarrow$

$E = \text{áll}.$

Németh Viktória

XIV Rezgések, csillapított rezgések

• csillapított rezgőmozgás:

$F_{s} \sim v^{k}$ — v lineáris / v^2 négyzetes

súrlódás kis sebességnél lineáris

Kezdőfeltétel és a rezgés is 1 dimenziós

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} \longrightarrow$$ ez Lagrange-fv-el nem írható fel.

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ — másodrendű, lin., hom., diffegy.

$$2\alpha = \frac{k}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

$x = e^{\lambda t}$ - alakban keressük a megoldást

$$(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2)\, e^{\lambda t} = 0$$

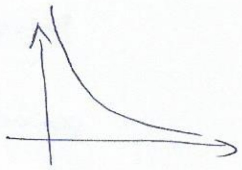
$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

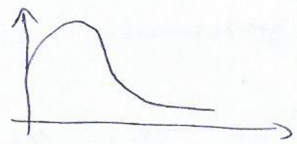
ált. mo: $x = A e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} + B e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t}$

3 eset lehetséges:

1.) $\alpha > \omega_0$ erős csillapítás $\lambda_1, \lambda_2 < 0$



2, $\alpha = \omega_0$ $x = e^{-\alpha t}(a_1 + a_2 t)$



→ nem periodikus mozgás

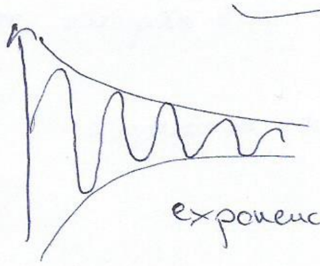
3.) $\alpha < \omega_0$ gyenge csillapítás $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$x = e^{-\alpha t}\underbrace{\left(a_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\, t} + a_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\, t}\right)}$$

harmonikus rezgést mutat

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0$$



exponenciálisan lecsengő, oszcilláló mozgás

Németh Viktória

- harmonikus rezgőmozgás :

$\underline{F} = -D\underline{r}$ mozgásegyenlet: $m\ddot{\underline{r}} = -D\underline{r}$ $\omega^2 = \frac{D}{m}$

$\ddot{\underline{r}} + \omega^2 r = 0$ – másodrendű, állandó e-hatós, homogén diffegy.

ált mo :

$\underline{r} = \underline{A}\cos\omega t + \underline{B}\sin\omega t$

kezdeti feltételekből $\underline{r}(0) = \underline{r}_0$ $\underline{v}(0) = \dot{\underline{r}}(0) = \underline{v}_0$

$\underline{A} = \underline{r}_0$

$\dot{\underline{r}} = -\omega A \sin\omega t + \omega B\cos\omega t \rightarrow \dot{r}(0) = v_0 = \omega B \rightarrow B = \frac{v_0}{\omega}$

KF-et kielégítő ált mo ;

$\underline{r} = \underline{r}_0 \cos\omega t + \frac{\underline{v}_0}{\omega}\sin\omega t$ – leírja a tömegpont helyét az idő függvényében

ㄴ ha $\underline{v}_0 \parallel \underline{r}_0$

$x = a\cos(\omega t - \alpha)$ $x_0 = a\cos\alpha$; $\frac{v_0}{\omega} = a\sin\alpha$

max amplitudó : $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$

fázisszög: $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{x_0\omega}$

periódusidő: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

frekvencia : $\nu = \frac{1}{T}$

$\omega = 2\pi\nu$

ㄴ ha $\underline{v}_0 \nparallel \underline{r}_0$ és : $r_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}$

ált. mo : $x = x_0\cos\omega t + \frac{v_{0x}}{\omega}\sin\omega t = a\cos(\omega t - \alpha)$

$y = \frac{v_{0y}}{\omega}\sin\omega t$

$z = 0$

$\Rightarrow$ ellipszis paraméteres egyenlete.

→ Harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont energiája:

$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2$

$E = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t - \alpha) + \frac{1}{2}m\omega^2a^2\cos^2(\omega t - \alpha) = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$

Németh Viktória

XV Kényszerrezgések, rezonancia

$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F(t)$ $\qquad F = F_0 \cos \Omega t$

↑ erő időben periodikus

$\ddot{x} + 2d\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \Omega t$ $\qquad f = \frac{F_0}{m}$ $\qquad V = -xF(x)$

másodrendű, inhomogén, lin. diffegy.

inhomogén partikuláris mo-t keressük

⇓

$$x_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$
$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$
$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

→ visszahelyettesítem a diffegy-be

$\omega = \Omega$ – ez ki fog jönni

$$\Big[\underbrace{(\omega_0^2 - \omega^2) A + 2d\omega B}_{f}\Big] \cos \omega t + \Big[\underbrace{(\omega_0^2 - \Omega^2) B - 2d\omega A}_{0}\Big] \sin \omega t = f \cos(\Omega t)$$

csak akkor, ha ugyan az az időfüggés mindkét oldalon $\Rightarrow \omega = \Omega$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) B - 2d\omega A = 0$$

$$B = \frac{2d\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} A$$

$$A = f \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}$$

partikuláris mo: $\cos(\Omega t + \delta)$ – ilyen alakra kéne hozni

$$x_p = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}} \left(\underbrace{\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{\;}}}_{\text{„}\cos \delta\text{"}} \cos \Omega t + \underbrace{\frac{2d\Omega}{\sqrt{\;}}}_{\text{„}\sin \delta\text{"}} \sin \Omega t \right)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2d\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

teljes mo:

sokmindentől függ

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}} \cos(\Omega t - \delta) + a e^{-dt} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - d^2} + \tilde{\delta}\right)$$

Kezdőfeltételek határozzák meg a-t és $\tilde{\delta}$-t

- amplitúdó – arányos a gerjesztő amplitúdóval és a $\sqrt{\;}$ kifejezéssel
  max: $\Omega^2 = \omega_0^2 - 2d^2$
- rezonancia f nő: $\Omega \to \omega_0$

- Energia disszipáció $E_{disz} = -d\dot{x}^2$

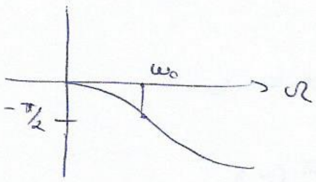
Nekoreh
kiszólia

- $\alpha \to 0$ amplitudó $\to \infty$
- δ gdzis bésik

$\Omega \ll \omega_0$ ϕ

$\Omega = \omega_0$ $-\pi/2$

$\Omega > \omega_0$ $-\pi$



Németh Viktória

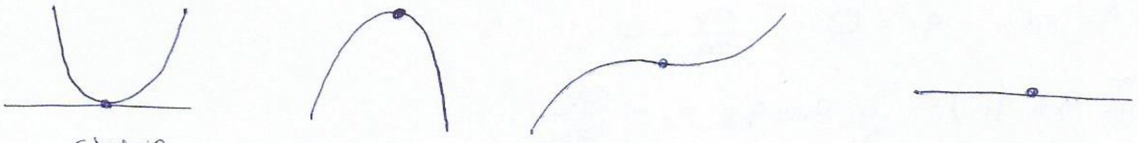
XVI Kis rezgések elmélete, példa

egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések ; 1 szabadsági fok

ha konzervatív rendszer lenne : $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$

mozg. egy: $m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$

egyensúly feltétele: $\dot{q} = 0 \quad \ddot{q} = 0$



stabil   instabil   nyeregpont   indifferens

$\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$ - egyensúly feltétele

$$V(q) - V(q_0) \simeq \left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0}(q-q_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right|_{q_0}(q-q_0)^2 = \frac{D}{2}\underbrace{(q-q_0)}_{x}^2$$

sorbafejtve V''

$$T = \frac{1}{2} a(q)\dot{q}^2 \simeq \frac{1}{2} a(q_0)\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$L = m\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{D}{2}x^2$$ — csak stabil egyensúly esetén

$$m\ddot{x} + Dx = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega^2 = \frac{D}{m}$$ ← harmonikus rezgőmozgás

3 dimenzióban:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\underline{r}}^2 - \frac{1}{2} D\underline{r}^2$$ — állandó együtthatós, másodrendű, homogén, lin. diffegy

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$

$$\ddot{\underline{r}} + \omega^2 \underline{r} = 0$$

$$\underline{r} = \underline{A}e^{\lambda t} \qquad \dot{\underline{r}} \sim \lambda\underline{A} \qquad \ddot{\underline{r}} \sim \lambda^2\underline{A}$$

$$\lambda^2 \underline{A} e^{\lambda t} + \omega^2 \underline{A} e^{\lambda t} = 0 \qquad \underline{A} \neq 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$$\underline{r} = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$ — ennek a valós része a fizikai mo.

$v_0, r_0 \rightarrow$ kezdőfeltétel

$$\underline{r} = \underline{A}\cos\omega t + \underline{B}\sin\omega t \qquad \underline{A} = r_0 \quad \underline{B} = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\underline{r} = \tilde{\underline{A}}\cos(\omega t + \delta)$$ — így felírás lehet ez is

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 \tilde{A}^2$$

Németh Viktória

Kis rezgések egyensúly körül, több szabadsági fokú rendszerekben

konzervatív, szkleronom rendszer

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \qquad a_{ik} = a_{ik}(q_j)$$

$$V = V(q_1 \dots q_f)$$

E-L: $$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

egyensúlyi helyzet esetén nincs sebesség és gyorsulás:

$$\dot{q}_i = 0 \qquad \ddot{q}_i = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i a_{ik} \dot{q}_i \right) = \sum_k a_{ik} \ddot{q}_k = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$q_i = q_{i0}$ egyensúlyi koordináták milyen mozgást végez a rendszer?

$$\tilde{q}_i = q_i - q_{i0}$$

egyensúlyi hely körül sorbafejtve:

$$V = V_0 + \sum_i \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{q_{i0}}}_{0} \underbrace{(q_i - q_{i0})}_{\tilde{q}_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} \underbrace{(q_i - q_{i0})}_{\tilde{q}_i} \underbrace{(q_k - q_{k0})}_{\tilde{q}_k}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k} b_{ik} q_i q_k$$

hullámot nem kíírva:

$$T(a_{ik}(q_0)) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q_0) \cdot \dot{q}_i \dot{q}_k$$

egyensúlyi helyzettől való eltérésre utalnak

$$V = 0 + 0 + \frac{1}{2} \sum_{i,k} b_{ik} q_i q_k$$

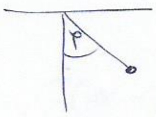
E-L: $$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1 \dots f$$

$$\sum_k \left(a_{ik} \ddot{q}_k + b_{ik} q_k \right) = 0$$

csatolt rezgő rendszer lesz

Németh Viktória

pl.:
súlyos rúd – matematikai inga



$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

mozg. egy.: $ml^2\ddot{\varphi} = -gl\sin\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$

ebből meghatározhatunk egyensúlyi helyzeteket: $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$

potenciál másodrendig kifejtve:

$$V = -mgl\cos\varphi\big|_{\varphi=\varphi_0} = -mgl\cos\varphi_0 + mgl\sin\varphi\big|_{\varphi_0}(\varphi-\varphi_0) + \frac{1}{2}ml\cos\varphi\big|_{\varphi_0}(\varphi-\varphi_0)^2$$

$\varphi_0 = 0 \to V = \dots + \frac{mgl}{2}\varphi^2 \longrightarrow b_{ik} = mgl$

$\varphi_0 = \pi \to \dots - \frac{mgl}{2}(\varphi-\pi)^2 \longrightarrow b_{ik}\big|_{\varphi=\pi} = -mgl$

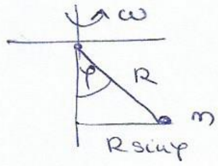
$\varphi = 0$ $\quad ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \longleftarrow$ stabil egyensúlyi helyzet

$\varphi = \pi$ $\quad ml^2(\varphi-\pi)^{\cdot\cdot} - mgl(\varphi-\pi) = 0$

$$(\varphi-\pi)^{\cdot\cdot} = \frac{g}{l}(\varphi-\pi) \qquad (\varphi-\pi) = a e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t}$$

explicit elszáll a mo. – egyre gyorsabban távolodunk az egyensúlyi helytől
instabil

pl.: forgatott inga



$v_\perp = R\sin\varphi\,\omega \qquad \omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$

$$\frac{\partial(\sin^2\varphi)}{\partial\varphi} = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\varphi + mgR\cos\varphi$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(\sin^2\varphi) = 2\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi$$

$$mR^2\ddot{\varphi} = mR^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - mgR\sin\varphi = \frac{\partial V}{\partial\varphi} =$$

$$= \underbrace{\omega^2 mR^2\sin\varphi}_{0}\ \vee\ \underbrace{\left(\cos\varphi - \frac{g}{R\omega^2}\right)}_{0} \overset{?}{=} 0$$

$\sin\varphi = 0 \to \varphi = 0$, $\to \varphi = \pi$ $\qquad \cos\varphi = \frac{g}{R\omega^2} \qquad \omega^2 \geq \frac{g}{R}$ gyorsabb, mint az ő sajátfrekije

melyik stabil/instabil?

$\varphi = \varphi_0$ $\quad V(\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0} = mR^2\omega^2\left(\cos^2\varphi\big|_{\varphi_0} - \sin^2\varphi\big|_{\varphi_0}\right)\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2} - \frac{1}{2}mgR\cos\varphi(\varphi-\varphi_0)^2$

$\varphi = 0$ $\quad mR^2\ddot{\varphi} = (mR^2\omega^2 - mgR)\varphi$

$\ddot{\varphi} = \left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right)\varphi \qquad \omega^2 < \frac{g}{R} \quad < 0 \to$ stabil egyensúlyi helyzet

$\omega^2 > \frac{g}{R} \quad > 0 \to$ instabil

Németh
Viktória

$\varphi = \pi$ instabil, mert:

$$mR^2(\ddot{\varphi - \varphi_0}) = (mgR + mR^2\omega^2)(\varphi - \varphi_0)$$

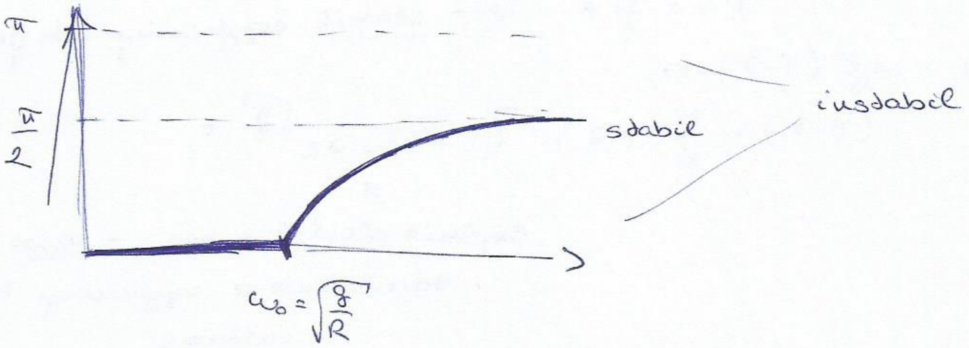
$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi - \varphi_0})^2 + mR^2\omega^2\underbrace{(\cos^2\varphi_0 - \sin^2\varphi_0)}_{2\cos^2\varphi_0 - 1}\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2} - mgR\cos\varphi\,\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2}$$

$$\cos^2\varphi_0 = \frac{g^2}{R^2\omega^4} \qquad \sin^2\varphi_0 = 1 - \frac{g^2}{R^2\omega^4}$$

$$\cancel{mR^2}(\ddot{\varphi - \varphi_0}) = \cancel{mR^2}\omega^2\left(2\frac{g^2}{R^2\omega^2} - \omega^2\right)(\varphi - \varphi_0) - \cancel{mR}\frac{g^2}{R^2\omega^2}(\varphi - \varphi_0)$$

$$(\ddot{\varphi - \varphi_0}) = \left(\frac{g^2}{R^2\omega^2} - \omega^2\right)(\varphi - \varphi_0)$$

stabil: $\frac{g^2}{R^2\omega^2} - \omega^2 < 0 \qquad \omega^4 > \frac{g^2}{R^2} \qquad \omega^2 > \frac{g}{R}$



Németh Viktória

XVII Bolygómozgás, mozgásegyenlet levezetése, megoldása

Bolygó tömege m, Nap tömege M. Mindkettő pontszerű, és $M \gg m$ ezért a Napot nyugvónak tételezzük fel, és a koordináta-rendszerünk origójába képzeljük.

Az Általános tömegvonzás törvénye szerint a Nap a bolygóra gravitációs erőt fejt ki:

$$\underline{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$ – centrális, ezért a bolygó pályája síkban van

bolygó területi sebessége állandó $= \lambda$

$\lambda = r^2 \dot{\varphi}$ → a mozgást célszerű síkbeli polárkoordinátákkal leírni

a mozgásegyenletek:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\gamma \frac{mM}{r^2}$$

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0$$ → ebből kapjuk, hogy $r^2\dot{\varphi} = \text{állandó}$

ebből megkapjuk, ~~az~~ a pálya $r = r(\varphi)$ egyenletét:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} \implies \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{\lambda}{r^2}$$! $u = \frac{1}{r}$

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \lambda u^2 = -\lambda \frac{du}{d\varphi}$$

$$\ddot{r} = -\lambda^2 u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2}$$ → ezeket behelyettesítve a fenti mozgásegyenletbe:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M}{\lambda^2}$$ mivel $\frac{\gamma M}{\lambda^2}$ állandó, annak $\frac{\partial}{\partial \varphi}$-je 0.

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(u - \frac{\gamma M}{\lambda^2}\right) + u - \frac{\gamma M}{\lambda^2} = 0$$ [ilyen egyenlet van a harmonikus rezgőmozgásnál is]

a megoldás: $$u - \frac{\gamma M}{\lambda^2} = A \cos(\varphi + \alpha)$$

ebből $$r = \frac{\lambda^2}{\gamma M} \frac{1}{1 + \frac{A\lambda^2}{\gamma M}\cos(\varphi + \alpha)}$$! $p = \frac{\lambda^2}{\gamma M}$

! $\varepsilon = \frac{A\lambda^2}{\gamma M}$

Ha $\varepsilon < 1$ ellipszis

$\varepsilon = 1$ parabola

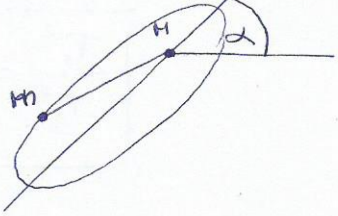
$\varepsilon > 1$ hiperbola

$\varepsilon = 0$ → $r = \text{áll}$ → kör

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi + \alpha)}}$$ kúpszelet egyenlete síkbeli polárkoordinátákban.

Németh Viktória

XVIII Kepler törvények származtatása, Nap-Föld rendszer, mint 2-test probléma



~~Az~~ $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi+\alpha)}$ $\quad p = \dfrac{\lambda^2}{\gamma M}$ $\quad \varepsilon = \dfrac{A\lambda^2}{\gamma M}$

↓

kifejezhető a tömegpont energiájával is.

Legyen $\alpha = 0$, tehát a polártengely iránya megegyezik a nagytengely irányával.

Mivel a gravitációs erő konzervatív, a mozgási és a potenciális energia összege állandó, $T+V=\text{áll.}$ a pálya bármely pontjában.

Számoljuk ki az energiát ott, ahol egyszerű → Naphoz legközelebbi pontban

↓

$\varphi = 0$

$$r_0 = \frac{p}{1+\varepsilon} \qquad v_0^2 = r_0^2\dot{\varphi}_0^2 = r_0^2\frac{\lambda^2}{r_0^4} = \frac{\lambda^2(1+\varepsilon)^2}{p^2}$$

$$E = T+V = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}m\lambda^2\frac{(1+\varepsilon)^2}{p^2} - \gamma Mm\frac{1+\varepsilon}{p} = \frac{m\lambda^2}{2p^2}(\varepsilon^2-1)$$

$$\boxed{E = \frac{m\lambda^2}{2p^2}(\varepsilon^2-1)}$$

a tömegpont energiája szabja meg a pálya alakját:

$E<0$ ellipszis

$E=0$ parabola

$E>0$ hiperbola

körpálya, ha $E = \frac{1}{2}V < 0$

Bolygók esetében $E<0$, tehát ellipszis pályán mozognak, melynek egyik gyújtópontjában a Nap van. Ez Kepler I. törvénye

Könnyen kiszámítható a bolygó T keringési ideje.

A teljes keringési időtartamra integrálva

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\lambda}{2} \xrightarrow{\int} S_T = \frac{\lambda}{2}T$$

ellipszis S_T területe: $S_T = ab\pi$

$$T = \frac{2\pi ab}{\lambda}$$

a-t és b-t a numerikus excentricitással (ε) és a p paraméterrel kifejezhetjük:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \qquad p = \frac{b^2}{a}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{\lambda^2} \qquad b^2 = ap$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2a^3p}{\lambda^2} \qquad p = \frac{\lambda^2}{\gamma M}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$$

Németh Viktória

A bolygók keringési idejeinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a fél nagytengelyek köbei

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}}$$

Kepler III. törvénye

Ha egy tömegpontra olyan erők hatnak, amelyek egy pont felé irányulnak, és ezt a pontot nevezzük origónak, akkor a centrális erők párhuzamosak a tömegpont helyvektorával $\underline{F} \parallel \underline{r}$.

Az ilyen erők hatására létrejövő mozgásokat nevezzük centrális mozgásoknak. Ilyenkor az impulzusnyomaték állandó, tehát a mozgás pályája síkban van.

A területi sebesség is állandó minden centrális mozgásra.

polárkoordinátákat bevezetve (r, φ):

$$F_r = F \qquad F_\varphi = 0$$

a mozgásegyenletek: $ma_r = F$ $\quad \underline{ma_\varphi = 0}$, $\forall$ centrális mozgásra igaz, ezért ebből a centrális mozgásokra általános érvényű tétel adódik.

mivel $a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \implies \underbrace{r^2\dot{\varphi}}_{} = \text{állandó}$$

a mozgás során időegység alatt súrolt terület, azaz a területi sebesség kétszeresével egyenlő

$$t \to r, \varphi$$

$$t + \Delta t \to r + \Delta r, \ \varphi + \Delta\varphi$$

$$\Delta S = \frac{1}{2}(r + \Delta r)\, r \sin\Delta\varphi \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$$

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}}$$

Ez a területi sebesség

Kepler II. törvénye

Németh Viktória

Bolygómozgás, mint 2-test probléma

Vegyük figyelembe a Nap mozgását is.

M - Nap tömege, m - a bolygó tömege.

$\underline{r}_1$ - Nap helyvektora, $\underline{r}_2$ - a bolygóé inerciarendszerben

A közöttük ható gravitációs erő:

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} = \gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{r}$$

mozgásegyenletek:

$$M\ddot{\underline{r}}_1 = \gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

$$m\ddot{\underline{r}}_2 = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

A rendszer tömegközéppontja:

$$\underline{r}_0 = \frac{M\underline{r}_1 + m\underline{r}_2}{M+m}$$

Ez az $m\ddot{\underline{r}}_0 = 0$ képlet szerint egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

A TKP rendszer is inerciarendszer (Galilei-féle relativitási elv szerint)

A mozgást ebben a TKP rendszerben vizsgáljuk, $\underline{r}_0 = 0$, tehát:

$$M\underline{r}_1 + m\underline{r}_2 = 0$$

mivel az erő centrális, ezért:

$$\underline{N} = M(\underline{r}_1 \times \dot{\underline{r}}_1) + m(\underline{r}_2 \times \dot{\underline{r}}_2)$$ impulzusmomentum állandó

$\underline{N}$-t $\underline{r}_1$-gyel majd $\underline{r}_2$-vel szorozva skalárisan:

$\underline{N}\underline{r}_1 = 0$ $\underline{N}\underline{r}_2 = 0$ $\Rightarrow$ tehát $\underline{r}_1$ és $\underline{r}_2$ is merőleges az $\underline{N}$-re.

↓

a Nap és a bolygó egy a tömegközépponton átmenő, állandó $\underline{N}$ normálisú síkban mozog

Vizsgáljuk a bolygónak a Naphoz viszonyított relatív mozgását.

$\mu\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(r)$ alapján: $\mu\ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$ a mozgásegyenlet,

ahol $\mu = \frac{mM}{m+M}$ a redukált tömeg

a relatív mozgás gyorsulása: $\ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{m+M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$

Németh Viktória

síkbeli polárkoordinátákat használva:

$$a_r = -\gamma \frac{m+M}{r^2}$$

$$a_\varphi = 0$$

A korábban kiszámított egyenletekbe az $M \to M+m$ helyettesítést elvégezve kapjuk, hogy:

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi+\alpha)} \qquad p = \frac{\lambda^2}{\gamma(M+m)}$$

$$\varepsilon = \frac{A\lambda^2}{\gamma(M+m)}$$

Kepler I és II továbbra is érvényes, de a III módosításra szorul:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma(M+m)} = \frac{4\pi^2}{\gamma M\left(1+\frac{m}{M}\right)}$$

mivel jobb oldalt a Nap mellett a bolygó tömege is szerepel, így $\frac{T^2}{a^3}$ minden bolygóra más és más.

Meghatározható a Napnak és a bolygónak a TKP-hoz viszonyított mozgását:

$$r_1 = -\frac{m}{M+m} r$$

$$r_2 = \frac{M}{M+m} r$$

tehát mind a Nap mind a bolygó TKP-hoz viszonyítva ellipszis pályán mozog.

mivel $\frac{M}{M+m} \sim 1 \Rightarrow$ a bolygó pályája csak kicsit tér el a relatív mozgás pályájától.

A Nap pályája $\frac{m}{M+m}$ arányban kisebb.

Németh Viktória

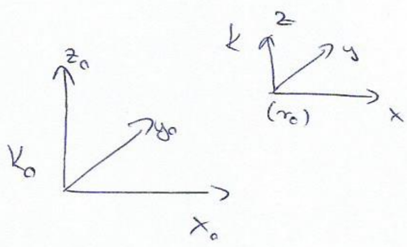
XIX Merev testek, merev testek fix tengely körüli (~~mozgása~~) forgása

Speciális pontrendszer — $r_{ik} = |\underline{r}_i - \underline{r}_k| = áll$

— szabadsági fokok száma 6

általános elmozdulás: transzláció + rotáció

↓ függ a vonatkoztatási rendszertől ↘ független



$K(x,y,z)$ - testhez rögzített

$O(r_0) + K$ szöge K_0-hoz képest

Forgásvektor

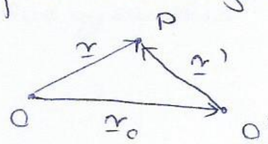
$d\underline{\varphi}$ ∥ forgástengellyel

$|d\underline{\varphi}|$ = elfordulás szöge } + jobbkéz szabály

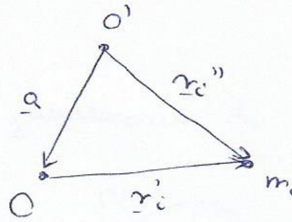
$$d\underline{r} = d\underline{\varphi} \times \underline{r}$$

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

P pont sebessége:



$$\underline{v}_P = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r} \longrightarrow$$



$$\underline{v}_i = \underline{v}_{0'} + \underline{\omega}' \times \underline{r}_i''$$

$$\underline{v}_{0'} = \underline{v}_0 - \underline{\omega} \times \underline{a}$$

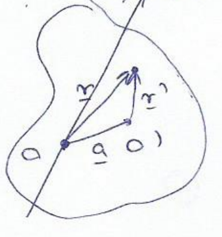
$$\underline{r}_i' = \underline{r}_i'' - \underline{a}$$

$$\underline{v}_0 = \underline{v}_{0'} + \underline{\omega} \times \underline{a}$$

$$\underline{v}_i = \underline{v}_{0'} + \underline{\omega} \times \underline{a} + \underline{\omega} \times \underline{r}_i'' - \underline{\omega} \times \underline{a} = \underline{v}_{0'} + \underline{\omega} \times \underline{r}_i''$$

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}'$$

ugyanez kicsit másképp:



$$\underline{r} = \underline{r}' + \underline{a}$$

O pontból P pont sebessége: $\underline{v} = \underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{r}$

↑ O pont sebessége

$$\underline{v} = \underline{V} + \underline{\omega} \times (\underline{r}' + \underline{a}) = \underbrace{\underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{a}}_{\underline{V}'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

O' pontból P pont sebessége: $\underline{v} = \underline{V}' + \underline{\omega}' \times \underline{r}'$

$$\underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{a} = \underline{V}'$$

$\underline{\omega} = \underline{\omega}'$ a forgás ω-ja független a koordináta rendszertől

ω, $d\varphi$ → pszeudovektor

↳ tértükrözésre önmagába megy át

Németh Viktória

<u>Mozgásegyenletek</u>

1., $L(q_1 \dots q_c, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_c, t) = \dots \rightarrow L\,II$

2., Pontrendszerek általános tételeiből

$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{F} \qquad \text{külső erők eredője}$$

$$\underline{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad \sum_i m_i = M$$

$\dot{\underline{N}} = \underline{M}$ – külső erők forgatónyomatéka

<u>impulzus momentum tétel</u>
- inercia rendszerben
- tömegközéppontra
- pillanatnyi forgástengelyre

$$\underline{v} = \underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

pillanatnyi forgástengely:

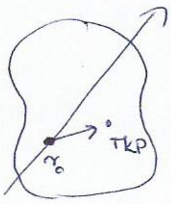
$$O: \ \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{r} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega \perp v \qquad \omega v = 0$$

$\uparrow$ síkmozgások

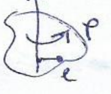
1 - szabadsági fok, forgás



tengely → kényszerek : $M\ddot{\underline{r}}_0 = \underline{F}_{sz} + \underline{F}_k$

$\dot{\underline{N}} = \underline{M}_{sz} + \underline{M}_k$

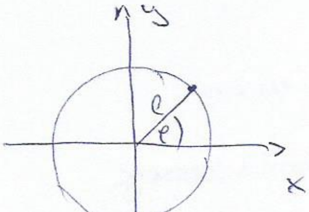
tengelyirányú



$$\dot{N}_z = M_{szt} + \cancel{M_{kt}} \qquad \text{ált koord. } \varphi, \ \dot{\varphi} = \omega$$

$$\dot{N}_z = M_{sz}$$

$$N_z = \sum_i (x_i p_{yi} - y_i p_{xi}) = \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)$$



$x_i = l_i \cos\varphi \qquad y_i = l_i \sin\varphi$

$\dot{x}_i = l_i \sin\varphi\,\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_i = l_i \cos\varphi\,\dot{\varphi}$

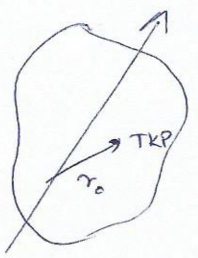
$$N_z = \sum_i m_i \omega (l^2\cos^2\varphi + l^2\sin^2\varphi) = \omega \sum_i m_i l_i^2 = \omega \Theta$$

$\Theta = \sum_i m_i l_i^2$ tehetetlenségi nyomaték

$$\boxed{M_{sz} = \Theta\dot{\omega}} = \Theta\ddot{\varphi}$$

Németh Viktória

XX. Tehetetlenségi nyomaték



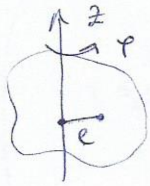
szabad erő

kényszer erő

$$M \ddot{\underline{r}}_0 = \underline{F}_{sz} + \underline{F}_k$$

$$\dot{\underline{N}} = \underline{M}_{sz} + \underline{M}_k$$

Tengely irányú

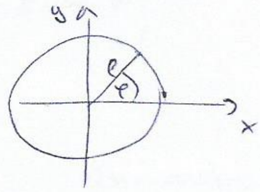


$$\dot{\underline{N}}_z = \underline{M}_{szz} + \cancel{\underline{M}_{kz}} \; \emptyset$$

$$\dot{\underline{N}}_z = \underline{M}_{sz}$$

$$\underline{N}_z = \sum_i (x_i p_{yi} - y_i p_{xi}) = \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)$$

áll. koord. $\varphi, \; \dot{\varphi} = \omega$



$$x_i = l_i \cos\varphi \qquad \dot{x}_i = l_i \sin\varphi \, \dot{\varphi}$$

$$y_i = l_i \sin\varphi \qquad \dot{y}_i = l_i \cos\varphi \, \dot{\varphi}$$

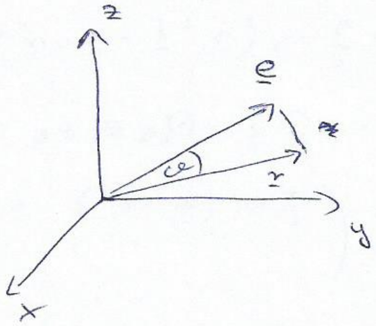
z ⊥ a síkra

$$\underline{N}_z = \sum_i m_i \omega \left(l_i^2 \cos^2\varphi + l_i^2 \sin^2\varphi \right) = \omega \sum_i m_i l_i^2 = \omega \Theta$$

$$\boxed{\Theta = \sum_i m_i l_i^2}$$ tehetetlenségi nyomaték $$\boxed{\underline{M}_{sz} = \Theta \dot{\underline{\omega}}}$$

Tehetetlenségi nyomaték tenzora

$$\Theta_t = \sum_i m_i l_i^2 = \int l^2 \rho \, dV$$



Tetszőleges irányú tengely

$$\underline{e} = (e_x, e_y, e_z)$$

$$\underline{r} = (x, y, z)$$

$$l = r \sin\alpha = |\underline{e} \times \underline{r}|$$

$$\Theta_{te} = \int l^2 \rho \, dV = \int (\underline{e} \times \underline{r})^2 \rho \, dV$$

$$\left[\underline{a}^2 \underline{b}^2 = (\underline{a}\underline{b})^2 + (\underline{a} \times \underline{b})^2 \right]$$

$$(\underline{e} \times \underline{r})^2 = \underline{e}^2 \underline{r}^2 - (\underline{e}\underline{r})^2 = \underline{r}^2 - (\underline{e}\underline{r})^2$$

$$\Theta_e = \int \left(\underline{e}^2 \underline{r}^2 - (\underline{e}\underline{r})^2 \right) \rho \, dV = \int \underline{e} \left(\underline{r}^2 \underline{1} - \underline{r} \circ \underline{r} \right) \underline{e} \, \rho \, dV = \underline{e} \, \underline{\tilde{\Theta}} \, \underline{e}$$

$$\underline{e}(r^2 \cdot \underline{1})\underline{e} \qquad \underline{e}(\underline{r} \circ \underline{r})\underline{e}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\tilde{\Theta}}} = \int \left(\underline{r}^2 \underline{1} - \underline{r} \circ \underline{r} \right) \rho \, dV}$$

x_i, x_k koordináták

Németh Viktória

$$\Theta_{ik} = \int \left(\underline{x}_e^2 \, \underline{1} - x_i x_k \right) \rho \, dV$$

egység

$\underline{r}^2 = \underline{x}_e^2$

$$x_e^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Theta_{ik} = \begin{pmatrix} \int \rho dV (y^2+z^2) & -\int \rho dV (xy) & -\int \rho dV (xz) \\ -\int \rho dV (xy) & \int \rho dV (x^2+z^2) & -\int \rho dV (yz) \\ -\int \rho dV (xz) & -\int \rho dV (yz) & \int \rho dV (x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

ezzel a mtx-el tetszőleges tengelyre felírható a tehetetlenségi nyomaték tenzor.

$$\Theta_{\underline{e}} = \underline{e} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{e} = e_i \Theta_{ik} e_k$$

1., Főátlóban lévő elemek: a benne nem szereplő változó irányába vett tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_{u} = \Theta_{xx} \qquad e^2 = y^2 + z^2$$

2., a nem diagonál elemek: szimmetrikusak, ezek a deviációs nyomatékok → forgástengelyt el a bázja téríteni az eredeti helyzetéből

Ugyanez Σ-val:

$$\underline{\underline{\Theta}} = \sum_i m_i \left(r_i^2 \underline{1} - \underline{r} \circ \underline{r} \right) \qquad \Theta_{ik} = \sum_j m_j \left(x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right)$$

$$\Theta_e = \underline{e} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{e} = \Theta_{ik} e_i e_k$$

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$\perp$

Tehetetlenségi ellipszoid

$\underline{e}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{\Theta_e}}$

$$1 = \sum \Theta_{ik} \frac{\Theta_e}{\sqrt{\Theta_e}} \cdot \frac{\Theta_k}{\sqrt{\Theta_k}}$$

tengelyek: ξ, η, ζ

másodrendű (véges) felület => ellipszoid

3×3-as szimmetrikus mtx

↳ tudjuk diagonalizálni

Ki: normált egységvektorok bázisa $\underline{\underline{\Theta}} \hat{\xi} = \tilde{\Theta}_1 \hat{\xi}$

Németh Viktória

főtengelyi alak:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Theta}_3 \end{pmatrix}$$

3 sajátérték $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2, \tilde{\Theta}_3$

sajátvektorok által kijelölt tengelyek:

sajáttengelyek lesznek $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$

$\underline{\underline{\Theta}}$ sajátvektorai $\longrightarrow$ $\underbrace{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}}$

főtehetetlenségi irányok

ha e körül forgatom a testet akkor az erőmentes, állandó

$(\underline{N} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} \parallel \underline{\omega})$

Speciális esetek

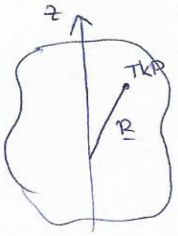
- $\tilde{\Theta}_1 = \tilde{\Theta}_2 \neq \tilde{\Theta}_3 \Rightarrow$ forgási ellipszoid $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ síkban

  szimmetrikus (pörgettyű) $\quad\forall$ tengely főtengely

- $\tilde{\Theta}_1 = \tilde{\Theta}_2 = \tilde{\Theta}_3 \Rightarrow \forall$ tengely főtengely

  ↳ gömb $\quad \Theta = \frac{2}{5} m r^2 \underline{\underline{1}}$

Deviációs nyomaték



rögzített tengely - z irány

mozg. egy: $\underbrace{\ddot{\underline{R}} \sum_i m_i}_{\text{TKP}} = \underbrace{\underline{F}}_{\text{szabad}} + \underbrace{\underline{F}'}_{\text{kényszer}}$

$\underline{F} = 0$

$\underline{M} = 0$

$\dot{\underline{N}} = \underline{M} + \underline{M}'$

↳ kényszer forgatónyomaték

$\underline{\omega} \parallel \underline{z} \qquad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

z komponens: $\dot{N}_z = \Theta_{33}\dot{\omega} = \underbrace{M_z' = 0}$ └ tengelyfeltételezés miatt

$\Downarrow$

$\omega = \text{áll.}$

5 egyenlet a kényszerekre:

$\ddot{R} = -\omega^2 R \qquad \left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y \end{aligned}\right\}$ körmozgás miatt

$F' = \sum_i m_i \ddot{\underline{R}} \qquad F_x = -\omega^2 x_s \sum_i m_i$

$M'_{x,y} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \underline{r}_i \times \underline{v}_i\right)_{x,y}$

Németh Viktória

$$M_x' = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\,(y_i \underset{0}{\dot z_i} - z_i \dot y_i) = -\frac{d}{dt}\sum_i m_i z_i \dot y_i = -\sum_i m_i z_i \ddot y_i =$$

minden tömegpont körpályán mozog

$$\ddot y_i = -\omega^2 y_i$$

$$M_x' = \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i z_i y_i}_{-\Theta_{23}} = -\omega^2 \Theta_{yz}$$

$$M_y' = -\omega^2 \Theta_{xz}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Theta_{1,3}$$

Deviációs nyomatékkal arányos a kényszerforgató nyomaték!

tengely megmarad: $\Theta_{i3} = 0$ → Főtengely irányok (szabad tengelyek)

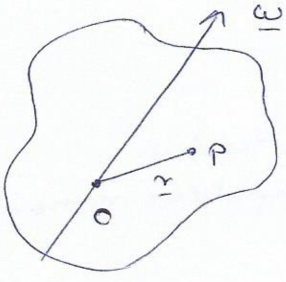
↙

TKP-n átmenő főtengelyek.

Németh Viktória

XXI Merev test energiája, impulzusa, impulzusmomentuma, (mozgásegyenletei)

• mozgási energia



origó sebessége $\underline{v}_0$

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\underline{v}^2 = \underline{v}_0^2 + 2(\underline{\omega} \times \underline{r}) \cdot \underline{v}_0 + (\underline{\omega} \times \underline{r})^2$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \int \frac{1}{2} \varrho v^2 dV = \underbrace{\frac{1}{2} \int \varrho v_0^2 dV}_{\text{transzlációs}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int \varrho (\underline{\omega} \times \underline{r})^2 dV}_{\text{forgási energia}} + \underbrace{\int \underline{v}_0 (\underline{\omega} \times \underline{r}) \varrho dV}_{\text{kölcsönös mozg. energia}}$$

transzlációs: $\frac{1}{2} M v_0^2$, $\int \varrho dV = \sum_i m_i$

kölcsönös mozg. energia: $M \underline{v}_0 (\underline{\omega} \times \underline{r}_S)$

$\underline{r}_S = \int \underline{r} \varrho dV$

$\underline{r}_S = 0$

$\underline{\omega} \times \underline{r} = 0$

$$\int (\underline{\omega} \times \underline{r})^2 \varrho dV = \longrightarrow (\underline{\omega} \times \underline{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\underline{\omega} \underline{r})^2 = \underline{\omega} \underbrace{(r^2 \mathbb{1} - \underline{r} \circ \underline{r})}_{} \underline{\omega}$$

2 féle módon is kijön

$$\underline{\underline{\Theta}} = \int \varrho dV$$

$$\int \varrho dV \left[(\omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \right] =$$

$$= \omega_x^2 \underbrace{\int (z^2 + y^2) \varrho dV}_{\Theta_{11}} + 2 \omega_x \omega_y \underbrace{\int (-xy \varrho dV)}_{\Theta_{12} = \Theta_{21}} \dots$$

$$\underline{E}_{\text{forgási}} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{\underline{\Theta}} \underline{\omega} = \frac{1}{2} \Theta_{ik} \omega_i \omega_k$$

• impulzus

$$\underline{P} = \sum_i m_i \underline{v}_i = \sum_i (\underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}) m_i = M \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}_S M \overset{!}{=} M \underline{v}_S$$

$\underline{r}_S = 0$ $\qquad \underline{v}_S = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}_S$

• impulzus momentum

$$\underline{N} = \sum_i \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i = \sum_i \underline{r}_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i = \int (\underline{r} \times \underline{v}) \varrho dV = \int (\underline{r} \times (\underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r})) \varrho dV =$$

$$= \underbrace{\int (\underline{r} \varrho dV) \times \underline{v}_0}_{\swarrow} + \underbrace{\int \underline{r} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \varrho dV}_{\searrow}$$

Németh Viktória

$\int (\underline{r} \varrho\, dV) \times \underline{v}_0 \rightarrow \boxed{M \cdot \underline{r}_S \times \underline{v}_0 = \underline{N}_{tr}}$ transzlációs impulzus momentum

$\int (\underline{r} \times \underline{\omega} \times \underline{r}) \rightarrow \underline{r} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \underline{\omega} \underline{r}^2 - \underline{r}(\underline{\omega}\underline{r})$

$$\int \varrho\, dV (r^2 \underline{1} - \underline{r} \circ \underline{r}) \underline{\omega}$$

$$\downarrow$$

$\boxed{\underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\omega} = \underline{N}_{rot}}$ rotációs, tisztán forgási impulzus momentum

- merev test mozgásegyenlete

Az impulzus tétel és az impulzusmomentum-tétel kifejező egyenletekből megkapható a merev test mozgását dinamikailag leíró 6 egyenlet.

A merev test mozgásegyenletei:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{P}} &= \sum_{i=1}^{N} F_i^k = F \quad (1) \\ \dot{\underline{N}} &= \sum_{i=1}^{N} r_i \times F_i^k = M \quad (2) \end{aligned}\right] \; K \text{ rendszerben}$$

itt csak külső erők szerepelnek, mert a belső erők (1)-ből a kölcsönhatás törvénye miatt esnek ki, (2)-ből pedig amiatt, mert a merev test pontjai között ható belső erők centrálisak $(r_i - r_j) \parallel F_{ij}$.

Ha a test mozgása nem szabad, akkor az egyenletek jobb oldalán az erőkhöz a kényszererőket is hozzá kell venni.

(1) és (2) inerciarendszerben érvényesek, de könnyen felírhatók a merev testtel együttmozgó K' rendszerben is:

figyelembe véve: $\left(\frac{dV}{dt}\right)_f = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{in} - \underline{\omega} \times \underline{V}$ a forgó rendszerben vett vektor idő deriváltjára vonatkozó képletet.

a mozg. egy:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dt}\right)_f &= \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^k - \underline{\omega} \times \underline{P} \quad (3) \\ \left(\frac{d\underline{N}}{dt}\right)_f &= \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^k - \underline{\omega} \times \underline{N} \quad (4) \end{aligned}\right] \; K'\text{-ben}$$

$\underline{r}_i$ - az i-edik tömegpontnak az in. rendszerbeli helyvektora.

$r_i = r_0 + r_i'$ ezért $\dot{r}_i' = \dot{r}_i - \dot{r}_0$

Némedi Viktória

Az impulzusmomentum-tétel a testtel együtt mozgó O pontra vonatkoztatott nyomaték esetén:

$$\dot{\underline{N}} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} r_i' \times m_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \dot{r}_i' \times m_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^{N} r_i' \times \frac{d}{dt}(m_i \underline{v}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\underline{v}_i - \underline{v}_0) \times m_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^{N} r_i' \times F_i^k = \boxed{-\underline{v}_0 \times \underline{P} + \underline{M}'} \quad (5)$$

ahol $\underline{P} = \sum_i m_i \underline{v}_i$ a merev test eredő impulzusa

$\underline{M}' = \sum_{i=1}^{N} r_i' \times F_i^k$ a külső erők O-ra vonatkoztatott eredő nyomatéka.

K' rendszerben:

$$\left(\frac{d\underline{N}}{dt}\right)_g = -\underline{v}_0 \times \underline{P} - \underline{\omega} \times \underline{N} + \underline{M}' \quad (6)$$

– O a merev test tetszőleges pontja

Impulzusmomentum-tétel TKP-ra:

$$\left(\frac{d\underline{N}}{dt}\right)_g = -\underline{\omega} \times \underline{N} + \underline{M}' \quad (7)$$

Ha az impulzus- és erőnyomaték ~~et~~ a test tetszőleges pontjára vonatkoztatjuk, akkor a (2) és a (4) helyett az (5) és (6) egyenleteket kell használnunk.

Ha a vonatkoztatási pont a TKP, vagy a testnek egy inerciar.-ben nyugalomban levő rögzített pontja, akkor az imp.mom.-tételt a merev testtel együttmozgó K' rendszerben a (7) képlet fejezi ki.

Németh Viktória

XXII Euler-egyenletek, Euler-szögek, pörgettyűk

• Euler-egyenletek

Az Egy pontjában rögzített merev testnek 3 szabadsági foka van.
↓
a vonatkoztatási rendszer O kezdőpontja

a 3 szabadsági foknak megfelelő 3 egyenletet, az imp. mom. tétel adja:

$$\dot{\underline{N}} = \underline{M}$$

M – a testre ható külső erők O-ra vonatkoztatott nyomatékát jelenti

kényszererők nyomatéka nem fordul elő, mert azok O-t rögzítik, így benne ébrednek, ami O-ra vonatkoztatva nulla.

A testtel együtt mozgó K' koordináta-rendszert választva célszerűbb felírni a mozgásegyenleteket, mert ebben Θ_{ij} időtől független

$$\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \frac{d'\underline{N}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N} = \underline{M}}$$

Euler-egyenletek
↓
együtt mozgó r-ben a merev test mozg. egy.

Ha K' a főtehetetlenségi irányokba mutat, még egyszerűbbek az egyenletek:

$$N_i = \Theta_i \omega_i \qquad N_{x'} = \Theta_1 \omega_1 \quad N_{y'} = \Theta_2 \omega_2 \quad N_{z'} = \Theta_3 \omega_3$$

ekkor az Euler-egyenletek:

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + \underbrace{(\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega_1 \omega_2}_{} &= M_3 \end{aligned}}$$

Forgó testre ható centrifugális erő forgatónyomatéka

$$(\underline{\omega} \times \underline{N}) = (\underline{\omega} \times \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega})$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_1 \omega_1 \\ \Theta_2 \omega_2 \\ \Theta_3 \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \dots \\ \omega_2 \Theta_3 \omega_3 - \omega_3 \Theta_2 \omega_2 = \omega_2 \omega_3 (\Theta_3 - \Theta_2) \dots \\ \dots \end{matrix}$$

Centrifugális erő levezetése:

$$\underline{F}_i^{(c)} = m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) \times \underline{\omega} = -m_i \underline{\omega} (\underline{\omega} \underline{r}_i) + m_i \underline{r}_i \omega^2$$

$$\underline{M}_i^{(c)} = \underline{r}_i \times \underline{F}_i = -m_i (\underline{r}_i \times \underline{\omega})(\underline{\omega} \underline{r}_i)$$

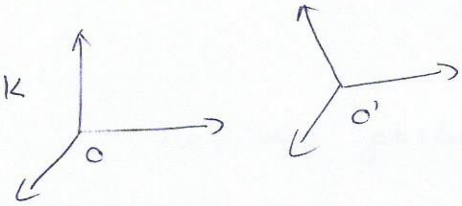
deviációs nyomatékok a főtengely transzformációban eltűnnek

$$\sum_i m_i x_i y_i = 0$$

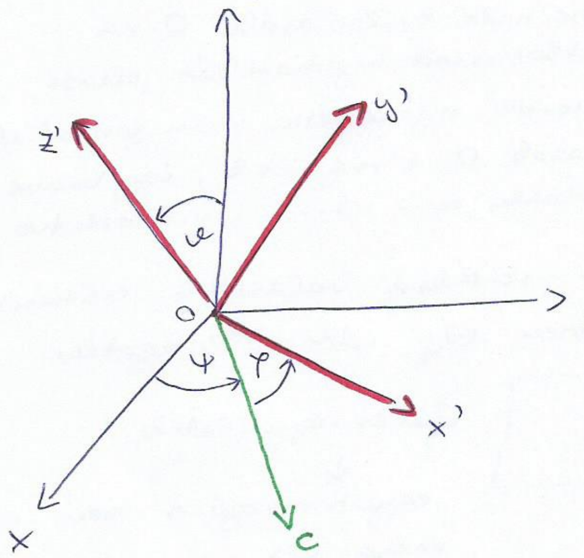
$$M_{x'}^{(c)} = -\sum_i m_i \underbrace{(y^2 - z^2)}_{(y^2 + x^2) - (z^2 + x^2)} \omega_2 \omega_3 = -(\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2 \omega_3$$

Németh Viktória

• Euler-szögek



legyen O = O'



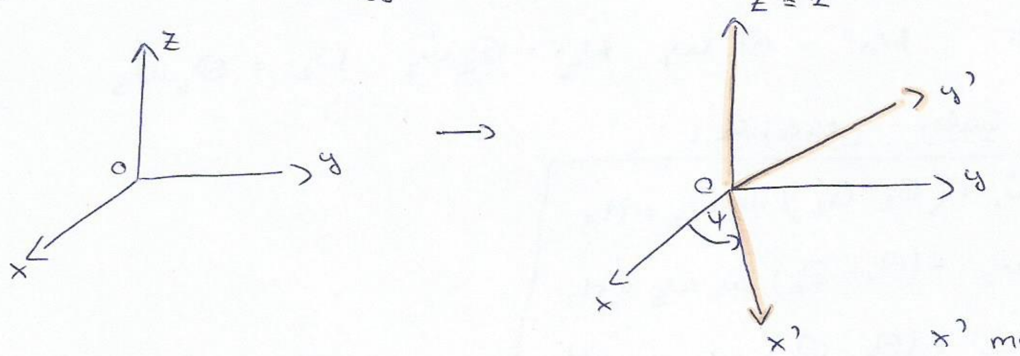
ϑ $(z, z')\measuredangle$ $[0, \pi]$

ψ $(x, OC)\measuredangle$ $[0, 2\pi]$

φ $(x', OC)\measuredangle$ $[0, 2\pi]$

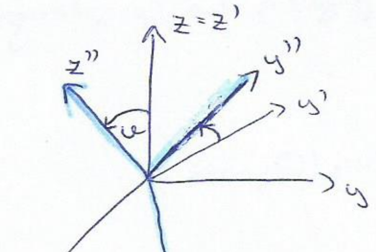
OC → az xy és x'y' sík metszésvonala

1.) z körül ψ szöggel

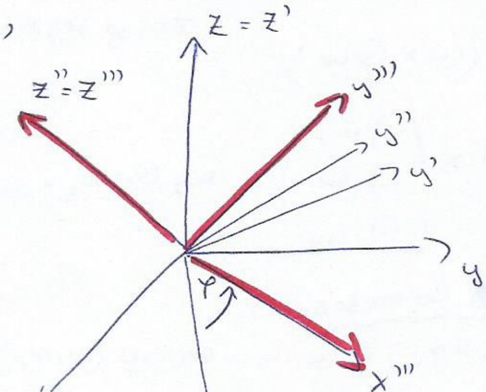


x' most az OC.

2.) x' körül ϑ-val



3.)



$$\{\vartheta(t), \psi(t), \varphi(t)\} \Leftrightarrow \underline{\omega}(t)$$

Németh Viktória

Szögsebességek:

$\dot{\vartheta}$ OC irányba mutat, x', y' síkban kell leírni

$$\dot{\vartheta}_{x'} = \dot{\vartheta}\cos\varphi$$
$$\dot{\vartheta}_{y'} = -\dot{\vartheta}\sin\varphi$$
$$\dot{\vartheta}_{z'} = 0$$

$\dot{\psi}$

$$\dot{\psi}_{z'} = \dot{\psi}\cos\vartheta$$
$$\dot{\psi}_{x'} = \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$\dot{\psi}_{y'} = \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi$$

$\dot{\varphi}$ z' irányú, csak ilyen irányú komponense van

$$\dot{\varphi}_{x'} = 0$$
$$\dot{\varphi}_{y'} = 0$$
$$\dot{\varphi}_{z'} = \dot{\varphi}$$

a test szögsebességét általában leíró egyenletek:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{x'} = \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi \\ \omega_2 &= \omega_{y'} = -\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \omega_3 &= \omega_{z'} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta \end{aligned}}$$

merev test 6 db koord: $r_0, \vartheta, \varphi, \psi$

Erőmentes szimmetrikus pörgettyű Euler-egyenletekkel

$M = 0$ $\quad\Theta_1 = \Theta_2\quad$ Θ_3 a szimmetria tengely

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_1)\,\omega_2\omega_3 &= 0 \\ \Theta_1\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_1\omega_3 &= 0 \\ \Theta_3\dot{\omega}_3 + 0 &= 0 \end{aligned}\right] \to \omega_3 = \text{áll}$$

$$\alpha = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1}\,\omega_3 = \text{áll}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\alpha\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \alpha\omega_1 \end{aligned}\right] \to \ddot{\omega}_1 = -\alpha^2\omega_1$$

$$\omega_1 = a\cos(\alpha t + \delta)$$
$$\omega_2 = a\sin(\alpha t + \delta)$$

a tengelyre merőleges komponens kör

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = a^2 + \underbrace{\omega_3^2}_{\text{a tengely körüli pörgetés szögsebessége}} = \text{áll}$$

pillanatnyi forgástengely ($\underline{\omega}$)

kúrkúpot ír le a szimmetriatengely körül

$$\omega = \alpha$$

Németh Viktória

pl.: Föld:

$$\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_3} \text{ - Föld lapultsága } \approx \frac{1}{300}$$

$\omega_3 = 1$ nap $\quad T_E \approx 300$ nap

Chandler-féle szélességingadozás (nutáció) ~ 433 nap

a lokális tengely és a geometriai tengely közötti szög $\vartheta = 0{,}2''$

Föld felszínén 6m-t jelent

Erőmentes szimmetrikus pörgettyű mozgása Euler-egyenletekkel, a szögsebesség inerciar.-hez képest

K inerciar. → Euler-szögek időfüggése?

$\dot{\underline{N}} = 0 \qquad \underline{N} = \text{áll} \qquad N_z \neq 0 \qquad N_x$ és $N_y = 0$] választunk ilyen koord. r.-t.

$N_z = N$

akkor:

$$N_{x'} = N \sin\vartheta \sin\varphi = \Theta_1 \omega_1 = \Theta_1 (\dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi + \cancel{\dot\vartheta \cos\varphi})$$

$$N_{y'} = N \sin\vartheta \cos\varphi = \Theta_1 \omega_2 = \Theta_2 (\dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi - \cancel{\dot\vartheta \sin\varphi})$$

$$N_{z'} = N \cos\vartheta = \Theta_3 \omega_3 = \Theta_3 (\dot\psi \cos\vartheta + \dot\varphi) \Rightarrow \text{áll}$$

ezért

Euler egyenletek megoldásából tudjuk, hogy $\omega_3 = \text{áll} \qquad \vartheta = \vartheta_0 = \text{áll}$

$$N_{x'} \Rightarrow \dot\psi = \frac{N}{\Theta_1} = \text{áll} \quad \to \quad \psi = \frac{N}{\Theta_1} t + \psi_0$$

$$\Theta_1 \omega_1 = \underbrace{\Theta_1 \dot\psi}\, \sin\vartheta \sin\varphi = \underbrace{N}\, \sin\vartheta \sin\varphi$$

$$N = \Theta_1 \dot\psi$$

$$\omega_1 = a\cos(\alpha t + \delta) = \frac{N}{\Theta_1} \sin\vartheta_0 \sin\varphi \qquad a = \frac{N}{\Theta_1}\sin\vartheta_0$$

$$\omega_2 = a \sin(\alpha t + \delta) = \frac{N}{\Theta_1} \sin\vartheta \cos\varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\alpha t + \delta) = -\alpha t + \varphi_0$$ → a test a szimmetriat. körül milyen szögsebességgel forog

Németh Viktória

$\vartheta = \vartheta_0$ áll szög

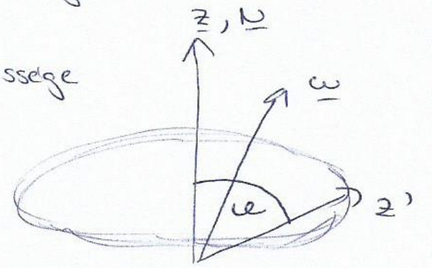
$\rightarrow$ $\underline{N}$ és z' által bezárt szög

$\dot{\psi} = \frac{N}{\Theta_1}$ z tengely körüli forgás = N körüli forgás

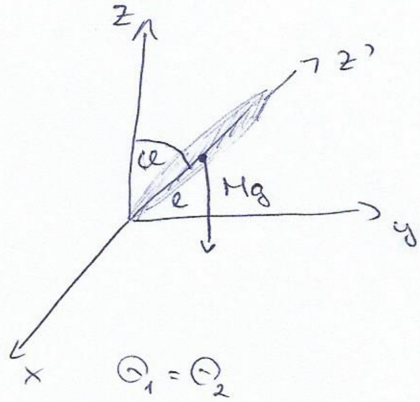
$\swarrow$

precesszió szögsebessége

$\omega_3 = \frac{\Theta_1}{\Theta_3} = \alpha\,\Theta_1$ $\rightarrow$ szimmetriatengely körüli forgás sebessége



Súlyos (alsó pontban rögzített), szimmetrikus pörgettyű



$\underline{g} \parallel \underline{z}$ $\rightarrow$ nyomaték

Euler-egyenlet $\underline{M} \neq 0$ esetén bonyolult diffegy.

megmaradási tételek a Lagrange-formalizmuson keresztül:

$\Theta_1 = \Theta_2$

$$L = \frac{\Theta_1}{2}\omega_1^2 + \frac{\Theta_2}{\omega}\omega_2^2 + \frac{\Theta_3}{2}\omega_3^2 - V(\vartheta, \psi, \varphi) =$$

$$= \frac{\Theta_1}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\vartheta)^2 + \frac{\Theta_3}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)^2 - Mgl\cos\vartheta$$

ált. koord: ϑ, ψ, φ $\quad$ φ, ψ ciklikus koordináta

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta_3 \underbrace{(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)}_{\omega_3 = \text{áll!}} = N_{z'} = \text{áll!}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = (\Theta_1 \sin^2\vartheta + \Theta_3 \cos^2\vartheta)\dot{\psi} + \Theta_3 \cos\vartheta\,\dot{\varphi} = N_z = \text{áll}$$

$\hookrightarrow$ $\omega_3 - \dot{\varphi}\cos\vartheta$

holonom szkleronom esetben 3 megmaradó mennyiség

$N_{z'}$, N_z és az Energia $H = T + V$

$$\frac{\Theta_1}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\vartheta) + \frac{\Theta_3}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)^2 + Mgl\cos\vartheta = \text{áll}$$

$$\dot{\psi} = \frac{N_z - \Theta_3\cos\vartheta\,\omega_3}{\Theta_1 \sin^2\vartheta}$$

ϑ_1 és ϑ_2 között ingadozik a szimmetriat.

$\hookrightarrow$ nutáció

$\omega_3^2 > 0$ gyors pörgettyű

$\vartheta_1 = \vartheta_2$ $\rightarrow$ reguláris precesszió

$\omega_3^2 \rightarrow \frac{2MglE}{\Theta_3^2}$