Elméleti Mechanika (B) vizsga beugrókérdések

Összeírta: Bora Zsófia

2019-20/I

1. **Mi a_r, a radiális gyorsulás síkbeli polár-koordinátarendszerben?**
   $a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2$
2. **Mi a_ϕ, a tangenciális gyorsulás síkbeli polár-koordinátarendszerben?**
   $a_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}$
3. **Mi a tehetetlen tömeg?**
   $\frac{|\underline{F}|}{\underline{a}} = m_t$. A testre jellemző mennyiség, a ”gyorsíthatóságát” írja le, az erőtől független.
4. **Milyen koordinátarendszereket köt össze a Galilei-transzformáció?**
   Egymáshoz képest egyenletes v_0 sebességgel mozgó rendszereket, K és K'-t, ahol mindkét rendszerben érvényesek a Newton-axiómák, és mindkét rendszer inerciarendszer.
   $r = r' + v_0 \cdot t$
   $v = v' + v_0$, valamint
   $t = t'$ és $a = a'$
5. **Munka definíciója.**
   Ha m tömegű anyagi pontra állandó F erő hat és azt elmozdítja az erővel párhuzamos egyenes mentén s szakasszal, akkor az erő $W = F \cdot s$ munkát végez.
   Ha az erő nem állandó, vagy a szakasz nem egyenes, akkor az A és B pontok közötti szakaszon végzett munka :
   $$W = \int_{r_A}^{r_B} \underline{F} d\underline{r}$$
   .
6. **Mi a munkatétel ?**
   A munka integrálalakja átírható:
   $W = \int_{r_A}^{r_B} \underline{F} d\underline{r} = \int_{r_A}^{r_B} m\ddot{r} d\underline{r} = \int_{r_A}^{r_B} m\ddot{r}\dot{r} dt$, amiről némi nézegetés után felismerhetjük, hogy $= \int_{r_A}^{r_B} \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{r}^2)dt$, ami a Newton-Leibniz tétel alapján $= \frac{1}{2}m\dot{r_B}^2 - \frac{1}{2}m\dot{r_A}^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$.
   Tehát
   $$W = \Delta(\frac{1}{2}mv^2) = \Delta E_{kinetikus}$$
   , azaz az erő által végzett munka a test kinetikus energiájának megváltozásával egyenlő.

7. **Konzervatív erőtérben az erő a potenciállal kifejezve.**

   Konzervatív erőtérben a potenciál : $\underline{V}_{(\underline{r})}$ vektortérrel írható le. A potenciál ekvipotenciális vonalak (vagy felületek) mentén állandó, a gradiens ezekre merőleges.

   $$\underline{F} = -grad(\underline{V}_{(\underline{r})})$$

   , tehát az erő a potenciálcsökkenés irányába mutat.

8. **Milyen megmaradó fizikai mennyiségek vannak centrális erőtérben?**

   Impulzus: $\dot{\underline{p}} = 0$
   Impulzusmomentum: $\dot{\underline{N}} = 0$
   Mechanikai energiák: $\Delta E_{mech.} = 0$

9. **Milyen megmaradási törvényből következik a területi sebesség tétele?**

   Perdületmegmaradásból.

10. **Forgó és nem forgó rendszerben egy vektor idő szerinti differenciálhányadosának a kapcsolata.**

    $$\frac{dA}{dt} = \frac{d'A}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{A}$$

    , ahol $\underline{\text{A}}$ egy vektor, K és K' koordinátarendszerekben, amelyek közül K' forog.
    Például: $\underline{v} = \underline{v}' + \underline{\omega} \times \underline{r}$

11. **Coriolis erő képlete.**

    Coriolis-erő merőleges az $\underline{\omega}$ szögsebességvektorra és a v' sebességre, ezért ez az m tömegpontot a haladási iránytól igyekszik eltéríteni.

    $$F_C = -2m\underline{\omega} \times v'$$

12. **Centrifugális erő kifejezése.**

    A centrifugális erő a forgástengelyre merőleges, sugárirányban kifelé mutató erő:

    $$F_c = -m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times r) = 2m\underline{\omega}s$$

    , ahol s a forgástengelytől vett távolság.

13. **Súlyos tömeg.**

    Azt jellemzi, a test mennyire vesz részt a gravitációs kölcsönhatásban.

14. **Pontrendszer tömegközépponti tétele.**

    $$m_i\ddot{r}_i = \underline{F_i}(r_i) + \sum_{i,j} \underline{F_{i,j}}(r_i, ..., r_j)$$

15. **Pontrendszer impulzusnyomaték tétele.**

    Ha a külső erők eredője $\underline{F} = \sum m_i\underline{\ddot{r}_i} = 0$, akkor az impulzus megmarad, $\dot{\underline{P}} = 0$, és mivel az impulzusmomentum megváltozása a külső erők által kifejtett forgatónyomatékkal egyenlő, $\dot{\underline{N}} = \underline{M}$, ezért, ha $\underline{M} = 0$, akkor $\underline{N} = \acute{a}lland\acute{o}$, azaz az impulzusmomentum megmarad.

16. **Hogyan adható meg egy holonom kényszer?**

    Egy holonom kényszer integrálható, és felírható felületekkel.

    $$a_{k,j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

17. **Virtuális elmozdulás.**

    A virtuális elmozdulás egy végtelen gyors, $t = 0$ idő alatt lezajló, kényszerek által megengedett, és azokra merőleges képzeletbeli elmozdulás.
    Kényszert leíró felület mentén elmozdulás : $f_{(\underline{r},t)} = 0$, majd virtuális $\delta\underline{r}$ elmozdulás után $f_{(\underline{r}+\delta\underline{r},t)} = 0$

18. **Milyen erők szerepelnek a virtuális munka elvében?**

    Kényszererők teljesen virtuális munkájára ad kikötést, miszerint annak 0-nak kell lennie:

    $$\sum_i \underline{F}_i \delta\underline{r}_i = \delta W = 0$$

19. **Kényszererők a Lagrange-I mozgásegyenletekben.**

    A kényszereket felületekkel írjuk le, ahol a kényszererő merőleges a felületre.

    $$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \lambda \cdot grad(f)$$

    f a felület, λ az úgynevezett Lagrange-multiplikátor.

    $$\underline{F}_{i,kényszer} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{a}_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \underline{r}_i}$$

20. **Mi a d'Alembert elv?**

    $$\sum_{i=1}^{n} (\underline{F}_i - \dot{\underline{p}}_i)\delta\underline{r}_i = 0$$

    , ahol $\underline{\mathrm{F}}$ a szabad erők, $\underline{\mathrm{p}}$ pedig a tömegpont impulzusa. A d'Alembert-elv ekvivalens a Lagrange-féle elsőfajú egyenletekkel és a Newton-mozgásegyenletekkel.

21. **Hamilton elv kimondása.**

    A Hamilton-elv (vagy legkisebb hatás elve) szerint egy mechanikai rendszer úgy mozog, hogy a hatásintegrál szélsőértéket vesz fel a kényszerek által megengedett lehetséges mozgásokhoz képest.

    $$\mathcal{S}_{[q_i]} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_{(q_i,\dot{q}_i,t)} dt = extremum$$

22. **Mit variálunk a Hamilton elvben?**

    A pályát, apró virtuális elmozdulásokkal ($\delta\underline{r}$).

23. **A kezdő és a végpont variációja Hamilton elvben.**

    Kezdő és végpontokat nem variáljuk: $\delta r_{i(t_1)} = 0$, $\delta r_{i(t_2)} = 0$

24. **Általános koordináták és kényszerek kapcsolata.**

    Megfelelő általános koordináták választásával kiküszöbölhetőek a nehezen felírható kényszerek, és leegyszerüsíthetőek a mozgásegyenletek.

25. **Euler (-Lagrange) egyenletek.**

A variációs probléma Euler egyenletei:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

.
Amiből az Euler-Lagrange egyenletek:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

, ahol L a Lagrange-függvény, q_i pedig az általános koordináták.

26. **Mitől függ a Lagrange-függvény?**

A Lagrange-függvény az általános koordinátáktól és az általános sebességektől függ(esetleg az időtől is).

$$L_{(q,\dot{q},t)} = T - V$$

27. **Tömegpont Lagrange függvénye $V(r)$ potenciálban.**

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V_{(x,y,z)}$$

28. **Bolygómozgást leíró Lagrange-függvény.**

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{\alpha}{r}$$

29. **Fizikai inga Lagrange függvénye.**

$$L = \frac{1}{2}\theta\omega^2 - (-mgs\cos\phi) = \frac{1}{2}\theta\dot{\phi}^2 + mgs\cos\phi$$

30. **Hamilton-függvény definíciója.**

$$H_{(p,q,t)} = \sum_i p_i\dot{q}_i - L = \frac{p_i^2}{2m} + V_{(q_i)} = T + V$$

A rendszer Hamilton-függvénye, ami függ az általános koordinátáktól, az általános impulzustól, és az időtől. Az L a Lagrange-függvény.

31. **Mitől függ a Hamilton-függvény?**

Általános koordinátáktól és a kanonikusan konjugált impulzustól (esetleg az időtől).

$$\mathcal{H}_{(q_k,p_k,t)}$$

32. **Harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye.**

$$H_{(x,p)} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

33. **Kanonikusan konjugált impulzus definíciója.**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

34. **Kanonikus egyenletek.**

A Hamilton-féle kanonikus egyenletek a mechanikai rendszer mozgásegyenletei a Hamilton-féle formalizmusban, ahol a q általános koordináták és a p általános impulzusok független változók.

$$\dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

A kanonikus egyenletek rendszere $2f$ db elsőrendű differenciál egyenlet,amik ekvivalensek az f db másodrendű Lagrange differenciálegyenletekkel.
A p , q összetartozó változókat *kanonikusan konjugált pároknak* nevezzük.

35. **Ciklikus kooordináta.**

Olyan koordináta, amit nem tartalmaz a Hamilton-függvény, és ha valamelyik koordináta a Hamilton-függvényben nem szerepel, akkor a hozzá tartozó általános impulzus a kanonikus egyenletek szerint állandó.
Ha valamennyi általános koordináta ciklikus, akkor a mozgásfeladat a kanonikus egyenletek alapján nagyon egyszerűen megoldható.

36. **Mitől kanonikus a kanonikus transzformáció?**

Olyan transzformáció, ami során áttérünk olyan koordinátarendszerbe, ahol az összes koordináta ciklikus, és ebben az új rendszerben változatlanul érvényesek a kanonikus egyenletek.

$$\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial W}{\partial t}$$

Ide tartoznak pl. az ortogonális koordinátatranszformációk vagy a derékszögű koordinátákról a polárkoordinátákra való áttérés. Az ilyen transzformációt $ponttranszformáció$nak nevezzük, és minden ponttranszformáció kanonikus.

Ha sikerül alkalmas kanonikus transzformációval olyan új koordinátákra áttérnünk, amelyek ciklikusak, akkor az alapegyenletek megoldása nagyon egyszerűvé válik.

Transzformáció q,p régi koordinátákról Q, P új (ciklikus) koordinátákra a W alkotófüggvény differenciálásával:

$$p_k = \frac{\partial W_k}{\partial q_k} \; ; \; P_k = -\frac{\partial W_k}{\partial Q_k} \; ; \; q_k = -\frac{\partial W_k}{\partial P_k} \; ; \; Q_k = \frac{\partial W_k}{\partial P_k}$$

37. **Rezgőmozgás általános megoldása, kezdőfeltételek nélkül.**

$$q_k = q_{0,k} \cos{(\omega t + \alpha)}$$

, ahol q_0 az amplitúdó, α pedig a kezdőfázis, ezek függenek a kezdőfeltételektől.

38. **Csillapított rezgés megoldás általános alakja.**

Ha a csillapítást $-k\dot{x}$ -nak írjuk fel, és a rezgést csak 1 dimenzióban (x) vizsgáljuk, ahol $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ és $\alpha = \frac{k}{2m}$, akkor:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

egyenlet megoldása:

$$x_{(t)} = e^{\lambda t}, ahol \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$$

. Így :

$$x_{(t)} = A \cdot e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\omega_0^2})t} + B \cdot e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2+\omega_0^2})t}$$

39. **Mi a rezonancia jelensége?**

    Rezonancia akkor lép fel, amikor egy rezgőmozgást végző rendszerre egy külső periodikus kényszer hat, és a gerjesztés frekvenciája megegyezik a rendszer sajátfrekvenciájával.

    $$F_{(t)} = F_0 \cos \Omega t,$$

    és

    $$\omega_{saját} = \Omega$$

40. *// ezeket az anyagrészeket nem vettük az előadáson:* Milyen típusú erő van az általános tömegvonzás törvényében ?

41. Területi sebesség polárkoordinátákban, $\lambda = ?$

42. Milyen változó-helyettesítést használunk a bolygómozgás levezetése során?

43. Kúpszeletek fokális (r, Φ) egyenlete.

44. Kepler 3. törvénye. //

45. **Milyen pontra lehet/célszerű felírni az impulzusnyomatéktételt?**

    Egy merev test impulzusnyomatéka (vagy impulzusmomentuma vagy perdülete) felírható a transzlációs és a rotációs perdületek összegeként.

    $$\underline{N} = \underline{N}_{transzlációs} + \underline{N}_{rotációs} = m(\underline{r}_s \times v_0) + \underline{\underline{\theta}}\omega$$

    , ahol $\underline{r}_s$ a tömegközépponttól vett távolság. Így, ha a tömegközéppontra írjuk fel a tételt, $\underline{r}_s = 0$, és minden leegyszerűsödik.

46. **Merev test Lagrange függvénye**

    Egy merev test kinetikus energiája megadható a mozgási, kölcsönös, és forgási energiák összegeként:

    $$T = \frac{1}{2}\int v_0^2 \rho dV + \int v_0(\underline{\omega} \times \underline{r})\rho dV + \frac{1}{2}\int (\underline{\omega} \times \underline{r}^2)\rho dV$$

    , ami egyszerűbb alakra hozva:

    $$T = \frac{1}{2}m\underline{v}_0^2 + \frac{1}{2}\theta_{i,k}\omega_i\omega_k$$

    Ebből, ha a potenciál $V_{(q_i)}$, akkor a merev test Lagrange-függvénye:

    $$L = \frac{1}{2}m\underline{v}_0^2 + \frac{1}{2}\theta_{i,k}\omega_i\omega_k - V_{(q_i)}$$

47. **Tehetetlenségi nyomaték diagonális pl.θ_{11} komponense.**

    A tehetetlenségi nyomaték tenzor elemei:

    $$\theta_{i,k} = \sum_i m_i(\delta_i k \underline{v}^2 - r_i r_k)$$

    , ahol a diagonális $(\theta_{11}, \theta_{22}, \theta_{33})$ elemek az egyes tengelyekre vett skalár tehetetlenségi vetületek.

48. **Tehetetlenségi nyomaték nemdiagonális komponense.**

    A tehetetlenségi nyomaték tenzor nemdiagonális komponensei a deviációs nyomatékok.

49. **Mik a fő tehetetlenségi irányok?**

Ha $\theta_{i,k}$ szimmetrikus, akkor van ortogonális sajátrendszere. Ebben az esetben a fő tehetetlenségi irányok a sajátvektorok.

$$\theta_{i,k} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix}$$

50. **Euler-egyenlet.**

Az Euler-egyenletek egy pörgettyű leírását egyszerüsítik meg egy fő tehetetlenségi tengelyek által meghatározott forgó rendszerben.

$$\theta_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(\theta_3 - \theta_2) = M_1$$

$$\theta_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(\theta_1 - \theta_3) = M_2$$

$$\theta_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(\theta_1 - \theta_2) = M_3$$

Ahol $\theta_{1,2,3}$ időtől független állandók, $M_{1,2,3}$ a külső erők O pontra vonatkoztatott eredő nyomatékának komponensei, a $\omega_i\omega_k(\theta_i - \theta_k)$ tagok pedig a centrifugális erő nyomatékának komponensei (az együttforgó koordinátarendszerben).

51. **Mi a precesszió?**

Merev test forgástengelyének forgatónyomaték hatására bekövetkező elmozdulása. Ilyenkor kor az $\underline{\omega}$ vektor tengelye egyenletesen mozog az impulzusmomentum tengelye körül, és körkúpot ír le.

$$\dot{\Phi} = \frac{N}{\theta_1}$$

Euler szögekkel kifejezve az első Euler-szög elfordulása: $\omega_{pr} = \dot{\Phi}$

52. **Mi a nutáció?**

Más néven a Chandler-féle ingadozás, a második Euler-szög elmozdulásával fejezhető ki.

$$\omega_{nu} = \dot{\theta}$$