9. Házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:

A feladat szerint a test térfogata $1+\alpha$-szorosára nőtt, azaz a relatív térfogatváltozása $\alpha$. Ez viszont azt jelenti, hogy a deformáció tenzor spúrja is $\alpha$. Más információnk nincs a deformációról, csak annak a követelménynek kell eleget tennünk, hogy a tenzor spúrja $\alpha$. Vagyis egy lehetséges deformáció tenzor:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\mathrm{Bi}(0)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) & \pi^2 - \psi_1\left(\frac{5}{4}\right) & \frac{945\pi}{128}B(5,1/2) \\ 4\left(4-\int_0^1 \mathrm{M}(x)\,dx\right) & \alpha - 3^{-\frac{1}{6}} & \mathrm{Bo}_2(3) + 2T_2(3) \\ \frac{36}{\pi}\zeta(4) & 12U_1(3) & \left[\mathrm{Ai}(0) - \sqrt{\frac{1}{3\pi^2}}\mathrm{K}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\alpha \end{pmatrix}$$

Ahol $\mathrm{Ai}(x)\,,\mathrm{Bi}(x)$ Az első és másodfajú Airy függvények, $\psi_1(x)$ a trigamma függvény, $B(x,y)$ a béta függvény, $M(x)$ az elsőfajú elliptikus integrál, $\mathrm{Bo}_n(x)$ a Boubaker polinomok, $T_n(x)$ az elsőfajú chebishev polinomok, $\zeta(x)$ a Riemann-zéta függvény, $U_n(x)$ a másodfajú csebishev polinomok, $K_\nu(x)$ a $\nu$-ed rendű Kelvin függvény, vagy másodfajú módosított bessel függvény. Az is követelmény ugye, hogy a deformáció tenzor szimmetrikus. A fenti tenzor szimmetrikusságának a belátását a javítóra bízzuk....

2. Feladat:
A megadott deformáció tenzor:

$$\varepsilon = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Két elmozdulástér ami ezt teljesíti például:

$$\mathbf{u^1} = \alpha \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u^2} = \alpha \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Feladat:

- A megadott elmozdulásmező: $\mathbf{u} = (6x, 4y, z)$. Innen a deformációs tenzor $\varepsilon_{ij} = 1/2(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$ alapján:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- A megadott elmozdulásmező: $\mathbf{u} = (6z, 4x, y)$. Innen a deformációs tenzor:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- A megadott elmozdulásmező: $\mathbf{u} = (z^2, x^2+y^2, 0)$. Innen a deformációs tenzor:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ x & 2y & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Innen a feszültség tenzor: $\sigma_{kl} = 2\mu\varepsilon_{kl} + \lambda \mathrm{Sp}(\varepsilon)\delta_{kl}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2\lambda y & 2\mu x & 2\mu z \\ 2\mu x & 2(2\mu+\lambda)y & 0 \\ 2\mu z & 0 & 2\lambda y \end{pmatrix}$$

Az egyensúlyi egyenlet: $\mathrm{div}\sigma + \mathbf{f} = 0$. Tehát ez alapján az egyensúlyhoz szükséges tömegerő:

$$\mathbf{f} = -\begin{pmatrix} 2\mu \\ 2(3\mu+\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Feladat:

A probléma egy dimenziósnak tekinthető. Legyen a rúd hossza $L$ az elmozdulásmező tehát $u(x)$. A tömegerő az $\omega$-val forgó rúdra: $f = \rho\omega^2(x+u)$. A feszültség tenzor: $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$, tehát az egyensúlyi egyenlet (a divergencia tehát most csak simán a derivált):

$$E\frac{d^2u}{dx^2} + \rho\omega^2(u+x) = 0$$

Legyen $\xi^2 = \rho\omega^2/E$, ekkor a fenti egyenlet (a ' jelöli az x szerinti deriváltat):

$$u'' + \xi^2 u = -\xi^2 x$$

Ez egy sima másodrendű inhomogén egyenlet. Egy partikuláris megoldást, már egyből láthatunk : $u_0 = -x$. Tehát már csak a homogén részt kell megoldani, arról meg látszik, hogy egy harmonikus rezgés egyenletével analóg, tehát a diffegyenlet általános megoldása:

$$u(x) = A\sin(\xi x) + B\cos(\xi x) - x$$

A határfeltételek $u(x=0) = 0$ és $u'(L) = 0$. Tehát innen $B = 0$ az első feltételből, a másodikból:

$$A = \frac{1}{\xi\cos(\xi L)}$$

Tehát az elmozdulásmező:

$$u(x) = \frac{1}{\xi\cos(\xi L)}\sin(\xi x) - x$$

Jogosan használhatjuk viszont azt a közelítést, hogy a rúdnak nagy a Young modulusza a sűrűséghez és a szögsebességhez képest azaz $\xi << 1$ Ekkor sorbafejthetjük a sinust és a cosinust és a $\xi$-ben elsőrendű tagokat elég megtartanunk:

$$\frac{1}{\xi\cos(\xi L)}\sin(\xi x) \approx \frac{1}{\xi\left(1-\frac{\xi^2L^2}{2}\right)}\left[\xi x - \frac{\xi^3x^3}{6}\right] \approx \left(1+\frac{\xi^2L^2}{2}\right)\left[x - \frac{\xi^2x^3}{6}\right] \approx x - \frac{\xi^2x^3}{6} + \frac{\xi^2L^2}{2}x$$

Tehát az elmozdulásmező:

$$u(x) = \frac{\xi^2}{2}\left[L^2x - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{\rho\omega^2}{2E}\left[L^2x - \frac{x^3}{3}\right]$$

Ezt kapnánk tehát akkor ha a centrifugális tömegerő tagban elhanyagolnánk az $u$-t a hely mellett.

5. Feladat:

Mérjük az $x$-et az egyes húr mentén az első húr kezdőpontjától, $x = L$-től következik a másik húr. Tehát $x = 0$-ban és $x = 2L$-ben nincs kitérése a húroknak. Tehát a kitérések a két húr mentén:

$$\psi_1 = A\sin(k_1 x)\sin(\omega t) \qquad \psi_2 = B\sin(k_2(2L - x))\sin(\omega t)$$

Az illesztési feltételek minden $t$-re:

$$\psi_1(L) = \psi_2(L) \qquad \left.\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_L = \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_L$$

Azaz ezekből:

$$\frac{\mathrm{tg}(k_1 L)}{k_1} = -\frac{\mathrm{tg}(k_2 L)}{k_2}$$

De $\psi$ a hullámegyenletet teljesíti, aminek a diszperziós reláció amit teljesítenek a $k$-k és $c$-k: $k_1 = \omega/c_1 \quad k_2 = \omega/c_2$. Továbbá a sebességek a sűrűséggel és a húr keresztmetszetével kifejezve:

$$c_1 = \sqrt{\frac{F}{A\rho_1}} \qquad c_2 = \sqrt{\frac{F}{A\rho_2}}$$

Bevezetve továbbáa következőket:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\rho_1 \frac{AL^2}{F}} \qquad \upsilon_2 = \sqrt{\rho_2 \frac{AL^2}{F}}$$

A frekvenciát megadó egyenlet tehát:

$$\frac{\mathrm{tg}(\upsilon_1 \omega)}{\upsilon_1} + \frac{\mathrm{tg}(\upsilon_2 \omega)}{\upsilon_2} = 0$$