8. Házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:

Legyen a kúp alapjával párhuzamos síkmetszetben a szimmetriatengelytől mért r sugár az egyik koórdináta, és az ezen sík menti φ polárszög a másik koórdináta. Ekkor a kúpon mozgó tömegpont helyzete:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = \frac{r}{\mathrm{tg}\alpha}$$

A kinetikus energia tehát:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

Tehát a Lagrange függvény:

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$$

A Kanonikus impulzusok innen:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m\dot{r}}{\sin^2\alpha} \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$

Vagyis a Hamilton függvény:

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi - L = \frac{p_r^2\sin^2\alpha}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r)$$

És a Hamilton egyenletek:

$$\dot{r} = \frac{p_r\sin^2\alpha}{m} \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - U'(r) \qquad \dot{p}_\varphi = 0$$

2. Feladat:

A Lagrange függvényt kapásból felírhatjuk, ha a koórdináta rendszerünk ω állandó szögsebességgel forog, és a forgó rendszeren belül mérjük az (r, φ) koórdinátákat:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2) - U(r)$$

A kanonikus impulzusok:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2(\dot{\varphi} + \omega)$$

Innen a Hamilton függvény:

$$H = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - p_\varphi\omega + U(r)$$

És a Hamilton egyenletek:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} - \omega$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - U'(r) \qquad \dot{p}_\varphi = 0$$

3. Feladat:

Legyen a rúdnak az x tengellyel bezárt szöge φ, a rúd két végének descartes koórdinátái x, y. A rúd hossza adott, c. Írjuk fel először a kinetikus energiáját a rúdnak. Egyszer van a saját tkp körüli forgásából származó forgási energia, és a tkp haladási mozgási energiája. Az első tagot könnyen felírhatjuk:

$$T_{forg} = \frac{1}{2}\frac{1}{12}mc^2\dot{\varphi} = \frac{1}{24}mc^2\dot{\varphi}$$

A másik energia tag felírásához, meg kell határoznunk a tkp sebességét:

$$v_s = \sqrt{\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2} = \sqrt{\frac{c^2}{4}\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \frac{c^2}{4}\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi} = \frac{c\dot{\varphi}}{2}$$

Tehát a haladási mozgási energia:

$$T_{hal} = \frac{1}{2}m\left(\frac{c\dot{\varphi}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mc^2\dot{\varphi}^2$$

Vagyis a teljes mozgási energia:

$$T = T_{forg} + T_{hal} = \frac{mc^2\dot{\varphi}^2}{6}$$

Ezekkel a Lagrange függvény:

$$L = \frac{mc^2\dot{\varphi}^2}{6} - \frac{D}{2}(c\cos\varphi - a)^2 - \frac{D}{2}(c\sin\varphi - b)^2$$

A szükséges deriváltak:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{mc^2\dot{\varphi}}{3}\right] = \frac{mc^2}{3}\ddot{\varphi}$$

és:

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = Dc\sin\varphi(c\cos\varphi - a) - Dc\cos\varphi(c\sin\varphi - b) = Dcb\cos\varphi - Dca\sin\varphi$$

Bedobva az Euler-Lagrangeba a mozgásegyenletünk:

$$\ddot{\varphi} = \frac{3D}{mc}\left[b\cos\varphi - a\sin\varphi\right]$$

Nézzük először az egyensúlyi helyzetet, ekkor $\ddot{\varphi}_0 = 0$ tehát a mozgásegyenlet alapján:

$$b\cos\varphi_0 = a\sin\varphi_0 \quad \mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{b}{a}$$

Nézzük az egyensúlyi helyzet körüli kis θ kitéréseket azaz legyen $\varphi = \varphi_0 + \theta$.
Ekkor az egyenlet:

$$\ddot{\theta} = \frac{3D}{mc}\left[b\cos(\varphi_0 + \theta) - a\sin(\varphi_0 + \theta)\right]$$

Az addíciós tételek alapján, és felhasználva, hogy θ kicsiny:

$$\sin(\varphi_0 + \theta) = \sin\varphi_0\cos\theta + \cos\varphi_0\sin\theta \approx \sin\varphi_0 + \theta\cos\varphi_0$$
$$\cos(\varphi_0 + \theta) = \cos\varphi_0\cos\theta - \sin\varphi_0\sin\theta \approx \cos\varphi_0 - \theta\sin\varphi_0$$

ezeket visszaírva:

$$\ddot{\theta} = \frac{3D}{mc}\left[b\cos\varphi_0 - a\sin\varphi_0\right] - \frac{3D}{mc}\left[b\sin\varphi_0 + a\cos\varphi_0\right]\theta$$

Na de láthatóan a jobb oldal első tagja nulla, tehát marad:

$$\ddot{\theta} = -\frac{3D}{mc}\left[b\sin\varphi_0 + a\cos\varphi_0\right]\theta$$

Az egyensúlyi helyzet ismerjük, így könnyen belátható, hogy : $b\sin\varphi_0 + a\cos\varphi_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$
Tehát a végső egyenletünk:

$$\ddot{\theta} = -\frac{3D}{m}\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}\theta$$

Innen leolvasható a kis rezgések frekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{3D}{m}\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}}$$

Az is adott volt, hogy $a^2 + b^2 = c^2$, tehát ekkor:

$$\omega = \sqrt{\frac{3D}{m}}$$

4. Feladat:

Ez a feladat, láthatóan elég összetett, ezért szokás szerint használjuk a szuperpozíció elvét. A rendszert két különálló részként tekintjük. Az egyik része a nagy tömör R sugarú ρ sűrűsége gömb a másik pedig a kis r sugarú $-\rho$ negatív sűrűségű gömb, aminek középpontja l távolságra van a nagy gömb középpontjától. Ez megfelel annak mintha ezt kivágtuk volna az eredeti nagy gömbből.
Legyen a kis és nagy gömb középpontjait összekötő egyenesnek a függőlegessel bezárt szöge φ. Ahhoz, hogy felírhassuk a Lagrange függvényt meg kell határoznunk a rendszer mozgási energiáját. Legyen a nagy gömb tömege M és a kis gömb tömege m ahol $m < 0$. A teljes mozgási energia négy tagból áll. Egyszer a nagy gömb forog a tkp-ja körül és halad is előre

tisztán gördülve, a kis gömb, halad körbe l sugáron a nagyon gömb középpontja körül, forog is a saját tkp-ja körül, és halad is előre. Tehát a teljes mozgási energia:

$$T = \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(R^2 + l^2 + 2Rl\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{7}{10}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m\dot{\varphi}^2}{2}\left(\frac{2r^2}{5} + R^2 + l^2 + 2Rl\cos\varphi\right)$$

Legyen a potenciális energia nullszintje R magasságban azaz a nagy gömb tkpjának a szintjén. Ekkor csak a kis gömbnek lesz potenciális energiája, és ez:

$$U = mgl\cos\varphi$$

Ezzel a teljes rendszer Lagrange függvénye:

$$L = \frac{7}{10}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m\dot{\varphi}^2}{2}\left(\frac{2r^2}{5} + R^2 + l^2 + 2Rl\cos\varphi\right) - mgl\cos\varphi$$

A szükséges deriváltak:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{7}{5}MR^2\dot{\varphi} + m\dot{\varphi}\left(\frac{2r^2}{5} + R^2 + l^2 + 2Rl\cos\varphi\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{7}{5}MR^2 + m\left(\frac{2r^2}{5} + l^2 + R^2 + 2Rl\cos\varphi\right)\right]\ddot{\varphi} - 2mRl\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

és:

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = mgl\sin\varphi - mRl\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

Bedobva az euler-lagrange egyenletbe és végig osztva m-mel:

$$\left[\frac{7}{5}\frac{M}{m}R^2 + \frac{2r^2}{5} + l^2 + R^2 + 2Rl\cos\varphi\right]\ddot{\varphi} = gl\sin\varphi + Rl\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

Mivel most csak kis kitéréseket vizsgálunk, ezért φ kicsi, vagyis $\dot{\varphi}^2$-es tagot elhanyagolhatjuk, és a $\cos\varphi \approx 1$ valamint $\sin\varphi \approx \varphi$ közelítéseket használhatjuk. Ezekkel a mozgásegyenletünk:

$$\ddot{\varphi} = \frac{gl\sin\varphi}{\frac{7}{5}\frac{M}{m}R^2 + \left(\frac{2r^2}{5} + (l+R)^2\right)}$$

Most már csak a tömegarányokat kell meghatároznunk, ez pedig:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}R^2\pi} = -\frac{m}{\frac{4}{3}r^2\pi} \Longrightarrow \frac{M}{m} = -\frac{R^3}{r^3}$$

Ezt visszaírva a mozgásegyenletbe:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\frac{r^2}{l}\left[\frac{7}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^5 - \left(\frac{l+R}{r}\right)^2 - \frac{2}{5}\right]}\varphi$$

Ahonnan leolvasható a kis rezgések frekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\frac{r^2}{l}\left[\frac{7}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^5 - \left(\frac{l+R}{r}\right)^2 - \frac{2}{5}\right]}}$$