7. Házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
Legyen a baloldali test kitérése x_1 a jobboldalié x_2. Newton szerint ekkor a mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x}_1 = -3Dx_1 + D(x_2 - x_1) \qquad 2m\ddot{x}_2 = -2Dx_2 + D(x_1 - x_2)$$

bevezetve az:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

jelölést, mátrix alakban a következőt kapjuk:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

x_k-kat a szokásos $e^{\cdots}$-os alakban keresve, a fenti kétszer kettes mátrix sajátértékegyenlete:

$$2\lambda^2 - 11\lambda + 11 = 0$$

tehát a rendszer sajátfrekvenciái: $\omega_{1,2} = \omega_0\sqrt{\lambda}$:

$$\omega_{1,2} = \omega_0\sqrt{\frac{11 \pm \sqrt{33}}{4}}$$

És ezzel a normálmódusok:

$$\vec{a}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5\pm\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix}$$

2. Feladat:
Legyen az alsó rugó megnyúlása x a felső rugóé y. Ekkor a Lagrange függvény:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}2m(\dot{x} + 2\dot{y})^2 - mgx - 2mg(x + 2y) - \frac{1}{2}2Dx^2 - \frac{1}{2}Dy^2$$

A szükséges deriváltak:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left[3m\dot{x} + 4m\dot{y}\right] = 3m\ddot{x} + 4m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -3mg - 2Dx$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt}\left[4m\dot{x} + 8m\dot{y}\right] = 4m\ddot{x} + 8m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -4mg - Dy$$

Ezeket bedobva az Euler-Lagrange-ba:

$$3m\ddot{x} + 4m\ddot{y} = -3mg - 2Dx$$

$$4m\ddot{x} + 8m\ddot{y} = -4mg - Dy$$

Az egyensúlyi helyzetek innen:

$$x_0 = -\frac{3mg}{2D} \qquad y_0 = -\frac{4mg}{D}$$

bevezetve az ezekhez viszonyított relatív koórdinátákat:

$$x = x_0 + \epsilon_x \qquad y = y_0 + \epsilon_y$$

Ezekre a mozgásegyenletek mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\epsilon}_x \\ \ddot{\epsilon}_y \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{pmatrix}$$

Innen a kis rezgések frekvenciái:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{19 \pm 3\sqrt{33}}{16} \frac{D}{m}$$

3. Feladat:
Az ellipsoidon mozgás Lagrange függvénye, a kényszerrel kiegészítve:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

A deriváltjai:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}$$

A többi derivált:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{2\lambda}{a^2} x \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{2\lambda}{b^2} y \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{2\lambda}{c^2} z - mg$$

Tehát a mozgásegyenletek és a kényszerfeltétel:

$$m\ddot{x} = \frac{2\lambda}{a^2} x$$

$$m\ddot{y} = \frac{2\lambda}{b^2} y$$

$$m\ddot{z} = \frac{2\lambda}{c^2} z - mg$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

A kényszerfeltételt kétszer deriválva:

$$\frac{x\ddot{x}}{a^2} + \frac{y\ddot{y}}{b^2} + \frac{z\ddot{z}}{c^2} = -\frac{\dot{x}^2}{a^2} - \frac{\dot{y}^2}{b^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}$$

A mozgásegyenletekkel kombinálva kifejezhetjük a Lagrange-multiplikátort mint az első időderiváltak és a koórdináták függvénye:

$$\lambda(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2} \frac{\frac{gz}{c^2} - \frac{\dot{x}^2}{a^2} - \frac{\dot{y}^2}{b^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

Ezt visszaírva a mozgásegyenleteketbe kiküszöböltük a λ-t és marad egy három egyenletből álló csatolt másodrendű nemlineáris differenciálegyenletrendszer, ami elvileg megoldható. Ennek megoldását a javítóra bízzuk...