6. Házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
A megadott Lagrange függvény:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + f^2(r)\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Láthatóan a Lagrange függvény nem függ expliciten a φ koórdinátától. Tehát ez ciklikus koórdináta. Sőt az időtől sem függ expliciten a Lagrange függvény, ezért az energia is megmarad. A mozgásegyenlet felírásához szükséges deriváltak:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\left(mf^2(r)\dot{\varphi}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Longrightarrow mf^2(r)\dot{\varphi} = J = const.$$

Láthatóan máris kaptunk egy megmaradó mennyiséget.
És:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$$

és:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mf(r)f'(r)\dot{\varphi}^2 - U'(r)$$

Bedobva az EL egyenletbe:

$$m\ddot{r} = mf(r)f'(r)\dot{\varphi}^2 - U'(r) = \frac{J^2}{m}\frac{f'(r)}{f^3(r)} - U(r) \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{J^2}{2mf^2(r)} + U(r)\right)$$

Innen leolvashatjuk az effektív potenciált:

$$U_{eff} = \frac{J^2}{2mf^2(r)} + U(r)$$

2. Feladat:
A ω szögsebességgel forgó koórdinátarendszerbeli r, φ koórdinátákkal felírt Lagrange függvény:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2) - U(r)$$

Láthatóan nem függ expliciten az időtől, ezért az energia megmarad. A φ koórdinátától sem függ expliciten, ezért ez ciklikus koórdináta lesz.
Nézzük a deriváltakat:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\left(mr^2(\dot{\varphi} + \omega)\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Tehát:

$$mr^2(\dot{\varphi} + \omega) = J = const.$$

A többi derivált:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$$

és:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr(\dot{\varphi} + \omega) - U'(r)$$

Bedobva az EL-be:

$$m\ddot{r} = mr(\dot{\varphi} + \omega)^2 - U'(r) = mr\dot{\varphi}^2 + 2mr\dot{\varphi}\omega + mr\omega^2 - U'(r)$$

3. Feladat:

A megadott függvény, és kényszer:

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2 \qquad x-y^2=2$$

Tehát:

$$g(x,y) = (x^2+y^2-1)^2 + \lambda(x-y^2-2) = 0$$

A parc. deriváltak:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4x(x^2+y^2-1)+\lambda = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 4y(x^2+y^2-1)-2y\lambda = 0$$

Kiküszöbölve a Lagrange multiplikátort, és a $y^2 = x-2$ kényszerfeltételt felhasználva a következőt kapjuk:

$$4y(2x+1)(x^2+x-3) = 0$$

A következő eseteink vannak tehát:
1. $y=0$ ekkor $x=2$ a feltétel alapján.
2. $x=-1/2$ ekkor $y^2=-5/2$ ez pedig láthatóan nem jó, mivel most valós x,y-okról van szó...
3. $x^2+x-3=0$ ennek a megoldása: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2} \approx 1,3 \;\; ; \;\; -2,3$ láthatóan ezek sem jók...

Tehát az $f(x,y)$ függvény szélsőértékhelyei a fenti kényszer mellett: $(x,y)=(2,0)$. És a függvény értéke itt $f(2,0)=9$.

4. Feladat:

Legyen μ az ugrókötél vonalmenti tömegsűrűsége. Legyenek a kislány kezei egymástól l távolságra, és pörgesse ω szögsebességgel. Ekkor a kötél egy infinitezimális ds darabkájának a forgási energiája:

$$dE = \frac{\mu\omega^2y^2}{2}ds = \frac{\mu\omega^2y^2}{2}\sqrt{1+y'^2}\;\; dx$$

Tehát a teljes energia:

$$E = \frac{\mu\omega^2}{2}\int_0^l y^2\sqrt{1+y'^2}\;\; dx$$

Emellett a kötél s hossza állandó:

$$s = \int_0^l \sqrt{1+y'^2}\;\; dx$$

Adjuk hozzá ennek a kényszernek a λ szorosát az energiához:

$$E' = \int_0^l \left(\frac{\mu\omega^2}{2}\int_0^l y^2\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx \quad -\lambda s$$

Vezessük be a következőt:

$$\xi = \frac{\mu\omega^2}{2}$$

Ezzel:

$$E' = \int_0^l \sqrt{1+y'^2}\;(\xi y^2+\lambda)dx \quad -\lambda s$$

Ennek akkor lesz szélsőértéke, ha teljesül az Euler-Lagrange egyenlet:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\left[\sqrt{1+y'^2}\;(\xi y^2+\lambda)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{1+y'^2}\;(\xi y^2+\lambda)\right]$$

Elvégezve a deriváltakat:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(\xi y^2+\lambda)\right] = 2\xi y\sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right](\xi y^2+\lambda)+\frac{2\xi y y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=2\xi y\sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right](\xi y^2+\lambda)=\frac{2\xi y}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Elvégezve a deriváltat:

$$y''(\xi y^2+\lambda)=2\xi y(1+y'^2)$$

Bevezetve a $\phi^2=\lambda/\xi$ jelölést, és beszorozva $2y'$-vel:

$$\frac{2y'y''}{1+y'^2}=2\frac{2yy'}{y^2+\phi^2}$$

Vegyük észre a következőt, hogy ezek mind teljes deriváltak:

$$(\ln(1+y'^2))'=2(ln(y^2+\phi^2))'$$

Vagyis egyből integrálhatunk:

$$1+y'^2=A^2(y^2+\phi^2)$$

Ahol A integrációs konstans. Ez már egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet $y(x)$-re. Szeparálva a változókat:

$$\pm x+c=\int\frac{dy}{\sqrt{A^2(y^2+\phi^2)-1}}$$

c újabb integrációs konstans.
Nézzük az integrált. Legyen: $A(y^2+\phi^2)=\mathrm{ch}u$ ekkor $dy=\frac{\mathrm{sh}u}{2\sqrt{A(\mathrm{ch}u-A\phi^2)}}$. Vagyis az integrál:

$$\int\frac{\mathrm{sh}u\,du}{2\sqrt{A(\mathrm{ch}u-A\phi^2)}\sqrt{\mathrm{ch}^2u-1}}=\int\frac{du}{2\sqrt{A(\mathrm{ch}u-A\phi^2)}}=\int\frac{du}{2\sqrt{A(1-A\phi^2+2\mathrm{sh}^2\frac{u}{2})}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{A(1-A\phi^2)}}\int\frac{du}{\sqrt{1+\frac{2}{1-A\phi^2}\mathrm{sh}^2\frac{u}{2}}}$$

Most legyen $\frac{u}{2}=-i\psi$ Ekkor $\mathrm{sh}\frac{u}{2}=-i\sin\psi$ és $du=-2i\,d\psi$. Továbbá: $k^2=\frac{2}{1-A\phi^2}$. (Most nem diszkutálunk semmit a komplex-valósságról, csak 'izomból' alakítjuk) Ezzel az integrálunk:

$$\pm x+c=\frac{1}{i\sqrt{A(1-A\phi^2)}}\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

Na de ez láthatóan öreg barátunk az elsőfajú elliptikus integrál. Az integrálást elvégezve, majd invertálva kapjuk a $\psi(x)$ függvényt, majd innen az u-t, majd az u-ból pedig visszaszámolhatjuk az eredetileg keresett $y(x)$ függvényt, ami megadja az ugrókötél alakját.

5. Feladat:
A megadott időfüggő Lagrange függvény:

$$L=\frac{1}{2}e^{\frac{\alpha}{m}t}\left[\dot{x}^2+\frac{\alpha}{m}x\dot{x}+\left(\frac{\alpha^2}{2m^2}-\frac{k}{m}\right)x^2\right]$$

Na de ez nagyon csúnyának tűnik így, és ha még elkezdenénk deriválgatni...
Szóval vegyük észre, hogy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha}{2m}e^{\frac{\alpha}{m}t}x^2\right) = \frac{\alpha^2}{2m^2}e^{\frac{\alpha}{m}t}x^2 + \frac{\alpha}{m}e^{\frac{\alpha}{m}t}x\dot{x}$$

Tehát a fenti Lagrange függvény így írható:

$$L = \frac{1}{2}e^{\frac{\alpha}{m}t}\left[\dot{x}^2 - \frac{k}{m}x^2\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{\alpha}{2m}e^{\frac{\alpha}{m}t}x^2\right]$$

Tehát láthatóan leválasztottunk egy teljes időderiváltat az eredeti Lagrange függvényből. Ez azt jelenti, hogy az egyszerűsített

$$L' = \frac{1}{2}e^{\frac{\alpha}{m}t}\left[\dot{x}^2 - \frac{k}{m}x^2\right]$$

Lagrange függvényből ugyanazokat a mozgásegyenleteket kapjuk, mint az eredetiből. Na most már neki állhatunk deriválgatni:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{\alpha}{m}t}\dot{x}\right) = \frac{\alpha}{m}e^{\frac{\alpha}{m}t}\dot{x} + e^{\frac{\alpha}{m}t}\ddot{x}$$

és:

$$\frac{\partial L'}{\partial x} = -\frac{k}{m}e^{\frac{\alpha}{m}t}x$$

Bedobva az Euler-Lagrange egyenletbe a következő lesz a mozgásegyenletünk:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Az új L' Lagrange függvényünkben a $k \to 0$ esetben már nem marad x^2-es tag, mivel az 'kidobódott' a teljes időderiváltba.
Láthatóan a mozgásegyenlet nem függ expliciten az időtől, és ez némi megszorítást ad a Lagrange függvény időfüggésére.
A mozgásegyenlet levezetésekor, egyszer deriválunk idő szerint, tehát az időfüggés úgy is előfordulhatna hogy a Lagrange függvény additíven tartalmazza az idő valamilyen lineáris függvényét:

$$L = L' + ct = \frac{1}{2}\beta\left[\dot{x}^2 - \frac{k}{m}x^2\right] + ct$$

itt β valamilyen konstans, és c lehet akármilyen függvény. Na de a mozgásegyenletünk $f(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0$ alakú, azaz expliciten függ az x-től valamint időderiváltjaitól. De láthatóan, hogy ha a fenti 'additív' Lagrange függvényben $c(x, \dots)$ az x és másoknak a függvénye, akkor nem esik ki az időfüggés, ha $c(\dot{x})$ csak az $\dot{x}$-tól függ, semmilyen módon sem kapjuk meg a $\dot{x}$ függését a mozgásegyenletnek, hiszen akkor $\frac{dc(\dot{x})}{d\dot{x}} = \xi x$ kéne kapnunk de ez nem lehet, mivel $c(x)$ nem függ x-től, ha meg függne akkor az előbb megbeszéltek szerint nem lenne jó. Vagyis az 'additív' Lagrange függvényből nem kaphatnánk meg a fenti mozgásegyenletet. Ez azt jelenti, hogy az időfüggés csak külső szorzótényezőként jelenhet meg. És ez sem akármilyen függvénye lehet az időnek, hanem olyannak, hogy az időderiválás után is ugyanolyan legyen, hogy ki lehessen potyogtatni, azért mert a mozgásegyenlet nem függhet explixiten az időtől. Na de melyik az a függvény amelynek első deriváltja arányos önmagával? Ez nem más mint az exponenciális függvény! Tehát az Lagrange függvény időfüggése tényleg egy külső exponenciális szorzófaktorként jelenik meg.