5. Házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
Legyen x az m tömegű alsó kocsi hátuljának helyzete valamilyen origótól mérve. y pedig az M tömegű felső kocsi helyzete a rúgó rögzítési pontjától mérve. Ekkor a két test koordinátái:

$$x_1 = x \qquad x_2 = x + y$$

Tehát a kinetikus energia:

$$K = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}(\dot{x} + \dot{y})^2 = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}\dot{y}^2 + M\dot{x}\dot{y}$$

A potenciális energia:

$$U = \frac{k}{2}(y - l_0)^2$$

Ahol l_0 a rugó nyugalmi hossza.
Tehát a Lagrange függvény:

$$L = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}\dot{y}^2 + M\dot{x}\dot{y} - \frac{k}{2}(y - l_0)^2$$

A szükséges deriváltak:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m+M)\ddot{x} + M\ddot{y}$$

és:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

a másik koórdinátára:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\ddot{x} + M\ddot{y}$$

és:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -k(y - l_0)$$

Tehát a mozgásegyenletek:

$$(M+m)\ddot{x} + M\ddot{y} = 0$$

$$\ddot{x} + \ddot{y} = -\frac{k}{M}(y - l_0)$$

Ezekből ki tudjuk küszöbölni $\ddot{x}$-t. Ekkor a kis felső kocsi mozgásegyenlete:

$$\ddot{y} = -\frac{M+m}{Mm}k(y - l_0)$$

Azt láthatjuk, hogy a Lagrange Függvény nem függ expliciten x-től. Vagyis x-re nézve eltolás-invariáns. Na de ez pont azt jelenti, hogy a rendszer összimpulzusa nem változik meg(lévén szó 1D-s mozgásról itt most az impulzus vektornak csak egy komponense különbözik nullától). Ezt láthatóan meg is kaptuk az egyik mozgásegyenlet formájában.
A Lagrange függvény még az időtől sem függ expliciten, ezért tehát a rendszer összenergiája is megmarad.

2. Feladat:
Legyen az 1. testhez húzott sugárnak a vízszintessel bezárt szöge φ_1, a 2. testhez húzott sugár vízszintessel bezárt szöge φ_2. Legyen az origó a kör középpontja. Ekkor a testek koórdinátái:

$$x_1 = R\cos\varphi_1 \quad y_1 = R\sin\varphi_1 \quad ; \quad x_2 = -R\cos\varphi_2 \quad y_2 = R\sin\varphi_2$$

Ekkor az össz mozgási energia:

$$K = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

A potenciális energia:

$$U = mgR\sin\varphi_1 + mgR\sin\varphi_2 + \frac{D}{2}\left(R\sqrt{2(1+\cos(\varphi_1+\varphi_2))} - l_0\right)^2$$

Ahol l_0 a rugó nyugalmi hossza. Tehát a Lagrange-Függvény:

$$L = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - mgR\sin\varphi_1 - mgR\sin\varphi_2 - \frac{D}{2}\left(R\sqrt{2(1+\cos(\varphi_1+\varphi_2))} - l_0\right)^2$$

A Szükséges deriváltak:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_k} = mR^2 \ddot{\varphi}_k$$

$k = 1, 2$ és:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_k} = -mgR\cos\varphi_k + DR^2 \sin(\varphi_1+\varphi_2)\left[1 - \frac{l_0}{R\sqrt{2(1+\cos(\varphi_1+\varphi_2))}}\right]$$

Tehát a mozgásegyenletek:

$$\ddot{\varphi}_k = -\frac{g}{R}\cos\varphi_k + \frac{D}{m}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\left[1 - \frac{l_0}{R\sqrt{2(1+\cos(\varphi_1+\varphi_2))}}\right]$$

ahol $k = 1, 2$

3. Feladat:
A megadott Lagrange Függvény:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{m}{2}\sum_l \dot{x}_l^2 + \sum_p \sum_q \dot{x}_p A_{pq} x_q$$

Ahol $l, p, q = 1, 2$. Azért tértünk át indexes írásmódra mert így egyszerűbb lesz végig deriválni... Szóval a szükséges deriváltak:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m\ddot{x}_k + \sum_q A_{kq}\dot{x}_q$$

és:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \sum_p \dot{x}_p A_{pk}$$

Tehát a mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x}_k = \sum_p \left(A_{pk} - A_{kp}\right)\dot{x}_p$$

Azaz kiírva komponensekre:

$$m\ddot{x}_1 = (A_{11} - A_{11})\dot{x}_1 + (A_{21} - A_{12})\dot{x}_2 = (A_{21} - A_{12})\dot{x}_2$$

$$m\ddot{x}_2 = -(A_{21} - A_{12})\dot{x}_1$$

Nézzük most meg egy mágneses térbe helyezett részecske mozgását. A mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x}_k = q(\vec{\dot{x}} \times \vec{B})_k$$

Írjuk csak ki azt a vektoriális szorzást:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 B_3 - \dot{x}_3 B_2 \\ \dot{x}_3 B_1 - \dot{x}_1 B_3 \\ \dot{x}_1 B_2 - \dot{x}_2 B_1 \end{pmatrix}$$

Na de a mi esetünkben a részecske az xy síkban mozog, azaz $\dot{x}_3 = 0$. Na de ez azt is jelenti, hogy rá ható Lorentz erőnek csak x és y komponense lehet. Vagyis a vektoriális szorzat eredményének nem lehet z komponense. Vagyis ez láthatóan azt jelenti, hogy a következőnek kell mindig teljesülnie:

$$\dot{x}_1 B_2 - \dot{x}_2 B_1 = 0$$

Ez csak akkor fog mindig teljesülni, ha $B_1 = B_2 = 0$. Vagyis a mágneses tér z irányba fog mutatni és $B_3 = B$. Ez alapján tehát a mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x}_1 = qB\dot{x}_2 \qquad m\ddot{x}_2 = -qB\dot{x}_1$$

Ezeket hasonlítsuk össze az A elemeivel megadott mozgásegyenletekkel. láthatóan Akkor lesznek ugyanazok ha:

$$A_{21} - A_{12} = qB \Longrightarrow B = \frac{A_{21} - A_{12}}{q}$$

És láthatóan $\mathbf{A}$-nak a diagonális elemei lesznek irrelevánsak a probléma szempontjából.

4. Feladat:
Legyen az origó az l_1 hosszú inga felfüggesztési pontja, és az y tengely mutasson felfelé. Az l_2 inga pedig legyen az m_1 tömegű 1 inga végéhez rögzítve. Legyen φ_1 az l_1 ingaszálnak a függőlegessel bezárt szöge, és φ_2 az l_2 ingaszálnak a függőlegessel bezárt szöge. Ekkor az egyes tömegek koordinátái:

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \;\; ; \;\; y_1 = -l_1 \cos\varphi_1$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin\varphi_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \;\; ; \;\; y_2 = y_1 - l_2 \cos\varphi_2 = -(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2)$$

Az 1. ingatest kinetikus energiája:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \cos^2\varphi_1 + l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin^2\varphi_1) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2$$

A 2. ingatest kinetikus energiája:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right)$$

A rendszer potenciális energiája:

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g (y_1 + y_2) = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

Tehát az $L = K_1 + K_2 - U$ Lagrange függvény:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

A szükséges deriváltak:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

És:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1$$

A másik koórdinátára:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

És:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 g l_2 \sin\varphi_2$$

Ezeket bedobva az Euler-Lagrange egyenletbe a mozgásegyenleteink:

$$(m_1+m_2) l_1 \ddot\varphi_1 + m_2 l_2 \ddot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2 l_2 \dot\varphi_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2) g \sin\varphi_1 = 0$$

$$m_2 l_2 \ddot\varphi_2 + m_2 l_1 \ddot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) - m_2 l_1 \dot\varphi_1^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + m_2 g \sin\varphi_2 = 0$$

Nézzük a kisrezgéseket. Azaz legyen φ_1 és φ_2 is kicsiny. Ekkor a mozgásegyenlet az alábbi alakra redukálódnak:

$$l_1 \ddot\varphi_1 + \frac{m_2 l_2}{m_1+m_2} \ddot\varphi_1 = -g\varphi_1$$

$$l_1 \ddot\varphi_1 + l_2 \ddot\varphi_2 = -g\varphi_2$$

Mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} l_1 & \frac{m_2 l_2}{m_1+m_2} \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot\varphi_1 \\ \ddot\varphi_2 \end{pmatrix} = -g \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Elvégezve az invertálást a következőt kapjuk:

$$\begin{pmatrix} \ddot\varphi_1 \\ \ddot\varphi_2 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} \frac{l_2}{l_1} & -\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Ahol:

$$\omega_0^2 = \frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{g}{l_2}$$

Ismert, hogy a rendszer ω_k sajátfrekvenciáit úgy kapjuk meg, hogy $\omega_k = \omega_0\sqrt{\lambda_k}$. Ahol λ_k-k a fenti mátrix sajátértékei.
Láthatóan csak egy 2×2-es mátrixunk tehát csak egy ugyanilyen determinánst kell kiszámolnunk.
A sajátértékek:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{l_2^2}{l_1^2}+\frac{2l_2}{l_1}\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}$$

Tehát a rendszer sajátfrekvenciái:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l_2}\frac{m_1+m_2}{2m_1}\left[\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right) \pm \sqrt{1+\frac{l_2^2}{l_1^2}+\frac{2l_2}{l_1}\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}\right]$$

5. Feladat:
A megadott Lagrange függvények:

$$L_1 = \frac{1}{2}m\dot x^2 - \dot x f(t) \qquad L_2 = \frac{1}{2}m\dot x^2 - x g(t)$$

Ekkor a szükséges deriváltak, és a mozgásegyenletek:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot x} = m\ddot x - \frac{df(t)}{dt} \qquad \frac{\partial L_1}{\partial x} = 0 \Longrightarrow m\ddot x = \frac{df(t)}{dt}$$

és:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot x} = m\ddot x \qquad \frac{\partial L_2}{\partial x} = -g(t) \Longrightarrow m\ddot x = -g(t)$$

Láthatóan akkor lesznek ugyanazok a mozgásegyenletek, ha:

$$\frac{df(t)}{dt} + g(t) = 0$$

Na de mi is rejlik emögött a feltétel mögött?
Tudjuk, hogy a Lagrange függvénye egy addítív teljes idő derivált erejéig határozza meg a hatás variációját, és a mozgásegyenleteket bizony a legkisebb hatás elvéből származtatjuk. Tehát ha egy rendszer Lagrange függvénye L akkor az :

$$L' = L + \frac{d\psi(x,t)}{dt}$$

Lagrange függvény ugyanazokat a mozgásegyenleteket szolgáltatja mint az eredeti L Lagrange függvény.
A mi konkrét feladatunkban adjunk tehát hozzá az egyik Lagrange függvényhez egy ismeretlen függvény teljes idő deriváltját, és tegyük egyenlővé a másik lagrange függvénnyel:

$$L_2 = L_1 + \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \dot{x}f(t) + \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - xg(t) \Longrightarrow \frac{d\psi}{dt} = \dot{x}f(t) - xg(t)$$

Vagyis a következő egyenletünk van:

$$\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \dot{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = \dot{x}f(t) - xg(t)$$

Innen leolvashatjuk az egyes parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = f(t) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -xg(t)$$

Na de a Young tétel alapján:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} \Longrightarrow \frac{df(t)}{dt} = -g(t) \Longrightarrow \frac{df(t)}{dt} + g(t) = 0$$

Tehát ugyanazt a feltételt megkaptuk az f és g függvényekre. És kifejezhetjük a ψ függvényt is:

$$\frac{d\psi}{dt} = \dot{x}f(t) + x\frac{df(t)}{dt} = \frac{d(xf(t))}{dt} \Longrightarrow \psi(x,t) = xf(t)$$