4. Házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
(Elm. Fiz.: 9.10)
A megadott potenciál:

$$V(r) = \frac{k}{2}r^2$$

Vegyük a gradiensét, ahhoz, hogy megkaphassuk az erőteret és majd a mozgásegyenletet:

$$F_l = -\partial_l(V(r)) = -\frac{k}{2}\partial_l r^2 = -kr\partial_l r = -kr\frac{r_l}{r} = -k \cdot r_l \Longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$$

Ahonnan a mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}$$

Vagyis láthatóan az erőterünk centrális. Na de ez azt jelenti, hogy teljesül az impulzusmomentummegmaradás, ez viszont azt jelenti, hogy a mozgás síkmozgás. Továbbá, a centrális erőtérnek van potenciálja is, ezért konzervatív, tehát a mechanikai energia is megmarad.
Ahhoz, hogy a pálya egyenletét megkapjuk oldjuk meg először a mozgásegyenletet. Ez egy szimpla másodrendű hiányos, állandó együtthatós, lineáris, vektor differenciálegyenlet.
Legyen a szokásos módon: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Ezzel a mozgásegyenlet megoldása:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\cos(\omega_0 t) + \mathbf{B}\sin(\omega_0 t)$$

Ahol **A** és **B** adott vektorok, melyek a kezdeti feltételekből határozhatók meg.
A mozgás síkmozgás, továbbá válasszuk meg úgy a koordinátarendszerünket, hogy kezdetben csak x irányú kitérése legyen a részecskének. Ekkor:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}(t=0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{r}}(t=0) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezzel az **A** és **B** vektorok:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{\omega_0}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vagyis az egyes elmozdulások:

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_x}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

$$y(t) = \frac{v_y}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Rendezzük át őket:

$$\frac{x - \frac{v_x}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}{x_0} = \cos\omega_0 t$$

$$\frac{\omega_0 \cdot y}{v_y} = \sin(\omega_0 t)$$

Most emeljük mindkettőt négyzetre és adjuk őket össze, és rendezzük. Ekkor az alábbit kapjuk:

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{x_0 v_y}{\sqrt{v_x^2 + x_0^2\omega_0^2}}\right)^2} - \frac{2v_x}{x_0^2 v_y}xy = 1$$

Tehát ez lesz a pálya egyenlete.
Most nézzük meg a T periódusidőt. Erre igaz, hogy:

$$y(t) = y(t+T) \Longrightarrow \sin(\omega_0 t) = \sin(\omega_0 t + \omega_0 T) \Longrightarrow \omega_0 T = 2\pi \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Azt kaptuk tehát, hogy érdekes módon a peridódus független a pálya adataitól.

2. Feladat:
(Elm. Fiz.: 9.12) A megadott potenciál:

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

Mivel létezik potenciál, ezért a belőle származtatott erőtér def. szerint konzervatív, tehát érvényes az energia megmaradás. Továbbá, mivel centrális ezért az impulzusmomentum is megmarad:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{N^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r^2} = E$$

Ahol $N = mr^2\dot{\varphi}$ az impulzusmomentum.
Írjuk át a radiális sebességet így: $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = r' \cdot \dot{\varphi}$ Ebbe írjuk bele az impulzusmomentum megmaradásból a $\dot{\varphi}$-t majd azt írjuk vissza az energia megmaradásba. Ezt rendezve a következőre jutunk:

$$r'^2 = r^2\left(1 + \frac{2m\alpha}{N^2}\right)\left(\frac{2mE}{N^2 + 2m\alpha}r^2 - 1\right)$$

Legyenek:

$$\lambda = \sqrt{\frac{N^2 + 2m\alpha}{2mE}} \qquad \mu = \sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{N^2}}$$

Ezzel a fenti egyenlet:

$$r'^2 = \mu^2 r^2\left(\frac{r^2}{\lambda^2} - 1\right)$$

Innen:

$$\int \frac{dr}{\mu r\sqrt{\frac{r^2}{\lambda^2} - 1}} = \pm\varphi$$

Legyen $r = \lambda \mathrm{ch} u$ ekkor $dr = \lambda \mathrm{sh} u\, du$. Ezzel az integrál:

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch} u}du = \mu\varphi$$

Alakítgassuk:

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch} u}du = \int \frac{du}{\mathrm{ch}^2\frac{u}{2}\left(1 + \mathrm{th}^2\frac{u}{2}\right)}$$

Legyen $\xi = \mathrm{th}\frac{u}{2}$ ekkor $d\xi = \frac{1}{2\mathrm{ch}^2\frac{u}{2}}du \Longrightarrow du = 2\mathrm{ch}^2\frac{u}{2}\, d\xi$ vagyis:

$$2\int \frac{d\xi}{1+\xi^2} = 2\mathrm{arctg}\xi = 2\mathrm{arctg}\left(\mathrm{th}\frac{u}{2}\right) = 2\mathrm{arctg}\left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arch}\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right)\right]$$

Na de:

$$\mathrm{th}\frac{\psi}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{\psi}{2}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{1+\mathrm{ch}\psi}{2}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\psi - 1}{\mathrm{ch}\psi + 1}}$$

A mi esetünkben

$$\psi = \operatorname{arch}\frac{r}{\lambda} \Longrightarrow \operatorname{th}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\frac{r}{\lambda}-1}{\frac{r}{\lambda}+1}}$$

Vagyis az eredeti integrálunk:

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{\lambda^2}-1}} = 2\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{\frac{r}{\lambda}-1}{\frac{r}{\lambda}+1}}\right] = \mu\varphi \Longrightarrow \sqrt{\frac{\frac{r}{\lambda}-1}{\frac{r}{\lambda}+1}} = \operatorname{tg}\frac{\mu\varphi}{2}$$

Ezt átrendezve:

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\mu\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\mu\varphi}{2}} = \cos\mu\varphi \Longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{\lambda}\cos\mu\varphi$$

Vagyis a részecske pályája:

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \sqrt{\frac{2mE}{N^2+2m\alpha}}\cos\left[\varphi\sqrt{1+\frac{2m\alpha}{N^2}}\right]$$

3. Feladat: (Elm. Fiz. 9.15) Írjuk fel a mozgásegyenletét a testnek:

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right) = -\frac{k}{r^n}$$

A centrális erőtér végett megmarad továbbá az impulzusmomentum:

$$mr^2\dot{\varphi} = J = const.$$

Ezt visszaírva az előző egyenletbe a következőt kapjuk:

$$m\ddot{r} = -\frac{k}{r^n} + \frac{J^2}{mr^3}$$

A kialakuló egyensúlyi körpályák r_0 sugarát azzal a feltétellel kapjuk meg, hogy $\ddot{r}_0 = 0$. Azaz:

$$-\frac{k}{r_0^n} + \frac{J^2}{mr_0^3} \Longrightarrow r_0 = \left(\frac{mk}{J^2}\right)^{\frac{1}{n-3}}$$

Vizsgáljuk meg ezek stabilitást. Perturbáljuk meg a mozgást egy kis ϵ-nal. Azaz legyen $r = r_0+\epsilon$. Ezt visszaírva az előző egyenletbe:

$$m\ddot{\epsilon} = -\frac{k}{(r_0+\epsilon)^n} + \frac{J^2}{m(r_0+\epsilon)^3} =$$

$$= \frac{J^2}{mr_0^3}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{\epsilon}{r_0}\right)^3} - \frac{1}{\left(1+\frac{\epsilon}{r_0}\right)^n}\right] \approx \frac{J^2}{mr_0^3}\left[1-\frac{3\epsilon}{r_0}-1+\frac{n\epsilon}{r_0}\right] = \frac{J^2(n-3)}{mr_0^4}\epsilon$$

Tehát a kis perturbáció hatására létrejövő mozgás egyenlete:

$$\ddot{\epsilon} = \frac{J^2(n-3)}{m^2r_0^4}\cdot\epsilon$$

Ez a mozgás nyilván akkor lesz stabil, ha a kis perturbáció hatására 'visszamegy' az eredeti pályára, azaz kis rezgéseket végez a körpálya körül. Ez az egyenlet láthatóan akkor lesz egy kis rezgés egyenlete ha $n < 3$. És ekkor a kis rezgések frekvenciája:

$$\omega = \omega_0\sqrt{3-n} \qquad \omega_0 = \frac{J}{mr_0^2}$$

4. Feladat:
   (Elm. Fiz. 9.16) Írjuk fel a mozgásegyenletet:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = -mg(r)$$

   Az impulzusmomentum természetesen most is megmarad:

$$mr^2\dot{\varphi} = J$$

   E két egyenletből:

$$\ddot{r} = \frac{J^2}{m^2\rho^3} - g(r)$$

   A kialakuló körpályák ρ sugarát megadó egyenlet innen:

$$\frac{J^2}{m^2\rho^3} = g(\rho)$$

   perturbáljuk meg egy kicsit a körpályán mozgó testet ϵ-nal, azaz $r = \rho + \epsilon$. ekkor:

$$\ddot{\epsilon} = \underbrace{\frac{J^2}{m\rho^3}}_{g(\rho)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\epsilon}{\rho}\right)^3} - g(\rho + \epsilon) \approx g(\rho)\left(1 - \frac{3\epsilon}{\rho}\right) - \left(g(\rho) + g'(\rho)\epsilon\right)$$

   Innen a kis perturbációk mozgásegyenlete:

$$\ddot{\epsilon} = -\left(\frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho)\right)\epsilon$$

   Tehát a kis rezgések körfrekvenciája valóban:

$$\omega^2 = \frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho)$$

5. Feladat: Adjuk meg először a pálya egyenletét. Legyen a centrumból a kör egy adott pontjába húzott r szakasz és a kör középpontját a centrummal összekötő egyenes által bezárt szög φ. A centrum és a kör középpontjának távolsága h, a centrumból a körhöz húzott érintő, és a centrumból a középponthoz húzott egyenesek által bezárt adott szög legyen α.
   Ekkor a cosinus tétel alapján:

$$h^2\sin^2\alpha = h^2 + r^2 - 2hr\cos\varphi \Longrightarrow r(\varphi) = h\left[\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\alpha}\right] \qquad \cos\varphi = \frac{r^2 + h^2\cos^2\alpha}{2hr}$$

   Ennek a deriváltja:

$$r'(\varphi) = \frac{dr}{d\varphi} = -h\left[\sqrt{1 - \cos^2\varphi} + \frac{\cos\varphi\sqrt{1 - \cos^2\varphi}}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\alpha}}\right]$$

   Ide beírva a $\cos\varphi$-re kapott kifejezést, hosszas rendezés után megkapjuk a deriváltat r függvényében:

$$r'(r) = -r\frac{\sqrt{4h^2r^2 - (r^2 + h^2\cos^2\alpha)^2}}{r^2 - h^2\cos^2\alpha}$$

   A potenciálra ismert, hogy:

$$\Phi(r) = -\frac{J^2}{2mr^2}\left[1 + \frac{r'^2}{r^2}\right] = -\frac{\frac{2J^2h^2\sin^2\alpha}{m}}{(r^2 - h^2\cos^2\alpha)^2} = -\frac{C}{(r^2 - B^2)^2}$$

   Tehát ez lesz a potenciál.