3. Házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:

Először írjuk fel a mozgásegyenleteket. Ismert, hogy Forgó koórdinátarendszerben egy test mozgásegyenlete, amelyre csak a gravitációs erő hat, mint valódi erő:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - 2m(\vec{\omega} \times \mathbf{v}) - m(\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r})$$

Egyből elhanyagolhatjuk azonban a föld szögsebességének változását, így marad a következő egyenletünk:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - 2(\vec{\omega} \times \mathbf{v}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r})$$

Most vegyünk fel egy koordináta rendszert, amelyben ezt a vektor differenciálegyenletet megoldjuk. Legyen ϑ a föld forgástengelye és egy adott helyzethez húzott sugár által bezárt szög. Mutasson az x tengely a ϑ szög által jellemzet forgástengelyre merőleges síkú kör egy pontjába húzott sugár irányába. Az y tengely ezen kör érintőjének irányába, és a z tengely a gömb ezen pontbeli erintősíkjában az előző kettőre merőleges legyen úgy, hogy x, y, z jobbsodrású rendszert alkossanak.
Ekkor a szögsebességvektor és a nehézségi gyorsulásvektor:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega\cos\vartheta \\ 0 \\ \omega\sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A szögsebességvektor és a sebességvektor vektoriális szorzata:

$$\begin{pmatrix} \omega\cos\vartheta \\ 0 \\ \omega\sin\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\dot{y}\sin\vartheta \\ \omega\dot{x}\sin\vartheta - \omega\dot{z}\cos\vartheta \\ \omega\dot{y}\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Nézzük meg a másik vektoriális szorzatot:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r}) - \vec{r}\omega^2 = \vec{\omega}(\omega x\cos\vartheta + \omega z\sin\vartheta) - \vec{r}\omega^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \omega^2 z\sin\vartheta\cos\vartheta - \omega^2 x\sin^2\vartheta \\ -\omega^2 y \\ \omega^2 x\sin\vartheta\cos\vartheta - \omega^2 z\cos^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Tehát a mozgásegyenletek:

$$\ddot{x} = 2\omega\sin\vartheta\cdot\dot{y} + \omega^2\sin^2\vartheta\cdot x - \omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot z - g$$

$$\ddot{y} = \omega^2\cdot y - 2\omega\sin\vartheta\cdot\dot{x} + 2\omega\cos\vartheta\cdot\dot{z}$$

$$\ddot{z} = -2\omega\cos\vartheta\cdot\dot{y} - \omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot x + \omega^2\cos^2\vartheta\cdot z$$

A kezdőfeltételek pedig: $x(0) = h$, $y(0) = z(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ Mivel h magasságból ejtettük a testet.
Láthatóan ezek a differenciálegyenletek csatolva vannak, és ezért úgy tűnik, hogy nehéz lenne megoldani őket, de vegyük észre, hogy mindegyik lineáris, állandóegyütthatós (A koórdináta rendszerünket egy fix helyhez rögzítettük, így ϑ állandó), sőt még a kezdeti feltételeink is adottak. Az ilyen típusú differenciálegyenletrendszereket, érdemes a Laplace transzformált módszerrel megoldani, hiszen akkor egy közönséges lineáris egyenletrendszer megoldására redukálódik a

probléma, amelyet már könnyen megoldhatunk, és onnan inverz Laplace transzformációt végrehajtva megkapjuk az eredetileg keresett függvényeket, azaz az eredeti differenciálegyenletrendszer megoldását. Ismert, hogy egy $f(t)$ függvény $F(s)$ Laplace-transzformáltja:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Tehát könnyen belátható, hogy:

$$L[f'(t)] = s \cdot L[f(t)] - f(0) \quad L[f''(t)] = s^2 \cdot L[f(t)] - s \cdot f(0) - f'(0)$$

Azaz, a függvény deriváltjainak Laplace transzformáltja, arányos magának a függvénynek a Laplace transzformáltjával.
Most nézzük a mi esetünket (Kihasználjuk a kezdeti feltételeket):

$$L[x(t)] = X \Longrightarrow L[\dot{x}(t)] = sX - h \Longrightarrow L[\ddot{x}(t)] = s^2X - sh$$

$$L[y(t)] = Y \Longrightarrow L[\dot{y}(t)] = sY \Longrightarrow L[\ddot{y}(t)] = s^2Y$$

$$L[z(t)] = Z \Longrightarrow L[\dot{z}(t)] = sZ \Longrightarrow L[\ddot{z}(t)] = s^2Z$$

Vegyük most az egyes mozgásegyenletek Laplace-transzformáltját, és használjuk fel a fentieket:

$$(s^2 - \omega^2\sin^2\vartheta)X - 2\omega s\sin\vartheta Y + \omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta Z = sh - \frac{g}{s}$$

$$2\omega s\sin\vartheta X + (s^2 - \omega^2)Y - 2\omega s\cos\vartheta Z = 2\omega h\sin\vartheta$$

$$\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta X + 2\omega s\sin\vartheta Y + (s^2 - \omega^2\cos^2\vartheta)Z = 0$$

Láthatóan ez egy sima 3 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer az X, Y, Z Laplace-transzformáltakra. Írjuk át mátrix alakba, mert úgy könnyebb kezelni:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (s^2 - \omega^2\sin^2\vartheta) & -2\omega s\sin\vartheta & \omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 2\omega s\sin\vartheta & (s^2 - \omega^2) & -2\omega s\cos\vartheta \\ \omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta & 2\omega s\sin\vartheta & (s^2 - \omega^2\cos^2\vartheta) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} sh - \frac{g}{s} \\ 2\omega h\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy megoldjuk az egyenletrendszert, invertálnunk kell az $\mathbf{A}$ mátrixot. Ehhez számoljuk ki először a determinánsát (a számolást nem részletezem, csak a végeredményt írom):

$$\det\mathbf{A} = s^2(s^2 + \omega^2)^2$$

Ahhoz, hogy tovább haladjunk, meg kell határoznunk, a mátrix algebrai adjungáltját. Vagyis meghatározzuk az egyes elemekhez tartozó előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, majd ezt transzponáljuk. Ezután ha ezt elosztjuk a determinánssal megkapjuk az inverz mátrixot. Ezt végig számoltam így, de most csak a végeredményt, az inverz mátrixot írom le:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s^2(s^2 - \omega^2) + \omega^2(3s^2 + \omega^2)\cos^2\vartheta}{s^2(s^2 + \omega^2)^2} & \frac{2\omega s\sin\vartheta}{(s^2 + \omega^2)^2} & \frac{\omega^2(3s^2 + \omega^2)\cos\vartheta\sin\vartheta}{s^2(s^2 + \omega^2)^2} \\ -\frac{2\omega s\sin\vartheta}{(s^2 + \omega^2)^2} & \frac{s^2(s^2 - \omega^2)}{s^2(s^2 + \omega^2)^2} & \frac{2\omega s\cos\vartheta}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ \frac{\omega^2(3s^2 + \omega^2)\sin\vartheta\cos\vartheta}{s^2(s^2 + \omega^2)^2} & -\frac{2\omega s\cos\vartheta}{(s^2 + \omega^2)^2} & \frac{s^2(s^2 - \omega^2) + \omega^2(3s^2 + \omega^2)\sin^2\vartheta}{s^2(s^2 + \omega^2)^2} \end{pmatrix}$$

Ebből már leolvashatjuk az ismeretlen X, Y, Z transzformáltakat:

$$X(s) = \frac{s^2(s^2-\omega^2)+\omega^2(3s^2+\omega^2)\cos^2\vartheta}{s^2(s^2+\omega^2)^2}\left(sh-\frac{g}{s}\right)+\frac{4\omega^2 hs\sin^2\vartheta}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$Y(s) = -\frac{2\omega s\sin\vartheta}{(s^2+\omega^2)^2}\left(sh-\frac{g}{s}\right)+\frac{2\omega h\sin\vartheta(s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$Z(s) = \frac{\omega^2(3s^2+\omega^2)\sin\vartheta\cos\vartheta}{s^2(s^2+\omega^2)^2}\left(sh-\frac{g}{s}\right)-\frac{4\omega^2 hs\sin\vartheta\cos\vartheta}{(s^2+\omega^2)^2}$$

Láthatóan ezek nem túl 'bonyolult' függvényei az s-nek, így az inverz transzformáltat könnyen előállíthatjuk. Az alábbiakat transzformáltakat kell tudni csak:

$$L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\qquad L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}\qquad L[t\cos\omega t]=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\qquad L[t\sin\omega t]=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

Az összes a fenti kifejezésekből kikeverhető ezekből.
Ezek után az alábbiakat kapjuk az eredeti általunk keresett $x(t), y(t), z(t)$ időfüggvényekre:

$$x(t)=\left(h-\frac{g}{\omega^2}\right)\left[\cos\omega t+\omega t\sin\omega t\right]\sin^2\vartheta+\frac{g}{\omega^2}\sin^2\vartheta+\left(h-\frac{gt^2}{2}\right)\cos^2\vartheta$$

$$y(t)=\left(h-\frac{g}{\omega^2}\right)\left[\omega t\cos\omega t-\sin\omega t\right]\sin\vartheta$$

$$z(t)=\left[\left(h-\frac{g}{\omega^2}\right)\left[1-\cos\omega t-\omega t\sin\omega t\right]-\frac{gt^2}{2}\right]\sin\vartheta\cos\vartheta$$

Ez az egzakt megoldása a problémának. A test leérkezési helyét, úgy kapjuk meg, hogy megnézzük mikor lesz $x(t_0) = 0$ valamilyen t_0 időpillanatra, majd ezt vissza helyettesítjuk az $y(t), z(t)$ függvényekbe.
Na de mi tudjuk, hogy a föld szögsebességének nagysága 10^{-5} nagyságrendű, ezért perturbáljuk meg ω-ban elsőrendig ezeket a függvényeket.
Ekkor az $x(t)$ esetén így kell közelítenünk:

$$\cos\omega t\approx 1-\frac{\omega^2t^2}{2}\qquad \sin\omega t\approx\omega t$$

Ezt beírva $x(t)$-be az alábbit kapjuk:

$$x(t)=h-\frac{gt^2}{2}$$

Az $y(t)$ esetén bele kell vennünk a $sin..$ sorfejtésének a következő tagját, azaz:

$$\cos\omega t\approx 1-\frac{\omega^2t^2}{2}\qquad \sin\omega t\approx\omega t-\frac{\omega^3t^3}{6}$$

Ezt beírva $y(t)$-be a következőt kapjuk:

$$y(t)=\frac{g\omega t^3}{3}\sin\vartheta$$

A $z(t)$ esetében ugyanúgy kell mint az $x(t)$ esetében, és akkor ezt kapjuk:

$$z(t)=0$$

Nézzük meg mennyi idő alatt ért le a test: $x(t_0)=0 \Longrightarrow t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Ekkor a test helyzete:

$$x(t_0)=0\qquad y(t_0)=\frac{2}{3}\omega\sin\vartheta\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\qquad z(t_0)=0$$

Tehát láthatóan y irányban fog eltérni a leérkezési helye az inerciarendszerbeli eséstől, méghozzá pont a fenti $y(t_0)$-lal.

2. Feladat:
Nézzük meg először a radiális mozgását a csőben lévő testnek. A forgókoórdinátarendszerben a cső irányába csak a centrifugális erő hat, vagyis:

$$\ddot{r} = \omega^2 r$$

Ahol r méri a test pillanatnyi távolságát a forgástengelytől.
Ezt a differenciálegyenletet gyorsan megoldhatjuk, és megkapjuk az $r(t)$ függvényt. Most az ω szögsebességet állandónak tartjuk, így annak nem lesz időfüggése. A kezdeti feltételek: $r(t = 0) = l$ és $\dot{r}(t = 0) = 0$
A diffegyenlet általános megoldása ekkor ismert: $r(t) = A\mathrm{ch}\omega t + B\mathrm{sh}\omega t$ a kezdeti feltételekhez illesztve $A = l$ és $B = 0$. Tehát a test forgástengelytől való távolságának időfüggése:

$$r(t) = l\mathrm{ch}\omega t$$

Most nézzük meg milyen 'forgató' erők hatnak a rudra.
Egyszer mi kifejtünk egy F_k külső erőt, mellyel állandó szögsebességen tartjuk. Másrészt, hat rá a test Coriolis ereje, hiszen forgókoórdináta rendszerben van sebessége a testnek, tehát hat rá a Coriolis erő, na de emiatt nyomja a cső falát ezzel az erővel. Tehát a rúdra ható 'forgató erők'(azaz 'érintőirányú' erők):

$$F_f = F_k - 2m\omega\dot{r}$$

Na de az összeségében a rúd szögsebessége nem változik, tehát a forgató erők eredőjének nincs forgatónyomatéka, így $M = F_f r = 0$, tehát az a forgatónyomaték amit nekünk kell kifejtenünk a rúdra:

$$M_k(t) = 2m\omega r\dot{r} = m\omega\dot{r^2} = ml^2\omega^2\mathrm{sh}(2\omega t)$$

Ugyanezt megkaphatjuk az 'energiamegmaradásból', ugyanis a rendszer összenergiája konstans, tehát a pillanatnyi mozgási energia, és az általunk a rendszeren végzett munka összege konstans:

$$E_m - W_k = const.$$

Vagyis ennek idő deriváltja nulla:

$$\frac{d}{dt}(E_m - W_k) = 0$$

A mozgási energia és annak idő deriváltja:

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) \Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}m(2\dot{r}\ddot{r} + \omega^2 2r\dot{r}) = m\dot{r}(\underbrace{\ddot{r} + r\omega^2}_{2r\omega^2}) = m\omega^2\dot{r^2}$$

Tehát azt kaptuk, hogy a mi teljesítményünk:

$$P_k = \frac{dW_k}{dt} = m\omega^2\dot{r^2}$$

Tehát az általunk kifejtett forgatónyomaték:

$$M_k = m\omega\dot{r^2} = ml^2\omega^2\mathrm{sh}(2\omega t)$$

Tehát valóban ugyanazt kaptuk a két esetben.

Most nézzük meg azt az esetet amikor nem hat külső erő, vagyis nem állandó a rúd szögsebessége, hanem a test mozgása csökkenti. Az általánosság kedvéért vegyük a rúdat, véges L hosszúságúnak és véges M tömegűnek. Nagyon érdekes eredményt kapunk majd. És ekkor majd megnézzük azt a határátmenetet amikor végtelen hosszú a rúd és 0 a tömege.
Szóval, mivel a külső erők nem hatnak, ezért nincsen külső erőknek forgatónyomatéka a rendszerre, tehát a rendszer összperdülete megmarad. Vagyis ha kezdetben a kis test l távolságra volta tengelytől, és ekkor ω_0 szögsebességgel pörgött a rúd, akkor igaz a következő (természetesen most

azt vizsgáljuk amikor a test benne van a csőben) mivel a test pontszerűnek tekinthető, ezért a csövet, most egy sima rúddal közelítem:

$$\left(\frac{1}{3}ML^2 + ml^2\right) = \left(\frac{1}{3}ML^2 + mr^2\right)\omega \Longrightarrow \omega(r) = \frac{1 + \frac{3ml^2}{ML^2}}{1 + \frac{3mr^2}{ML^2}}\omega_0$$

Legyen $\lambda^2 = \frac{ML^2}{3m}$, és $\alpha^2 = \lambda^2 + l^2$
Ezzel a szögsebesség:

$$\omega(r) = \frac{\alpha^2}{\lambda^2 + r^2}\omega_0$$

A radiális mozgás egyenlete nem változik, így az marad:

$$\ddot{r} = \omega^2 r$$

Ide beírva az $\omega(r)$-re kapott összefüggést:

$$\ddot{r} = \alpha^4\omega_0^2\frac{r}{(\lambda^2 + r^2)^2}$$

írjuk át $\ddot{r}$-t a szokásos módon:

$$\ddot{r} = v\frac{dv}{dr}$$

Ahol $v = \dot{r}$. vagyis integrálva az egyenletet:

$$\frac{v^2}{2} = \alpha^4\omega_0^2\int_l^r \frac{r'}{(\lambda^2 + r'^2)}dr'$$

Végezzük el ezt az integrált:

$$\int \frac{r'}{(\lambda^2 + r'^2)}dr' = \frac{1}{\lambda^4}\int \frac{r'}{\left(1 + \frac{r'^2}{\lambda^2}\right)^2}dr'$$

Legyen $r' = \lambda \mathrm{sh} u$ ekkor $dr = \lambda \mathrm{ch} u\, du$. Vagyis:

$$\frac{1}{\lambda^2}\int \frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^3 u}du = \frac{1}{\lambda^2}\int \mathrm{sh}u \cdot \mathrm{ch}^{-3}u\, du = -\frac{1}{2\lambda^2}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}^2 u}\right] = -\frac{1}{2\lambda^2}\left[\frac{1}{1 + \mathrm{sh}^2 u}\right] = -\frac{1}{2\lambda^2}\left[\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + r'^2}\right]$$

Tehát a sebesség négyzete:

$$\dot{r}^2 = v^2 = \alpha^4\omega_0^2\left[\frac{1}{\lambda^2 + l^2} - \frac{1}{\lambda^2 + r^2}\right] = \frac{\alpha^4\omega_0^2}{\lambda^2 + l^2}\left[1 - \frac{\lambda^2 + l^2}{\lambda^2 + r^2}\right]$$

Integrálva a következőt kapjuk:

$$\int_l^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 + l^2}{\lambda^2 + r'^2}}} = \frac{\alpha^2\omega_0}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}}t$$

Most már csak ezt az integrált kell elvégeznünk.

$$\int_l^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 + l^2}{\lambda^2 + r'^2}}} = \int_l^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{r'^2 - l^2}{\lambda^2 + r'^2}}} = \int_l^r \sqrt{\frac{\lambda^2 + r^2}{r'^2 - l^2}}\, dr' = \frac{1}{l}\int_l^r \sqrt{\frac{\lambda^2 + r^2}{\frac{r'^2}{l^2} - 1}}\, dr'$$

Most legyen $r = l\mathrm{ch}u$ ekkor $dr = l\mathrm{sh}u\, du$. Ezzel az alábbi 'egyszerűbbnek' tűnő alakot kapjuk:

$$\int_0^{\mathrm{arch}\frac{r}{l}} \sqrt{\lambda^2 + l^2\mathrm{ch}^2 u}\, du = \sqrt{\lambda^2 + l^2}\int_0^{\mathrm{arch}\frac{r}{l}} \sqrt{1 + \frac{l^2}{\lambda^2 + l^2}\mathrm{sh}^2 u}\, du$$

Ez viszont nem sokáig tűnik szépnek, ugyanis legyen $u = -i \cdot \phi \Longrightarrow du = -i\, d\phi$. itt $i^2 = -1$. Ekkor:

$$\mathrm{sh}u = \mathrm{sh}(-i\phi) = \frac{e^{-i\phi} - e^{i\phi}}{2} = -i \sin\phi$$

Legyen továbbá: $k^2 = \frac{l^2}{\lambda^2+l^2}$.
Tehát ezekkel a fenti integrál:

$$-i\sqrt{\lambda^2+l^2} \int\limits_0^{-i\mathrm{arch}\frac{r}{l}} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\, d\phi$$

Ez pedig nem más mint az öreg barátunk, a másodfajú elliptikus integrál. Láthatóan ez csak 'bújtatottan' komplex, ugyanis igazából valós.
Tehát visszatérve az eredeti egyenletünkre, a következőt kaptuk a $t(r)$ függvényre:

$$E\left(\frac{l}{\sqrt{\lambda^2+l^2}}\middle| -i\mathrm{arch}\frac{r}{l}\right) = i\omega_0 t$$

Ahol $E(k|\psi) = \int_0^\psi \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\, d\phi$. (Itt most persze kéne foglalkozni azzal, hogy komplex-vagy nem komplex stb. stb. de ezt elhagyjuk)...
Tehát most már csak ezt invertálnunk kell, és onnan megkapjuk az $r(t)$ függvényt elvben.
Most tekintsük a mi konkrét esetünket. Vagyis tömegtelen végtelen hosszú rúd, azaz $\lambda = 0$. Ekkor az integrál a baloldalon:

$$E(1|-i\mathrm{arch}\frac{r}{l}) = \int\limits_0^{-i\mathrm{arch}\frac{r}{l}} \sqrt{1-\sin^2\phi}\, d\phi = \int\limits_0^{-i\mathrm{arch}\frac{r}{l}} \cos\phi\, d\phi = \sin\left[-i\mathrm{arch}\frac{r}{l}\right] =$$

$$= \sin\left[-i\ln\left(\frac{r}{l} + \sqrt{\frac{r^2}{l^2}-1}\right)\right]$$

Ezt kifejezhetjük a *sin*..-nak az $e^{\cdots}$-os formájával és láthatóan kipotyognak az $\ln\ldots$-ek, és az i-vel átszorozhatunk az egyenlet másik oldalára, majd végül rendezés után a következő marad:

$$\sqrt{\frac{r^2}{l^2}-1} = \omega_0 t$$

Tehát a test forgástengelytől való távolságának időfüggése:

$$r(t) = l\sqrt{1+\omega_0^2 t^2}$$

Érdekes milyen egyszerű eredményt kaptunk...

3. Feladat:
A megadott potenciál:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda x^4$$

Legyen $\mu = \frac{1}{2}m\omega^2$, és a részecske amplitúdója A. Ekkor az energiája $E = V(A) = \mu A^2 + \lambda A^4$. Vagyis a részecske periódusideje:

$$T(A) = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} = \sqrt{2m} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\mu(A^2-x^2)+\lambda(A^4-x^4)}} =$$

$$= \sqrt{2m}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{(A^2-x^2)[\mu+\lambda(A^2+x^2)]}} = \frac{\sqrt{2m}}{A}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)\left[\mu+\lambda A^2\left(1+\frac{x^2}{A^2}\right)\right]}}$$

Most legyen $x = A\cos\phi$ ekkor $dx = -A\sin\phi\, d\phi$ és a határok $0 \to \pi/2$ és $A \to 0$, azaz:

$$T(A) = \sqrt{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{\mu+\lambda A^2(1+\cos^2\phi)}} = \sqrt{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{\mu+2\lambda A^2-\lambda A^2\sin^2\phi}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{\mu+2\lambda A^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{\lambda A^2}{\mu+2\lambda A^2}\sin^2\phi}}$$

Legyen $k^2 = \frac{\lambda A^2}{\mu+2\lambda A^2}$. De ekkor kell kikötéseket tennünk. Tudjuk, hogy $\mu > 0$ mivel $\omega^2 > 0$ és $m > 0$, $A^2 > 0$ is teljesül, tehát csak λ-ra kell kikötéseket tennünk. $k + 2\lambda A^2 > 0$ kell teljesüljön, mivel a periódusidő egy valós szám. Tehát $k^2 \geq 0$ akkor fog teljesülni, ha $\lambda \geq 0$. Vagyis λ csak nemnegatív értékeket vehet fel. Ha ez nem teljesül akkor k komplex lesz, de az elliptikus integrált csak valós k-kra definiáltuk. Tehát ezzel a jelöléssel a periódusidő:

$$T(A) = \sqrt{\frac{2mk^2}{\lambda A^2}}K(k)$$

Ahol:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

A teljes elsőfajú elliptikus integrál. Tehát bebizonyítottuk az állítást és visszavezettük a periódusidőt az elsőfajú elliptikus integrálra.

4. Feladat: Mutasson függőlegesen felfelé a z tengely. Ekkor a függőlegesen felfelé dobott test mozgásegyenlete amikor felfelé halad:

$$m\ddot{z} = -mg - mk\dot{z}^2 \Longrightarrow \ddot{z} = -g - k\dot{z}^2$$

Amikor lefelé esik vissza:

$$m\ddot{z} = -mg + mk\dot{z}^2 \Longrightarrow \ddot{z} = -g + k\dot{z}^2$$

Nézzük először azt az esetet amikor felfelé halad. Ekkor a mozgásegyenlete:

$$\ddot{z} = -g - k\dot{z}^2$$

Nekünk csak a test 'legmagasabb' helyzetét és majd a leérkezéskori sebességét kell meghatároznunk, így elég csak a $v(z)$ sebesség hely függvényt megadnunk. Az időfüggvényeket nem kell.
Írjuk át tehát a hely második deriváltját a szokásos módon:

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d\dot{z}}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz}v = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dz} = \frac{1}{2}(v^2)'$$

Ezt visszaírva a diffegyenletbe:

$$\frac{1}{2}(v^2)' + kv^2 = -g$$

Láthatóan érdemes használni a $v^2 = u$ helyettesítést, ugyanis ekkor:

$$u' + 2ku = -2g$$

Ez pedig nem más mint egy sima állandó együtthatós lineáris inhomogén diffegyenlet. Érdemes $u = Ae^{\lambda z} + B$ alakú próbafüggvényt választanunk, ezt az egyenletbe írva:

$$(\lambda + 2k)Ae^{\lambda z} + 2kB = -2g$$

Ahonnan: $\lambda = -2k$ és $B = -\frac{g}{k}$. Tehát a diffegyenlet általános megoldása:

$$u(z) = v_f^2(z) = Ae^{-2kz} - \frac{g}{k}$$

Na de adott a kezdeti feltétel: $v_f(z = 0) = v$ ahonnan $A = v + \frac{g}{k}$. Tehát a felfelé mozgó részecske sebességnégyzetének helyfüggése:

$$v_f^2(z) = \left(v + \frac{g}{k}\right) e^{-2kz} - \frac{g}{k}$$

Addig megy fel a test amíg a sebessége null lesz, azaz $v_f(z_{max}) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Kapásból láthatjuk, hogy:

$$z_{max} = \frac{1}{2k} \ln\left(1 + \frac{kv^2}{g}\right)$$

Teljesen hasonló módon megoldható a másik diffegyenlet, azaz amikor a test már lefelé mozog. Itt a sebesség helyfüggése:

$$v_l^2(z) = Ce^{2kz} + \frac{g}{k}$$

Itt illesztenünk kell a kezdeti feltételt az előző sebességhez, azaz $v_l(z_{max}) = 0$ a kezdeti feltétel. Ekkor a $C = -\frac{g}{k\left(1+\frac{kv^2}{g}\right)}$ Tehát a sebessége amikor lefelé halad:

$$v_l^2(z) = \frac{g}{k}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{kv^2}{g}} e^{2kz}\right]$$

Tehát a test v_t sebessége a földetérés pillanatában a $v_t = v_l(z = 0)$-ből kapjuk:

$$v_t = -\frac{v}{\sqrt{1 + \frac{kv^2}{g}}}$$

5. Feladat:
A megadott potenciál:

$$V(x) = \lambda x^4 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Most akkor tekintsük a harmonikus tagot perturbációnak, és vezessük be a következő jelölést: $\epsilon = \frac{1}{2} m\omega^2$, tehát ϵ most 'kicsi', mivel a harmonikus tag a perturbáció.
Ha az amplitúdó A akkor az energia: $E = V(A) = \lambda A^4 + \epsilon A^2$.
Tehát a periódusidő:

$$T(A) = \sqrt{2m} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\lambda(A^4 - x^4) + \epsilon(A^2 - x^2)}} = \sqrt{2m} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\lambda(A^4 - x^4)\left(1 + \epsilon \frac{A^2 - x^2}{\lambda(A^4 - x^4)}\right)}}$$

Most fejtsük sorba a fenti kifejezést:

$$T(A) = \sqrt{\frac{2m}{\lambda}} \int_0^A \frac{1}{\sqrt{A^4 - x^4}} \left[1 - \frac{\epsilon(A^2 - x^2)}{2\lambda(A^4 - x^4)} \right] dx$$

Nézzük most csak az integrált:

$$\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}} - \frac{\epsilon}{2\lambda} \int_0^A \frac{A^2 - x^2}{(A^4 - x^4)^{3/2}} dx$$

Vezessünk be egy új változót $:x = Au$ ekkor $dx = Adu$. Ezzel a fenti integrálok:

$$\frac{1}{A} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} - \frac{\epsilon}{2\lambda A^3} \int_0^1 \frac{1 - u^2}{(1 - u^4)^{3/2}} du$$

Tehát a periódusidő:

$$T(A) = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{2m}{\lambda}} \left[\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} - \frac{m\omega^2}{4\lambda A^2} \int_0^1 \frac{1 - u^2}{(1 - u^4)^{3/2}} du \right]$$

Nézzük meg most az integrálokat. Az elsőnél használjuk a $v = u^4$ helyettesítést. Ekkor $du = \frac{1}{4} v^{-3/4} dv$:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} = \frac{1}{4} \int_0^1 v^{-\frac{3}{4}} (1 - v)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

A másik integrált még a Gamma függvényekkel sem tudjuk kifejezni, így azt most csak jelölöm egy betűvel:

$$L = \int_0^1 \frac{1 - u^2}{(1 - u^4)^{3/2}} du$$

Tehát ezekkel a periódusidő:

$$T(A) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \frac{1}{A} \sqrt{\frac{2m}{\lambda}} \left[1 - \frac{L \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{m\omega^2}{\lambda A^2} \right]$$