2. Házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
   A gyakorlaton levezettük, hogy szimmetrikus potenciál esetén, a hely a potenciál függvényében az alábbi képlettel számolható ki a periódusisőből:

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{T(E)}{\sqrt{V-E}} dE$$

Na de most nekünk adott a periódusidő az energia függvényében:

$$T(E) = \alpha E^\beta$$

Vagyis:

$$x(V) = \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{E^\beta}{\sqrt{V-E}} dE$$

Alakítgatva:

$$x(V) = \frac{\alpha \cdot V^\beta}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{\left(\frac{E}{V}\right)^\beta}{\sqrt{V}\sqrt{1-\frac{E}{V}}} dE = \frac{\alpha \cdot V^{\beta-\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{\left(\frac{E}{V}\right)^\beta}{\sqrt{1-\frac{E}{V}}} dE$$

Használjuk a következő helyettesítést: $u = \frac{E}{V} \Longrightarrow dE = V \cdot du$
Ezt a fentibe írva, a következőt kapjuk:

$$x(V) = \frac{\alpha \cdot V^{\beta+\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^1 \frac{u^\beta}{\sqrt{1-u}} du$$

Tekintsük most csak az integrált:

$$\int_0^1 \frac{u^\beta}{\sqrt{1-u}} du = \int_0^1 u^\beta (1-u)^{-\frac{1}{2}} du$$

Az nem más mint a közismert béta-függvény egyik esete. A béta-függvény:

$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du$$

Tehát a mi integrálunk éppen: $B\left(\beta+1, \frac{1}{2}\right)$.

Na de a béta-függvényeket kifejezhetjük a még közismertebb gamma-függvényekkel, ugyanis ismert az alábbi formula:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

A mi esetünkben:

$$B\left(\beta+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}$$

Visszatérve a feladatra tehát:

$$x(V) = \frac{\alpha \cdot V^{\beta+\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\pi m}} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}$$

Tehát innen a keresett potenciál:

$$V(x) = \left[\frac{2\sqrt{2\pi m}}{\alpha} \frac{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\beta+1)}\right]^{\frac{2}{2\beta+1}} \cdot x^{\frac{2}{2\beta+1}}$$

Vagyis a potenciál a helynek tényleg hatványfüggvénye, és a kitevő: $n = \frac{2}{2\beta+1}$. Ez meg is egyezik a korábbi számolásainkkal, mert például, $\beta = 0$ esetén a periódusidő független az energiától, és azt kapjuk, hogy ekkor $n = 2$ vagyis a potenciál négyzetes függvénye a helynek, és pont amikor így közelítettünk egy potenciált a periódusidő valóban nem függött az energiától.

2. Feladat:
Mivel a potenciál szimmetrikus ezért ismét használhatjuk a következő képletet:

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{T(E)}{\sqrt{V-E}} dE$$

Ebben az esetben $T(E) = a + bE$ a periódus idő. Ezt beírva az előző integrálba:

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{a+bE}{\sqrt{V-E}} dE = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \left[a \int_0^V \frac{dE}{\sqrt{V-E}} + b \int_0^V \frac{E}{\sqrt{V-E}} dE \right]$$

Használva a szokásos helyettesítést: $u = E/V \Longrightarrow dE = V du$ a következőt kapjuk:

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \left[a\sqrt{V} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} + bV\sqrt{V} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du \right]$$

A fenti integrálok kifejezhetők a béta-függvénnyel majd a gamma függvénnyel:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} = B(1, 1/2) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)} = 2$$

$$\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du = B(2, 1/2) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/2)} = \frac{4}{3}$$

Tehát a következőt kaptuk:

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \left[2a\sqrt{V} + \frac{4b}{3} V\sqrt{V} \right]$$

Átrendezzük az egyenletet következő módon:

$$\left(\sqrt{V}\right)^3 + \frac{3a}{2b}\sqrt{V} - \frac{3\pi\sqrt{2m}}{2b} x = 0$$

Ez láthatóan egy hiányos harmadfokú egyenlet a potenciál négyzetgyökére. Vezessük be a következő jelöléseket:$v = \sqrt{V}$, $p = \frac{3a}{2b}$ és $q = \frac{3\pi\sqrt{2m}}{2b}$.
Ezzel a fenti egyenletünk:

$$v^3 + pv - qx = 0$$

Írjuk fel v-t a következő alakban: $v = y - \frac{p}{3y}$. Ezt beírva az egyenletbe egy csomó tag kiesik és marad:

$$y^3 - \frac{p^3}{27y^3} - qx = 0 \Longrightarrow y^6 - qxy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Ez pedig egy másodfokú egyenlet y^3-re. Tehát:

$$y^3 = \frac{qx \pm \sqrt{q^2x^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Ezt visszaírva az eredeti kifejezésbe v-re a következőt kapjuk:

$$v = \sqrt[3]{\frac{qx \pm \sqrt{q^2x^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{qx \pm \sqrt{q^2x^2 + \frac{4p^3}{27}}}}$$

Mivel v a négyzetgyöke V-nek, és a potenciál a helynek valós függvénye ezért csak a +-os megoldás lesz jó.
Hosszas alakítgatások után végül v a következő alakba hozható, és ennek a négyzete pedig a potenciál a hely függvényében:

$$V(x) = \left[\frac{\sqrt[3]{2}\left(9qx + \sqrt{81q^2x^2 + 12p^3}\right)^{2/3} - 2p\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{36}\left(9qx + \sqrt{81q^2x^2 + 12p^3}\right)^{1/3}} \right]^2$$

Tehát ez lesz a potenciál a hely függvényében.

3. Feladat:
Először is nézzük meg mi van ha van egy tetszőleges y tengelyre szimmetrikus görbénk aminek a legalsó pontja az origóban van, és azon mozog egy tömegpont gravitációs erőtérben. Tegyük fel, hogy a tömegpontot y_0 magasságból indul. Ekkor az energia megmaradás:

$$mgy_0 = mgy + \frac{1}{2}m\dot{s}^2$$

Ahol s az ívhossz. Rendezve:

$$\dot{s} = -\sqrt{2g(y_0 - y)}$$

Azért a negatív előjeleset választottuk, mert 'balról' indult és 'jobbra' megy először, azaz y csökkenésével nő a sebessége...Szóval azaz idő amíg leér a pálya aljára, vagyis az origóba, y_0-nak lesz egy függvénye:

$$T(y_0) = -\int_{y_0}^{0} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = \int_{0}^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = \int_{0}^{y_0} \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \frac{ds}{dt} \cdot dt$$

Ha a görbét t-vel paraméterezzük, $(x(t), y(t))$ és ekkor az ívhosszat is tudjuk t-vel paraméterezni $s(t)$.
Most térjünk rá a konkrét feladatra. A görbénk voltaképpen ciklois. Ezt a következőképpen tudjuk paraméterezni, hogy a fenti tulajdonságai legyen:

$$x(t) = r(t + \sin t)$$
$$y(t) = r(1 - \cos t)$$

Na most nézzük meg az ívhosszat:

$$s = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \int dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

behelyettesítve az egyes deriváltakat:

$$s(t) = r\int dt\sqrt{(1+\cos t)^2 + \sin^2 t} = r\int dt\sqrt{1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = r\sqrt{2}\int dt\sqrt{1+\cos t} =$$

$$= r\sqrt{2}\int dt\sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = 2r\int \cos\frac{t}{2}dt = 4r\sin\frac{t}{2} + C$$

Tehát a szükséges derivált ami kell nekünk:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4r\sin\frac{t}{2} + C\right) = 2r\cos\frac{t}{2}$$

Ezzel az idő:

$$T(y_0) = \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \frac{ds}{dt} \cdot dt = \int_0^{y_0} \frac{2r\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dt$$

Legyen $y_0 = r(1 - \cos t_0) \Longrightarrow t_0 = \arccos\left(1 - \frac{y_0}{r}\right)$. Vagyis az integrál:

$$T(t_0) = r\sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{t_0} \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{r(1-\cos t_0) - r(1-\cos t)}} dt = \sqrt{\frac{2r}{g}} \int_0^{t_0} \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{\cos t - \cos t_0}} dt$$

Koncentráljunk az integrálra és alakítgassuk(most nem írom ki a határokat):

$$\int \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{\cos t - \cos t_0}} dt = \int \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} - \cos t_0}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\frac{t}{2} - \cos t_0\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}\right)}} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{(1-\cos t_0) - (1+\cos t_0)\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos t_0}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{1+\cos t_0}{1-\cos t_0}\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}}$$

Sőt: $1 + \cos t_0 = 2\cos^2\frac{t_0}{2}$ és $1 - \cos t_0 = 2\sin^2\frac{t_0}{2}$, vagyis a fenti:

$$\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{t_0}{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\mathrm{tg}\frac{t_0}{2}}\right)^2}}$$

Na de ugyanezt az integrált kellett kiszámolnunk az előző háziban, legyen $k = 1/\mathrm{tg}\frac{t_0}{2}$, ekkor az integrálás:

$$\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{t_0}{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\mathrm{tg}\frac{t_0}{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{t_0}{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - (k\mathrm{tg}\frac{t}{2})^2}}$$

használhatjuk a következő helyettesítést: $k\mathrm{tg}\frac{t}{2} = \sin u$.

Ekkor $\frac{k}{2\cos^2 t}dt = \cos u\, du$ Ahonnan: $dt = \cos^2 t\frac{2\cos u}{k}du$
Ezzel:

$$dt = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 u}{k^2}} \frac{2\cos u}{k} du$$

Vagyis az integrálunk:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - (k\mathrm{tg}\frac{t}{2})^2}} = \frac{2}{k}\int \frac{\cos u du}{\left(1 + \frac{\sin^2 u}{k^2}\right)\underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 u}}_{\cos u}} = \frac{2}{k}\int \frac{du}{1 + \frac{\sin^2 u}{k^2}}$$

Alakítsuk tovább az integrált. Felhasználjuk a $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ összefüggést:

$$\frac{2}{k}\int \frac{du}{1 + \frac{\sin^2 u}{k^2}} = \frac{2}{k}\int \frac{du}{\cos^2 u + \sin^2 u + \frac{\sin^2 u}{k^2}} = \frac{2}{k}\int \frac{du}{\cos^2 u + \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\sin^2 u} =$$

$$= \frac{2}{k}\int \frac{du}{\cos^2 u\left(1 + \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}\right)} = \frac{2}{k}\int \frac{du}{\cos^2 u\left(1 + \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\mathrm{tg}^2 u\right)}$$

Most végezzünk el még egy helyettesítést: $v = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\mathrm{tg}u$. Ekkor $du = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\cos^2 u\, dv$. Azaz:

$$\frac{2}{k}\cdot\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\int\frac{\cos^2 u dv}{\cos^2 u(1+v^2)} = \frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\int\frac{dv}{1+v^2}$$

Ez pedig már egy alapintegrál amit könnyen elvégezhetünk:

$$\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\int\frac{dv}{1+v^2} = \frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\mathrm{arctg}v$$

Tehát az eredeti integrálunk a t változóval kifejezve:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{1-(k\mathrm{tg}\frac{t}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\mathrm{tg}\left(\arcsin\left[k\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right]\right)\right] + C$$

És:

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\frac{t_0}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\cos^2\frac{t_0}{2}}{\sin^2\frac{t_0}{2}}}} = \frac{\sin\frac{t_0}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{t_0}{2}+\sin^2\frac{t_0}{2}}} = \sin\frac{t_0}{2}$$

Azaz:

$$\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{t_0}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(k\mathrm{tg}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{t_0}{2}}2\sin\frac{t_0}{2}\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{\cos\frac{t_0}{2}}\mathrm{tg}\left(\arcsin\left[\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\mathrm{tg}\frac{t_0}{2}}\right]\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{\cos\frac{t_0}{2}}\mathrm{tg}\left(\arcsin\left[\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\mathrm{tg}\frac{t_0}{2}}\right]\right)\right]$$

Beírva a határokat:

$$\int_0^{t_0}\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{\cos t-\cos t_0}}dt = \sqrt{2}\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{\cos\frac{t_0}{2}}\mathrm{tg}\left(\arcsin\left[\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\mathrm{tg}\frac{t_0}{2}}\right]\right)\right]_0^{t_0} = \sqrt{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Vagyis az az idő amíg a kitérített részecske a pálya aljára ér:

$$T(t_0) = \sqrt{\frac{2r}{g}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

A részecske periódusideje ennek a négyszerese:

$$T_p = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

És láthatóan ez valóban független az amplitúdótól.

4. Feladat: A megadott potenciál:

$$V(x) = x^6 - 2x^4 + x^2$$

Ott lesznek az egyensúlyi helyzetek, ahol ennek az első deriváltja nulla, és ezen egyensúlyi helyzetek stabilitása a második derivált előjelétől fog függni az adott pontban, ha a második derivált pozitív akkor stabil, ha negatív akkor instabil lesz az adott egyensúlyi helyzet.
Számoljuk ki először az első deriváltat, és onnan az egyensúlyi helyzeteket:

$$V'(x) = 6x^5 - 8x^3 + 2x = 2x(3x^4 - 4x^2 + 1) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0\ x_{2,3} = \pm 1\ x_{4,5} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tehát ezen az öt helyen lesz egyensúlyi helyzet.
Most vizsgáljuk meg a második derivált előjeleit:

$$V''(x) = 30x^4 - 24x^2 + 2 = 2(15x^4 - 12x^2 + 1)$$

A zérushelyek:

$$15x^4 - 12x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{15}$$

Vagyis a második derivált ott lesz nagyobb nulla ahol:

$$0 \leq x^2 < \frac{6-\sqrt{21}}{15} \quad , \quad x^2 > \frac{6+\sqrt{21}}{15}$$

Azaz x-re:

$$x < -\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{15}} \quad , \quad -\sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{15}} < x < \sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{15}} \quad , \quad \sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{15}} < x$$

Írjuk át numerikus értékre a gyököket, hogy lehessen számolni is. Szóval a fenti sor:

$$x < -0,84 \quad , \quad -0,31 < x < 0,31 \quad , \quad 0,84 < x$$

Most már csak azt kell megnéznünk, hogy az elsőderivált zérushelyei beleesnek e ezekbe az intervallumokba.
$x_1 = 0$ láthatóan beleesik, tehát ez stabil. $x_{2,3} = \pm 1$ láthatóan ez is beleesik tehát ez is stabil. $x_{4,5} = \pm 0,577$ Ez viszont nem esik bele a fenti intervallumokba, így ez nem lesz stabil.
Tehát a stabil egyensúlyi helyzetek: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.
Amikor kicsit kitérítjük az egyensúlyi helyzetek körül az azt jelenti, hogy ott lokálisan négyzetes potenciált feltételezünk. Ekkor a 'rugóállandó' éppen a potenciál második deriváltja lesz az adott helyen.
Azaz nézzük először az első egyensúlyi helyzetet.
Itt $x_1 = 0$. Vagyis a második derivált itt:

$$k_0 = V''(x_1) = 30x^4 - 24x^2 + 2|_{x=0} = 2$$

vagyis a periódus idő:

$$T_{0h} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2}}$$

(Itt természetesen már rég más egységekben vagyunk...)
Most nézzük a többi egyensúlyi helyzetet. Láthatóan $x_{2,3} = \pm 1$ esetén mindkét helyen ugyanakkora lesz a második derivált:

$$k_1 = k_{-1} = V''(1) = 30x^4 - 24x^2 + 2|_{x=1} = 8$$

Ahonnan a periódusidő:

$$T_{1h} = T_{-1h} = \pi\sqrt{\frac{m}{2}}$$

Most nézzük meg az első anharmonikus korrekciókat. Ekkor a egyensúlyi helyzetek körül lokálisan így közelítjük a potenciált:

$$V_{eh} \approx \frac{k}{2}x^2 + \mu x^3 + \lambda x^4$$

Számoljuk ki a μ-t és λ együtthatókat.

$$V'''(x) = 120x^3 - 48x \Longrightarrow V'''(0) = 0 \quad , \quad V'''(1) = 72 \quad , \quad V'''(-1) = -72$$

Ebből pedig:

$$\mu_0 = 0 \quad , \quad \mu_1 = \frac{72}{3!} = 12 \quad , \quad \mu_{-1} = -12$$

Most nézzük a negyedik deriváltat:

$$V''''(x) = 360x^2 - 48 \Longrightarrow V''''(0) = -48 \quad , \quad V''''(1) = V''''(-1) = 312$$

Ahonnan a λ együtthatók:

$$\lambda_0 = -\frac{48}{4!} = -2 \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_{-1} = \frac{312}{4!} = 13$$

A gyakorlaton be lett mutatva az alábbi képlet, és az előadáson le is lett vezetve, hogy ilyen anharmonikus potenciál és A amplitúdó esetén mennyi a periódusidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left[1 + A^2\left(\frac{5}{4}\frac{\mu^2}{k^2} - \frac{3}{2}\frac{\lambda}{k}\right)\right]$$

Ebbe a képletbe beírva a fenti értékeket a k-ra μ-re és λ-ra, a következőket kapjuk:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2}}\left[1 + \frac{3}{2}A^2\right]$$

És:

$$T_1 = T_{-1} = \pi\sqrt{\frac{m}{2}}\left[1 + \frac{3}{8}A^2\right]$$

Tehát ezek lesznek a periódusidők ha belevesszük az első anharmonikus korrekciókat.

5. Feladat:

Először is paraméterezzük az ellipszist. A nagytengely az a a kistengely a b. Az ellipszist úgy veszem fel, hogy az függőleges irányú nagytengely alsó végpontja épp az origóban legyen. Vagyis:

$$x(t) = \frac{b}{2}\cos t$$
$$y(t) = \frac{a}{2}(1 + \sin t)$$

Legyen az ellipszis egy adott pontjához húzott érintőnek a vízszintessel bezárt szöge α.
Ekkor a részecske pályán haládásához szükséges nyomóerő amit az ellipszisnek ki kell fejtenie rá:

$$N = m\frac{v_R^2}{R} \pm mg\cos\alpha$$

Ahol R az ellipszis görbületi sugara egy adott pontban, v_R pedig az itteni sebessége. Azért van $\pm$ mert az alsó fél-ellipszisben a nehézségi erő ellentétes irányú a nyomóerővel, és a felső félellipszisben pedig megegyező irányú.(Ezt az előjel 'zavart' mindjárt kiküszöböljük...).
Szóval fejezzük ki először a $\cos\alpha$-t a tgα-val, amiről meg tudjuk, hogy a 'derivált':

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} \ , \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{a}{b\mathrm{tg}t} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2\mathrm{tg}^2 t}}} = \frac{b\sin t}{\sqrt{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}}$$

Na már most a fentiekben a gyökvonásoknál sehol nem abszolútértékeztem. De a t paraméterről tudunk néhány dolgot. Méghozzá azt, hogy amikor $0 \leq t \leq \pi$ akkor az ellipszis felső részét kapjuk, és amikor $\pi \leq t \leq 2\pi$ akkor az ellipszis alsó részét. Tehát a felső részen a $\sin t$ pozitív lesz és az alsó részen negatív. Láthatóan a $\cos\alpha$ előjele meg fog egyezni a $\sin t$ előjelével. Tehát az előző 'erő' egyenletünkben a negatív előjelet 'kell' választanunk mint az $mg\cos\alpha$ tag előjelét, ekkor kapjuk kapjuk ugyanis helyesen a fenti képletből az erőket, ugyanis ha az alsó felén vagyunk akkor $\sin t$ előjele negatív, tehát $-mg\cos\alpha$ előjele pozitív, és ez kell nekünk. Vagyis a fenti erőegyenlet:

$$N = m\frac{v_R^2}{R} - mg\frac{b\sin t}{\sqrt{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}}$$

Most már csak a sebességet és a görbületi sugarat kell meghatároznunk. A görbületi sugarát egy már az előző háziban meg kellett határozni, így most nem vezetem le megint, hanem csak a végeredményt írom:

$$R(t) = \frac{(b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)^{3/2}}{2ab}$$

A sebességet az energiamegmaradásból határozhatjuk meg:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy + \frac{1}{2}mv_R^2 \Longrightarrow v_R^2 = v^2 - 2gy = v^2 - ag(1+\sin t)$$

Ezeket az erőegyenletbe írva, majd kissé hosszadalmas átalakítások után a következőt kapjuk a nyomóerőre:

$$N(t) = mb\frac{2a(v^2-ag) - 3a^2g\sin t + g(a^2-b^2)\sin^3 t}{(b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

Érdemes még vizsgálgatnunk ezt az erőt. Ugye ahhoz, hogy a feladat feltétele szerint a részecske végigmennjen az ellipszisen ennek az erőnek soha nem szabad nullának vagy annál kisebbnek lennie, hiszen ahol nulla lesz, ott el fog válni a pályától. Meg is tudjuk adni, hogy hol válhat el esetlegesen az ellipszistől. Ehhez láthatóan az alábbi hiányos harmadfokú egyenletet kellene megoldanunk:

$$g(a^2-b^2)\sin^3 t_0 - 3a^2g\sin t_0 + 2a(v^2-ag) = 0$$

Na de most minket az érdekel, hogy mikor fog végig menni a pályán. Azaz $N > 0$ teljesüljön minden t-re:

$$2a(v^2-ag) > 3a^2g\sin t - g(a^2-b^2)\sin^3 t$$

Nyilván ha az egyenlőtlenség baloldala a jobb oldal maximumánál is nagyobb akkor mindig teljesül az egyenlőtlenség. Meg kell határoznunk tehát a jobb oldal maximumát.
Ehhez vegyük az első deriváltját:

$$\frac{d}{dt}(3a^2g\sin t - g(a^2-b^2)\sin^3 t) = 3a^2g\cos t - g(a^2-b^2)3\sin^2 t\cos t = 3g\cos t(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t) = 0$$

A fenti utolsó tagban a zárójeles mennyiség láthatóan soha nem lesz 0, tehát akkor lesz szélsőérték ha $\cos t = 0$, na de ekkor $\sin t = \pm 1$. Nézzük meg a második deriváltat is, hogy megtudjuk a szélsőértékek fajtáját ha $\cos t = 0$:

$$\frac{d}{dt}(3g\cos t(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t))|_{\cos t=0} = -3g\sin t[b^2 + (a^2-b^2)(2\cos t + \cos^2 t)]_{\cos t=0} = -3gb^2\sin t$$

Akkor lesz egy helyen maximum, ha a második derivált negatív. Azaz ha most $\sin t = 1$ ez előzőek szerint.
Tehát ekkor az eredeti egyenlőtlenség:

$$2a(v^2-ag) > 3a^2g - g(a^2-b^2)$$

Rendezve, a következő feltételt kapjuk a kezdeti sebességre:

$$v^2 > \left(2a + \frac{b^2}{2a}\right)g$$

Tehát ha ez teljesül a kezdeti v sebességre, akkor a részecske tényleg végig fog haladni az ellipszisen és sehol nem válik el a felületéről.