1. Házi feladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
A feladat szerint az ellipszis kistengelye a nagytengelye b. Paraméterezzük az ellipszist az alábbi módon:

$$x = \frac{b}{2}\cos t$$

$$y = \frac{a}{2}\sin t$$

azaz:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{b}{2}\cos t \\ \frac{a}{2}\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az ismert képlet szerint egy $\mathbf{r}(t)$ görbe, görbületi sugarára:

$$\frac{1}{R} = \frac{|\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

A szükséges deriváltak:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{b}{2}\sin t \\ \frac{a}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{b}{2}\cos t \\ -\frac{a}{2}\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahonnan a vektoriális szorzatuk, és annak abszolút értéke:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{ab}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow |\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}| = \frac{ab}{4}$$

Az első derivált abszolútértékének a köbe:

$$|\dot{\mathbf{r}}|^3 = \frac{(b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)^{3/2}}{8}$$

Tehát a görbületi sugara az ellipszisnek:

$$R(t) = \frac{(b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)^{3/2}}{2ab}$$

Most nézzük meg mi van a tengelyek végpontjában.
A nagytengely egyik végpontjában $t = 0$ (a másik végpontjában nyilván ugyanakkora a görbületi sugár), a kistengely egyik végpontjában $t = \pi/2$. Tehát ezeken a helyeken a görbületi sugár a fenti képlet alapján:

$$R(0) = \frac{a^2}{2b} \qquad R(\pi/2) = \frac{b^2}{2a}$$

A tengelyek végpontjaiban a görbületi sugarat másképp is meghatározhatjuk. Erősítsuk egy kicsi testet két egymásra merőleges rugóra. Az egyik x irányú rezgés amplitúdója legyen $b/2$ a másik y irányúé $a/2$, mindkét rezgésnek legyen ugyanakkora ω körfrekvenciája(itt x és y egymásra merőleges tengelyek). A test elmozdulásfüggvényei a tengelyek irányában ekkor:

$$x(t) = \frac{b}{2}\cos\omega t \qquad y(t) = \frac{a}{2}\sin\omega t$$

A test sebességének komponensei:

$$\dot{x}(t) = -\frac{b\omega}{2}\sin\omega t \qquad \dot{y}(t) = \frac{a\omega}{2}\cos\omega t$$

és gyorsulása:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{b\omega^2}{2}\cos\omega t \qquad y(t) = -\frac{a\omega^2}{2}\sin\omega t$$

A nagytengely végpontjában legyen a görbületi sugár: R_b. A középiskolás ismereteink alapján ebben a pontban a test a_b gyorsulása:

$$a_b = \frac{v_b^2}{R_b}$$

Ezek nem mások mint ebben a pontban, a sebesség y amplitúdója és a gyorsulás y amplitudója, tehát: $a_b = b\omega^2/2$ és $v_b = a\omega/2$. Ezeket a fenti képletbe írva:

$$\frac{b\omega^2}{2} = \frac{a^2\omega^2}{4R_b} \Longrightarrow R_b = \frac{a^2}{2b}$$

Hasonlóan megkapható a kistengely végpontjában.

2. Adott tetszőleges $\lambda(t)$ valós változós valós értékű függvény. Képezzük a $\mathbf{r}(\lambda(t))$ valós változós vektor függvényt.
Nézzük mi ennek a függvények a t változó szerinti deriváltjait. A közvetett függvények deriválási szabályát használjuk:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}(\lambda(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \mathbf{r}' \cdot \dot{\lambda}$$

A második derivált:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}(\lambda(t))}{dt^2} = \frac{d}{dt}(r'\dot{\lambda}) = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\dot{\lambda} + \mathbf{r}'\ddot{\lambda} = \frac{d\mathbf{r}'}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}\cdot\dot{\lambda} + \mathbf{r}'\ddot{\lambda} = \mathbf{r}''\dot{\lambda}^2 + \mathbf{r}'\ddot{\lambda}$$

A vektoriális szorzatuk:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r})'' \times \mathbf{r}')\dot{\lambda}^3 + \underbrace{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}')}_{=0}\dot{\lambda}\cdot\ddot{\lambda} = (\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}')\dot{\lambda}^3 \Longrightarrow |\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}| = |\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'||\dot{\lambda}|^3$$

Tehát a képletbe írva:

$$\frac{1}{R} = \frac{|\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \frac{|\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'||\dot{\lambda}|^3}{|\mathbf{r}'|^3|\dot{\lambda}|^3} = \frac{|\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

Tehát valóban invariánst ad a képlet.

3. A potenciálunk $V(x) = -\lambda x^n$. A test összenergiája E. Repüljön ki a test az a ponttól. Ekkor a kirepülési idő a végtelenbe a gyakorlaton szerepelt képlet szerint:

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Először legyen az összenergia $E = 0$. Ekkor a kirepülési idő:

$$T_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{\lambda x^n}} = \sqrt{\frac{m}{2\lambda}} \int_a^\infty x^{-\frac{n}{2}}\, dx$$

Végezzük el a fenti integrált (ha $n \neq 2$):

$$\int_a^\infty x^{-\frac{n}{2}}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{2}{2-n} x^{\frac{2-n}{2}}\right]_a^b = \lim_{b\to\infty} \frac{2}{2-n} b^{\frac{2-n}{2}} - \frac{2}{2-n} a^{\frac{2-n}{2}}$$

vezessük be a következő jelölést:

$$k = \frac{2-n}{2}$$

Nézzük meg mit kapunk n különböző értékeire.
Legyen először $n < 2$.
Ebben az esetben láthatjuk, hogy $k > 0$ vagyis a végtelenhez tartó b kitevője pozitív, ez azt jelenti, hogy ez a kifejezés is tart a végtelenbe, tehát ekkor a kirepülési idő végtelen.
Most legyen $n = 2$.
Ekkor az eredeti integrálunk:

$$\int_a^\infty x^{-\frac{2}{2}}\, dx = \int_a^\infty x^{-1}\, dx = \lim_{c\to\infty} [\ln x]_a^c = \infty$$

Tehát ebben az esetben is végtelenhez tart az idő. Végül legyen $n > 2$.
Ekkor $k < 0$ tehát, a végtelenhez tartó b kitevője negatív, ami azt jelenti, hogy a kifejezés láthatóan a nullához tart.

Tehát a kirepülési ideje a testnek nulla összenergia esetén:

$$T_0 = \begin{cases} \infty & \text{ha } n < 2 \\ \infty & \text{ha } n = 2 \\ \dfrac{2}{n-2} a^{\frac{2-n}{2}} & \text{ha } n > 2 \end{cases}$$

Vagyis láthatóan a kirepülési idő nulla összenergia esetén akkor lesz véges, ha $n > 2$.

Nézzük most azt az esetet amikor nem nulla az E összenergia. Ekkor a kirepülési időt megadó integrál:

$$T_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{E + \lambda x^n}}$$

Láthatóan itt csak annyit csináltunk matematikailag,hogy hozzáadtunk egy extra tagot a nevezőben. Na de mi most azt vizsgáljuk hogy tetszőleges energiát hozzáadva mikor lesz véges a kirepülési idő. ha nagyon kicsi azenergiája, annyira kicsi,hogy a másik tag melett elhanyagolható, de nem nulla, akkor hasonlót kapunk mint az előző esetben, tehát azon, hogy a kirepülési idő véges vagy

nem, az energia nem változtat.
Vagyis ugyanazokban az esetekben lesz az idő véges vagy végtelen, mint a nulla energiájú esetben.

4. A megadott potenciál:

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x}$$

Az összenergia $E = 0$. Tehát az idő, ha A helyről indítjuk, és onnan esik befelé a centrumba:

$$t(x) = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_A^x \frac{dx'}{\sqrt{\alpha/x'}} = -\sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \int_A^x \sqrt{x'}\, dx' = -\sqrt{\frac{2m}{9\alpha}} \left(x^{3/2} - A^{3/2}\right)$$

Innen kitudjuk fejezni a tömegpont $x(t)$ pályáját az idő függvényében:

$$x(t) = \left[A^{3/2} - t \cdot \sqrt{\frac{9\alpha}{2m}}\right]^{\frac{2}{3}}$$

Kepler törvényével úgy hozható kapcsolatba, hogy ha a tömegpont 1 dimeniziós mozgását úgy tekinthetjük, mintha valamilyen nagyon elfajult kétdimenziós mozgást végezne, és így az említett törvény alapján is ki lehetne számolni a fenti pályát.

5. A megadott potenciál:

$$V(x) = A \cdot \mathrm{tg}^2 x$$

Ahol $A > 0$ valós együttható.
A Vizsgált értelmezési tartomány értelemszerűen $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Itt végezhet mozgást a tömegpont.
A tömegpont energiája legyen E. Nézzük meg, hogy milyen x-ekre egyezik ez meg a potenciállal. Az energia most nyilván nemnegatít így:

$$E = V(x_0) = A \cdot \mathrm{tg}^2 x_0 \Longrightarrow x_0 = \pm \mathrm{arctg} \sqrt{\frac{E}{A}}$$

Tehát a tömegpont $\pm x_0$ között mozog. És a potenciálfüggvény szimmetrikus, így a periódusidőt úgy számolhatjuk ki, hogy 0-tól x_0-ig kiszámoljuk a negyed periódus időt majd ezt megnégyszerezzük. A már ismert képlet szerint ez:

$$T(E) = 4 \cdot \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - A\mathrm{tg}^2 x}} = \sqrt{\frac{8m}{E}} \int\limits_0^{\mathrm{arctg}\sqrt{E/A}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{A}{E}\mathrm{tg}^2 x}}$$

Most foglalkozzunk csak az integrállal. Vezessük be a következő jelölést:

$$k = \sqrt{\frac{A}{E}}$$

Ezzel az integrál:

$$\int\limits_0^{\mathrm{arctg} 1/k} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \mathrm{tg}^2 x}} = \int\limits_0^{\mathrm{arctg} 1/k} \frac{dx}{\sqrt{1 - (k\mathrm{tg} x)^2}}$$

Most először csak a primitív függvény meghatározásával foglalkozom, így a határokat egy ideig nem írom ki.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(k\mathrm{tg}x)^2}}$$

Először is vegyük észre a következőt.
A mozgás tartománya:

$$-\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{E}{A}} \le x \le \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{E}{A}}$$

Na de ez azt jelenti, hogy:

$$-\sqrt{\frac{E}{A}} \le \mathrm{tg}x \le \sqrt{\frac{E}{A}}$$

A bevezetett új jelölést használva:

$$-\frac{1}{k} \le \mathrm{tg}x \le \frac{1}{k}$$

azaz:

$$-1 \le k\mathrm{tg}x \le 1$$

Ez pedig azt jelenti, hogy használhatjuk a következő helyettesítést: $k\mathrm{tg}x = \sin u$.

Ekkor $\frac{k}{\cos^2 x}dx = \cos u\,du$ Ahonnan: $dx = \cos^2 x\frac{\cos u}{k}du$

Na de ismert az alábbi trigonometrikus összefüggés:

$$1+\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+\frac{\sin^2 u}{k^2}}$$

Ezzel:

$$dx = \frac{1}{1+\frac{\sin^2 u}{k^2}}\frac{\cos u}{k}du$$

VAgyis az integrálunk:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(k\mathrm{tg}x)^2}} = \frac{1}{k}\int \frac{\cos u du}{\left(1+\frac{\sin^2 u}{k^2}\right)\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\cos u}} = \frac{1}{k}\int \frac{du}{1+\frac{\sin^2 u}{k^2}}$$

Alakítsuk tovább az integrált. Felhasználjuk a $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ összefüggést:

$$\frac{1}{k}\int \frac{du}{1+\frac{\sin^2 u}{k^2}} = \frac{1}{k}\int \frac{du}{\cos^2 u + \sin^2 u + \frac{\sin^2 u}{k^2}} = \frac{1}{k}\int \frac{du}{\cos^2 u + \left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sin^2 u} =$$

$$= \frac{1}{k}\int \frac{du}{\cos^2 u\left(1+\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}\right)} = \frac{1}{k}\int \frac{du}{\cos^2 u\left(1+\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\mathrm{tg}^2 u\right)}$$

Most végezzünk el még egy helyettesítést: $v = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\mathrm{tg}u$. Ekkor $du = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\cos^2 u\,dv$. Azaz:

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\int \frac{\cos^2 u dv}{\cos^2 u(1+v^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\int \frac{dv}{1+v^2}$$

Ez pedig már egy alapintegrál amit könnyen elvégezhetünk:

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\mathrm{arctg}v$$

Tehát az eredeti integrálunk az x változóval kifejezve:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(k\text{tg}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\text{arctg}\left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\text{tg}\left(\arcsin\left[k\text{tg}(x)\right]\right)\right] + C$$

Tekintstük most a határokat. A felső határ arctg$\frac{1}{k}$. Ezt beírva:

$$\text{arctg}\left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\text{tg}\left(\arcsin\left[k\text{tg}\left(\text{arctg}\frac{1}{k}\right)\right]\right)\right] = \text{arctg}\left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\text{tg}\left(\arcsin(1)\right)\right] =$$

$$= \text{arctg}\left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \lim_{a\to\infty}\text{arctg}(a) = \frac{\pi}{2}$$

Az alsó határ nulla. Ekkor láthatóan az integrál is nulla.

Tehát a periódusidő az energia függvényében:

$$T(E) = \sqrt{\frac{8m}{E}}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{\frac{2m}{E+A}}$$

6. A részecske energiája E, legyen a $V(x)$ potenciál U maximuma, az A pontban. Vizsgáljuk a potenciált az A pont környékén.
   Teljes joggal közelíthetjük, egy négyzetes potenciállal az A pont körül:

$$V(x) \approx U - C\cdot(x-A)^2$$

Vegyünk fel egy B pontot a potenciálgörbén, egyenlőre nagyon közel az A ponthoz.
Ekkor azt az időt amíg a részecske a B pontból az A pontba ér a már használt integrál alapján számolhatjuk ki:

$$t_{BA} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_B^A \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \approx \sqrt{\frac{m}{2}}\int_B^A \frac{dx}{\sqrt{E-U+C(x-A)^2}}$$

Végezzük el az integrálást. Most egy ilyen típusú integrált kell elvégeznünk:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{p+qx^2}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{q}{p}x^2}}$$

Legyen: $\sqrt{\frac{q}{p}}x = \text{sh}u$. Innen: $dx = \sqrt{\frac{p}{q}}\text{ch}u\,du$ Ezzel az integrál:

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{q}{p}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{q}}\int \frac{\text{ch}u du}{\underbrace{\sqrt{1+\text{sh}^2u}}_{\text{ch}u}} = \frac{1}{\sqrt{q}}\int du = \frac{1}{\sqrt{q}}u$$

vagyis az eredeti integrál, az eredeti változóval:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{p+qx^2}} = \frac{1}{\sqrt{q}}\text{arsh}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\cdot x\right) + D_1 = \frac{1}{\sqrt{q}}\ln\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\cdot x + \sqrt{1+\frac{q}{p}x^2}\right) + D_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q}} \ln(qx + \sqrt{q(p + qx^2)}) + D_2$$

Most visszatérve a feladatra az általunk keresett idő:

$$t_{BA} = \sqrt{\frac{m}{2C}} \left[\ln \left(C(x - A) + \sqrt{C(E - U) + C^2(x - A)^2} \right) \right]_B^A$$

Beírva a határokat:

$$t_{BA} = \sqrt{\frac{m}{2C}} \left[\frac{1}{2} \ln(C(E - U)) - \ln \left(C(B - A) + \sqrt{C(E - U) + C^2(B - A)^2} \right) \right]$$

Na már most ha a B-t egyre jobban távolítjuk az A-tól, akkor a második tag egyre 'kevésbé' lesz egyenlő az első taggal, azaz egyre távolodik tőle, így amikor az $E \to U$ határátmenetet képezzük akkor az első tag fog elszállni a második tag pedig nem, mivel a B-t távolabb vittük A-tól. Tehát a felérési időre:

$$t \sim \ln(E - U)$$

Vagyis ilyen törvény szerint válik végtelenné.