Elméleti mechanika gyakorlat, 2. zárthelyi

Lukács Árpád

2010. december 21.

Tudnivalók: A gyakorlat honlapja: `www.rmki.kfki.hu/~arpi/teaching/2010elmmech/`. A feladat teljes megoldásához a levezetés, és a számolások részletei is hozzátartoznak. A megoldásokat és a pontszámokat fel fogom tenni a honlapra. **Kérem, hogy minden feladatlapon szerepeljen a szerző neve, EHA-kódja és csoportja!** Ponthatárok: 2:10-, 3:20-, 4: 30-, 5: 40-.

1. feladat (5p). Egy kocsi súrlódás nélkül gurul le egy $y = a\,\mathrm{sh}(-x)$ $(a > 0)$ egyenletű lejtőn, h magasságból. Határozzuk meg a kocsi és a lejtő között fellépő kényszererő nagyságát!

2. feladat (6p). (a) Írjuk fel a következő rendszer Lagrange–függvényét: egy $2a$ hosszúságú rúd két végén egy-egy m tömegű test található. A rúd középpontja egy b sugarú körön mozoghat. A rendszer síkban van, általános koordinátáknak válasszuk a rúd középpontjának a körön való elmozdulási szögét (egy alkalmas kezdőponttól mérve) és a rúdnak a sugárral bezárt szögét!
(c) Vegyünk hozzá az (a) pontban leírt Lagrange–függvényhez egy potenciált, mely azt veszi figyelembe, hogy mindkét testre egy F nagyságú állandó erő hat. Keressünk egyensúlyi pontokat, vizsgáljuk meg azok stabilitását!

3. feladat (10p). Egy részecske Lagrange–függvénye $L = K - V$, $K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$, valamint a V potenciál invariáns a *csavarmozgásra*, azaz az $\mathbf{r}' = \mathbf{O}(\varphi)\mathbf{r} + \varphi\kappa\mathbf{k}$ transzformációra tetszőleges ϕ paraméter esetén, ahol $\mathbf{O}(\varphi)$ a z tengely körüli φ szöggel való elforgatás, $\mathbf{k}$ a z irányú egységvektor, κ pedig egy állandó. Keressünk ennek a transzformációnak megfelelő megmaradó mennyiséget! Mutassuk meg, hogy a kapott mennyiség Poisson–zárójele a rendszer $H = K + V$ Hamilton–függvényével zérus!
Segítség: a transzformáció infinitezimális alakja $\delta\mathbf{r} = \delta\varphi\mathbf{k} \times \mathbf{r} + \delta\varphi\kappa\mathbf{k}$. Vizsgáljuk meg annak a feltételét, hogy L ne változzon meg infinitezimális transzformációk hatására.

4. feladat (8p). Tekintsünk egy r sugarú, ρ_g sűrűségű tömör gömböt, és egy a oldalélű ρ_k sűrűségű, a oldalú tömör kockát. Mekkora legyen a/r és ρ_k/ρ_g, hogy a két test tehetetlenségi momentum–tenzora és tömege is megegyezzen?

5. feladat (5p). Számítsuk ki annak a pontrendszernek a tömegét, tehetetlenségi nyomaték tenzorát, principális tehetetlenségi nyomatékait, melynek pontjai rendre m, $2m$, $2m$ tömegűek, és koordinátáik $(-2b, 2b, 0)$, $(2b, b, 0)$ és $(-b, -2b, 0)$. Mik a tehetetlenségi főirányok?

6. feladat (10p). Határozzuk meg a vízszintes, R sugarú, kör alakú membrán saját súlya hatására létrejövő deformációját!

7. feladat (8p). Határozzuk meg az ℓ befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög alakú membrán sajátrezgéseit, ha az előfeszítés σ!
Segítség: A határfeltételt próbáljuk meg kielégíteni a négyzet két, alkalmasan választott módusának a lineárkombinációjával. Miben különbözik a rezgések spektruma a két esetben?

8. feladat (10p). Határozzuk meg egy, a tengelye körül ω sebességgel forgó, végtelen hosszú henger deformációját!
Segítség: Dolgozzunk hengerkoordinátákban! Tegyük fel, hogy csak radiális deformáció van $u_r = u(r)$! Ekkor a szükséges nemnulla komponensek: $\epsilon_{rr} = u'(r)$, $\epsilon_{\varphi\varphi} = u/r$, $\Delta\mathbf{u} = \nabla(\nabla\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{r}(ru)'\right)'\mathbf{e}_r$.