

# 1. ZH, Elméleti Mechanika, 2011 november 10.

1. feladat (12 pont). Tekintsük a következő potenciált:

$$V(x) = V_0 [(\alpha x)^5 - 5(\alpha x)^3 + 4(\alpha x)]$$

a) (2 pont) Vázoljuk fel a  $V(x)$  függvényt! b) (3 pont) Keressük meg a  $V(x)$  potenciálban történő egydimenziós mozgás stabil és instabil egyensúlyi helyeit! c) (4 pont) Vázoljuk fel a fázistérképet! d) (3 pont) Határozzuk meg a stabil fixpontok körüli kis rezgések periódusidejét!

2. feladat (4 pont). a) Tekintsük a következő potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > x_1 \\ -V_0 & \text{ha } 0 < x < x_0 \\ -V_1 & \text{ha } x_0 < x < x_1, \end{cases}$$

ahol  $V_1 > V_0 > 0$ . a) (1 pont) Vázoljuk a potenciált! b) (1 pont) A potenciálban kialakuló egy dimenziós mozgás mely energiaértékek esetén lesz korlátos ("kötött")? Mely energiaértékek esetén mely intervallumokra korlátozódik a mozgás? c) (2 pont) Határozzuk meg a mozgás periódusidejét a lehetséges korlátos mozgásokra!

3. feladat (14 pont).  $V = mgy$  nehézségi erőterben mozogjon egy pontszerű test  $y = f(x)$  kényszerpályán. a) (3 pont) Tekintsük az  $x$ -et általános koordinátának. Mi ekkor a rendszer Lagrange-függvénye? b) (2 pont) A Lagrange-függvény nem függ expliciten az időtől. Írjuk fel a Beltrami-függvényt! Milyen fizikai mennyiségnek felel ez meg? c) (4 pont) A b) feladat eredményét felhasználva fejezzük ki  $\dot{x}$ -ot és írjuk fel a differenciálegyenlet formális megoldását! d) (1 pont) Tételezzük fel, hogy  $f(x)$  alakja olyan, hogy benne periodikus mozgás megvalósulhat. Mely egyenletek adják meg a fordulópontok koordinátáit? e) (1 pont) A c) feladat eredményét használva fejezzük ki a periódusidőt, mint egy függvény  $x$  szerinti integrálját a két fordulópont között. f) (3 pont) Az e) feladat eredményét felhasználva számoljuk ki a periódusidőt  $f(x) = \alpha|x|$  kényszer esetén ( $\alpha > 0$ ).

4. feladat (8 pont). Tekintsünk egy  $k$  rugóállandójú rugót, mely egyik végén csuklóval rögzített, másik végén pedig egy  $m$  tömegű test nehézségi erőterben mozoghat függőleges síkban (síkinga rugós felfüggesztéssel). a) (3 pont) Írjuk fel a Lagrange-függvényt kényelmes általános koordináták megválasztásával! b) (2 pont) Határozzuk meg a megmaradó mennyiségeket (energia és kanonikus impulzus), ha vannak! c) (3 pont) Írjuk fel az Euler-Lagrange egyenleteket!

5. feladat (11 pont). Tekintsük a következő rendszert: Egy  $m$  tömegű testtel végződő inga felfüggesztési pontja egy kör alakú sínen súrlódásmentesen mozoghat. A felfüggesztés és az inga tömege zérus. (Ez nem más, mint a kettős inga abban a határesetben, amikor a középső tömeg nulla.) a) (4 pont) Mi a Lagrange-függvény kényelmes koordinátázással? b) (3 pont) Határozzuk meg a ciklikus koordinátákat, és a hozzájuk tartozó megmaradó mennyiségeket, illetve a megmaradó energiát! c) (4 pont) Írjuk fel az Euler-Lagrange-egyenleteket!

**6. feladat (7 pont).** Emlékeztető az előadásról: Mozogjon egy test egy dimenzióban a  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \epsilon v(x)$  potenciálban, ahol  $\epsilon$  kis paraméter. A perturbációs számítás vezető rendjében a periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{2\epsilon}{\omega E} \int_0^{\pi/2} du \frac{v_s(A_0 \sin u) - v_s(A_0)}{\cos^2 u} + O(\epsilon^2),$$

ahol  $A_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}}$  és  $v_s$  a perturbáló potenciál szimmetrizáltját jelenti.

Legyen a perturbáló potenciál:

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| > x_0 \\ v_0 & \text{ha } |x| < x_0 \end{cases}$$

Számoljuk ki a periódusidő  $O(\epsilon)$  rendű korrekcióját! Értelmezzük kvalitatíven a potenciál hatását  $v_0 > 0$  és  $v_0 < 0$  esetben.