Elméleti mechanika gyakorlat, 1. zárthelyi

Lukács Árpád

2010. november 4.

Tudnivalók: A gyakorlat honlapja: `www.rmki.kfki.hu/~arpi/teaching/2010elmmech/`. A feladat teljes megoldásához a levezetés, és a számolások részletei is hozzátartoznak. A megoldásokat és a pontszámokat fel fogom tenni a honlapra. **Kérem, hogy minden feladatlapon szerepeljen a szerző neve, EHA-kódja és csoportja!** Ponthatárok: 2:10-, 3:20-, 4: 30-, 5: 40-.

1. (5p)**.** Határozzuk meg, hogy egy, $t = 0$-ban az $x_0 > 0$ pontban lévő, $v = \sqrt{\dfrac{2ax_0^5}{m}}$ sebességgel (a>0) mozgó test mennyi idő alatt jut távozik a végtelenbe, ha a rá ható erő potenciálja $V(x) = -ax^5$.

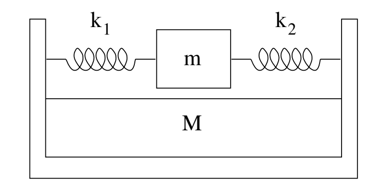
2. (5p)**.** Rajzoljuk fel a

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{\omega^2}{2}(x+a)^2, \text{ ha } x < -a\,, \\ \qquad\qquad 0, \text{ ha } -a < x < a\,, \\ \dfrac{\omega^2}{2}(x-a)^2, \text{ ha } x > a\,, \end{cases}$$

potenciálban mozgó részecske fázistérbeli trajektóriáit az E energia függvényében! Határozzuk meg a periodikus mozgás periódusidejét, az egyensúlyi helyeket és ha vannak stabil egyensúlyok, akkor a körülöttük való kis rezgések frekvenciáját ($a > 0$, $\alpha > 0$)!

3. (5p)**.** Mozogjon egy m tömegű test a $V(x) = V_2x^2 + V_3x^3$ potenciálban, ahol $V_2 > 0$, $V_3 > 0$. Hol mozoghat a test, ha energiája E? Rajzoljuk meg a mozgás fázistér-ábráját! Keressük meg az egyensúlyi helyeket, és nézzük meg, hogy azok stabilak-e! Számoljuk ki a stabil egyensúlyok körüli kis rezgések frekvenciáját!

4. (10p)**.** Egy M tömegű doboz vízszintes síkon súrlódásmentesen tud mozogni, az x tengely mentén. A doboz belsejében szintén súrlódásmentesen, az x tengely mentén mozog egy m tömegű test. A testet a doboz két oldalához egy k_1 és egy k_2 rugóállandójú rugó rögzíti. Írjuk le a két test mozgását! (1. ábra)
Segítség: tegyük fel, hogy a tömegpont áll!



1. ábra

5. (15p)**.** Határozzuk meg, hogy egy csillapított oszcillátor milyen kényszerrezgéseket végez ha a gerjesztő erő (a) $F(t) = F_0 \sin^2(\Omega t)$ és (b) ha $F(t) = \begin{cases} F_0 \sin^2(\Omega t), \text{ ha } 0 \le t \le T\,, \\ 0 \quad \text{egyébként}\,, \end{cases}$ ahol $T = 2\pi/\Omega$.
Emlékeztető: a csillapított oszcillátor egyenlete $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m$, Green-függvénye pedig $G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega t)$, ahol $\omega^2 = \omega_0^2 - (\alpha/2)^2$, ha az oszcillátor alulcsillapított ($\alpha/2 < \omega_0$).

6. (15p)**.** Az előadáson szerepelt a Fourier–transzformáltja. Ahhoz hasonlóan, a pediodikus függvények Fourier–sorba fejthetők: ha $f(t)$ periódusa T (azaz $f(t+T) = f(t)$), akkor $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}$, ahol $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\mathrm{d}t$, és $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\mathrm{d}t$.
(a) Bizonyítsuk be a fenti képleteket!
(b) Mi az $f'(t)$ Fourier-sora?
(c) Számoljuk ki az $f(t) = A\left\{\frac{t}{T}\right\}$ (itt $\{x\}$ az x törtrészét jelöli) Fourier-sorát, és az előbbiek segítségével határozzuk meg, hogy $mf(t)$ gerjesztő erő hatása alatt hogyan mozog egy csillapított oszcillátor!
Útmutató: fejtsük az $x(t)$ pályát is Fourier–sorba, $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \sin\frac{2\pi nt}{T}$, és ezt a mozgásegyenletbe helyettesítsük be! Az egyenlet két oldalán szereplő Fourier–soroknak tagonként kell megegyezniük.

7. (15p)**.** Egy m tömegű részecske $V(r) = k\ln r$ ($k > 0$) centrális potenciálban mozog. (a) Mutassuk meg, hogy van stabil körpálya, és határozzuk meg a körpálya körüli kis rezgések ω frekvenciáját! (b) Mutassuk meg, hogy a körpályától kissé eltérő pályák nem zárulnak (hasonlítsuk össze ω-t és $\dot{\varphi}$-ot)!

8. (15p)**.** Legyen egy centrális potenciál $U(r) = -\frac{\alpha m}{4r^4}$. Határozzuk meg ebben a potenciálban, az instabil körpályákkal megegyező energiájú pályák egyenleteit, azaz $r(\varphi)$-t!
Segítség: Használjuk az $u(\varphi) = 1/r(\phi)$ változót. Ilyen energiaérték mellett $E - V_{\text{eff}}$, mint u függvénye, teljes négyzet.