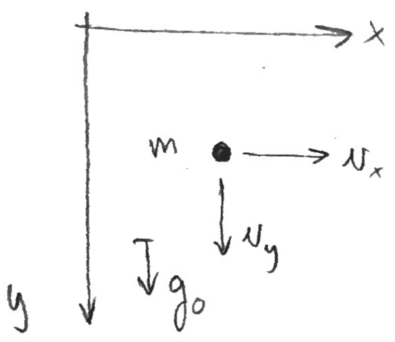
2. ZH megoldásai

F1.)



a.) A Lagrange-függvény:

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + mg_0 y$$

A Rayleigh-függvény:

$$R(\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}\gamma\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$$

b.) A módosított Euler–Lagrange-egyenletek:

$$(1) \qquad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} \quad \to \quad -m\ddot{x} = \gamma\dot{x}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial R}{\partial \dot{y}} \quad \to \quad mg_0 - m\ddot{y} = \gamma\dot{y}$$

Az (1) egyenlet átírható a $v_x = \dot{x}$ sebességre:

$$\dot{v}_x = -\frac{\gamma}{m}v_x \quad \longrightarrow \quad v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} .$$

Hasonlóan a (2) egyenlet:

$$\dot{v}_y = -\frac{\gamma}{m}v_y + g_0 \longrightarrow v_y(t) = \frac{mg_0}{\gamma}\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right).$$

Hosszú idő után:

$$\lim_{t\to\infty} v_x(t) = 0 , \quad \lim_{t\to\infty} v_y(t) = \frac{mg_0}{\gamma} .$$

Az x irányú elmozdulás:

$$x(t\to\infty) = \int_0^\infty v_x(t)\,dt = -\frac{mv_0}{\gamma}\left[e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right]_0^\infty = \frac{mv_0}{\gamma} .$$

F2.)

Milyen a fázistérbeli trajektória?

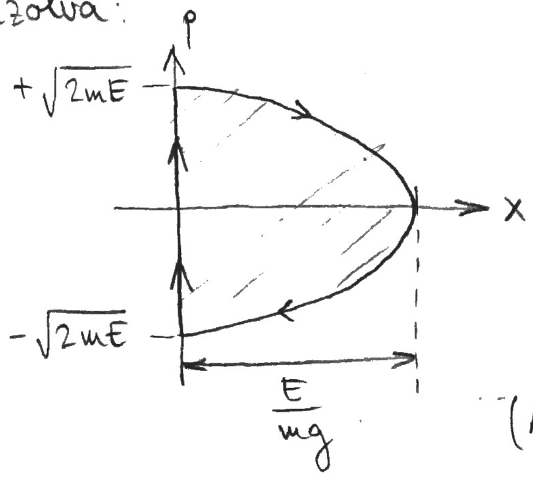
A pattogások során (rövid idő alatt) az energia megmarad:

$$E = \frac{p^2}{2m} + mgx. \quad (\text{itt } x \text{ a magasság})$$

Ebből:

$$x = \frac{E}{mg} - \frac{p^2}{2m^2 g}. \quad (\text{parabola})$$

Ábrázolva:



A fázistérfogat invariáns:

$$I = \oint p\,dx = \text{áll.}$$

$$I = \frac{2}{3}\,\frac{E}{mg}\cdot 2\cdot\sqrt{2mE}$$

(A satírozott terület a befoglaló téglalap területének 2/3 része.)

Tehát $$I = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{m}}\cdot\frac{E^{3/2}}{g} \sim \frac{E^{3/2}}{g} = \text{állandó}.$$

A teljes E energia arányos a pattogások h magasságával:

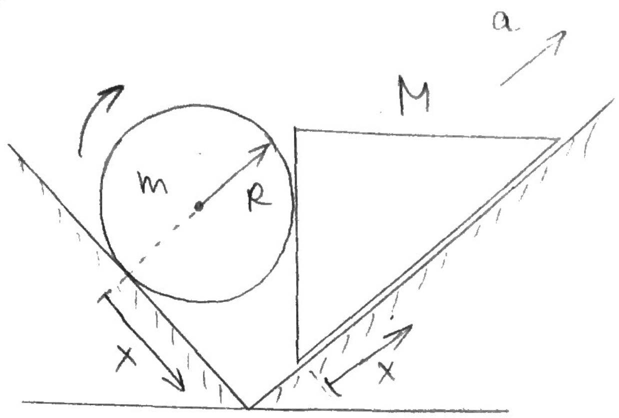
$$E = mgh \longrightarrow \frac{(gh)^{3/2}}{g} = g^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}} = \text{állandó},$$

azaz $h \sim \frac{1}{\sqrt[3]{g}}$. Ha tehát g értéke felére csökken, a pattogási magasság $\sqrt[3]{2}$-szeresére növekszik.

<u>Megjegyzés:</u> Hosszú távon az energia <u>nem</u> marad meg!

F3.)

a.)



A rendszer helyzetét egyértelműen jellemzi a henger középpontjának x elmozdulása. A szabadsági fokok száma tehát 1.

A Lagrange-függvény: $L(x,\dot{x})$.

Részletezve:

$$L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 - (M-m)g\frac{x}{\sqrt{2}}$$

Az x-hez kanonikusan konjugált impulzus:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m+M)\dot{x} + \frac{1}{2}m\dot{x} = \frac{3m+2M}{2}\dot{x}.$$

A Hamilton-függvény meghatározása:

$$H = p\cdot\dot{x} - L = \frac{3m+2M}{4}\dot{x}^2 + (M-m)g\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$H(x,p) = \frac{p^2}{3m+2M} + (M-m)g\frac{x}{\sqrt{2}}$$

b.)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \longrightarrow \dot{x} = \frac{2p}{3m+2M}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \longrightarrow \dot{p} = -\frac{(M-m)g}{\sqrt{2}}$$

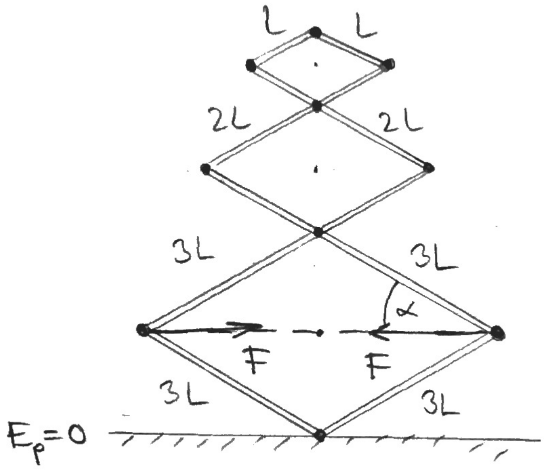
Az ék gyorsulása:

$$a = \ddot{x} = \frac{2}{3m+2M}\dot{p} = \frac{\sqrt{2}(m-M)}{3m+2M}g.$$

Speciális esetek: I.) $m \gg M$, $a = \frac{\sqrt{2}}{3}g$.

II.) $m \ll M$, $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}g$.

F4.)



A rendszer teljes gravitációs potenciális energiája:

$$E = \lambda \cdot 12Lg \cdot 3L \sin\alpha +$$

$$+ \lambda \cdot 8Lg \cdot (2 \cdot 3L + 2L) \sin\alpha +$$

$$+ \lambda \cdot 4Lg (2 \cdot 3L + 2 \cdot 2L + L) \sin\alpha$$

Rendezve: $\quad E = 144 \lambda L^2 g \sin\alpha .$

A virtuális munka elvét alkalmazzuk. Képzeljük el, hogy a fonál hossza dx-szel megváltozik. Eközben a fonálerő és a nehézségi erő teljes munkája zérus:

$$-F\,dx - dE = \emptyset \rightarrow F = -\frac{dE}{dx} .$$

Ezt kifejtve megkaphatjuk a fonálerőt:

$$F = -\frac{dE}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} , \quad \text{ahol} \quad x = 2 \cdot 3L \cos\alpha .$$

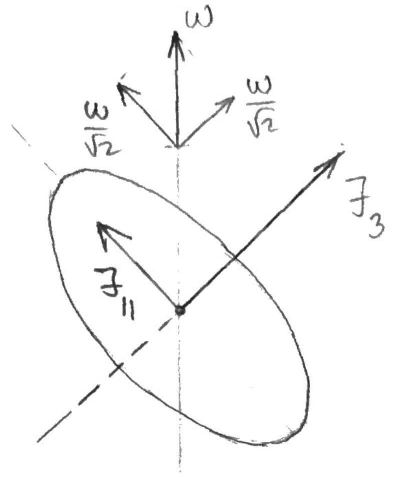
$$\frac{dx}{d\alpha} = -6L \sin\alpha .$$

$$F = \frac{1}{6L \sin\alpha} \cdot 144 \lambda L^2 g \cos\alpha = 24 \frac{\lambda g L}{\tan\alpha} .$$

Az aktuális helyzetben $\alpha = 30^\circ$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, így az erő:

$$F = 24 \cdot \sqrt{3}\, \lambda g L \approx 41{,}57\, \lambda g L .$$

F5.)



a.) $\Theta_1 = \Theta_2$, $\Theta_3 = \Theta_1 + \Theta_2$,

így: $\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{1}{2}\Theta_3 = \frac{1}{4} mR^2$.

b.) $\mathcal{J}_3 = \Theta_3 \frac{\omega}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} mR^2\omega$,

$$\mathcal{J}_{\parallel} = \Theta_1 \frac{\omega}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} mR^2\omega .$$

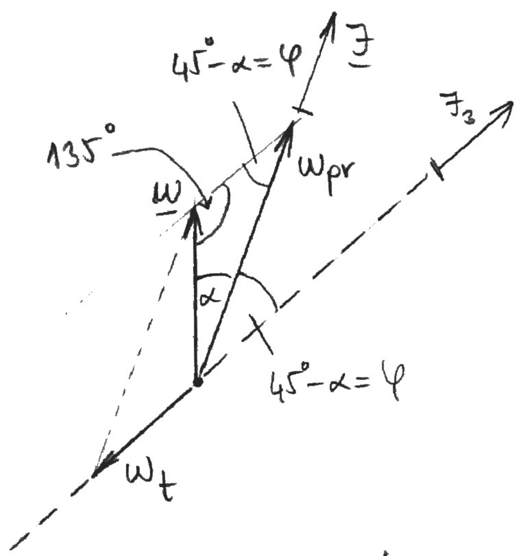
A teljes impulzusmomentum és $\mathcal{J}_3$ iránya által bezárt szög:

$$\varphi = \arctan \frac{\mathcal{J}_{\parallel}}{\mathcal{J}_3} = \arctan \frac{1}{2} = 26{,}57^\circ,$$

tehát az $\underline{\omega}$ szögsebesség és a teljes $\underline{\mathcal{J}}$ közötti szög:

$$\alpha = 45^\circ - \varphi = 45^\circ - \arctan\frac{1}{2} = \underline{\underline{18{,}43^\circ}}.$$

c.)



Az ábra alapján:

$$\frac{\omega_{pr}}{\omega} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin\varphi},$$

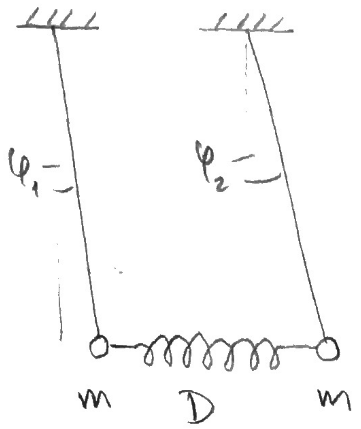
ebből:

$$\omega_{pr} = \omega \frac{\sin 135^\circ}{\left(1 + \frac{1}{\tan^2\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}}} .$$

Felhasználva, hogy $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, és $\tan\varphi = \frac{1}{2}$:

$$\underline{\underline{\omega_{pr} = \sqrt{\frac{5}{2}}\,\omega .}}$$

F6.)



A kinetikus energia:

$$K = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} mL^2 \dot{\varphi}_2^2 ,$$

ami a tömegmátrix segítségével így írható:

$$K = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{M}}} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} .$$

A potenciális energia:

$$V = \frac{1}{2} mgL \varphi_1^2 + \frac{1}{2} mgL \varphi_2^2 + \frac{1}{2} DL^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

$$V = \frac{1}{2} (\varphi_1, \varphi_2) \underbrace{\begin{bmatrix} mgL + DL^2 & -DL^2 \\ -DL^2 & mgL + DL^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K}} \text{ (rugóállandó mátrix)}} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

A sajátfrekvenciák:

$$\det\left(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{M}} \omega^2 \right) = \varnothing \Rightarrow \det \begin{bmatrix} mgL + DL^2 - mL^2\omega^2 & -DL^2 \\ -DL^2 & mgL + DL^2 - mL^2\omega^2 \end{bmatrix} = \varnothing$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\left(mgL + 2DL^2 - mL^2\omega^2 \right)\left(mgL - mL^2\omega^2 \right) = \varnothing ,$$

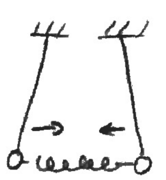
ebből:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2D}{m}} , \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}} .$$

Normálmódusok:

- Ha $\omega = \omega_1$: $\varphi_1 = -\varphi_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow$$



- Ha $\omega = \omega_2$: $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow$$