Elméleti mechanika gyakorlat

2. zárthelyi dolgozat

2017. december 15. (péntek) 15^{00}-17^{00}

Minden feladat egyformán 10 pontot ér. A feladatok megoldásához számológépen és íróeszközökön kívül semmilyen segédeszköz nem használható.

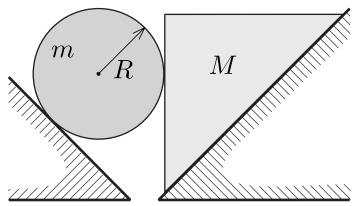
F1. Egy m tömegű, apró gyöngy mozgását vizsgáljuk vízben. A gyöngyöt a sebességével arányos $\boldsymbol{F} = -\gamma \boldsymbol{v}$ (Stokes-féle) közegellenállási erő fékezi. A gyöngyre ható nehézségi erő és a felhajtóerő eredője lefelé mutat, nagysága mg_0. Egy kísérletben a gyöngyöt a víz alatt v_0 nagyságú, vízszintes irányú sebességgel indítjuk el.

a) Írjuk fel a gyöngy Lagrange-függvényét és a Rayleigh-függvényt!

b) A Lagrange–Rayleigh-formalizmus segítségével írjuk fel a mozgásegyenleteket. Ezeket megoldva adjuk meg a gyöngy vízszintes $v_x(t)$ és függőleges $v_y(t)$ sebességkomponensét az idő függvényében! Mekkora lesz hosszú idő eltelte után a gyöngy sebessége és a vízszintes elmozdulása?

F2. Egy kisméretű, rugalmas labda pattog függőleges egyenes mentén. A talajjal való ütközés tökéletesen rugalmas, a légellenállás elhanyagolható. Hányszorosára változik a labda pattogásainak magassága, ha a nehézségi gyorsulás értékét igen lassan (a pattogások periódusidejénél sokkal hosszabb idő alatt) felére csökkentjük?

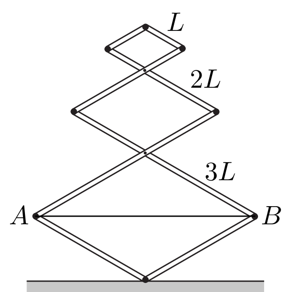
F3. Két rögzített, 45°-os hajlásszögű lejtő helyezkedik el egymással szemben az *ábrán* látható módon. A bal oldali lejtő *érdes*, rajta egy vízszintes tengelyű, m tömegű és R sugarú henger helyezkedik el, amely a jobb oldali, *súrlódásmentes* lejtőn lévő, szintén 45°-os hajlásszögű, M tömegű ékhez támaszkodik. A rendszert ebből a helyzetből elengedjük. A henger mozgása során végig csúszásmentesen gördül, a tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $mR^2/2$. A henger és az ék közötti súrlódás elhanyagolható.



a) Megfelelő általános koordináta választásával írjuk fel a rendszer Hamilton-függvényét!

b) A Hamilton-egyenletek segítségével határozzuk meg az ék gyorsulását!

F4. Nyolc darab vékony rúdból az *ábrán* látható, három rombuszból álló csuklós szerkezetet állítottuk össze. A rombuszok oldalhosszúsága L, $2L$ és $3L$, kisebbik szögük 60°, a rudak hosszegységre jutó tömege λ. A szerkezetet függőleges síkban tartjuk, az összecsuklást pedig az A és B pontokat összekötő fonállal akadályozzuk meg. Mekkora erő feszíti ebben a helyzetben a fonalat?



F5. A Nemzetközi Űrállomáson (a súlytalanság állapotában) egy homogén tömegeloszlású, m tömegű, R sugarú vékony korongot egyenletesen, ω szögsebességgel forgatunk a síkjával 45°-os szöget bezáró, a középpontján átmenő, rögzítetten tartott tengely körül. A forgatáshoz szükséges külső forgatónyomatékot egyszer csak megszüntetjük, így a korong szabadon kezd mozogni.

a) Határozzuk meg a korong tehetetlenségi nyomatékát az egyik átmérőjére vonatkoztatva, ha ismert, hogy a síkjára merőleges, a középpontján átmenő tengelyre vonatkozóan ez az érték $mR^2/2$. (*Útmutatás:* Hosszas integrálások helyett használjuk fel, hogy a korong vékony, azaz kétdimenziós alakzatnak tekinthető.)

b) A korong elengedése előtt mekkora szöget zárt be a korong perdületvektora a szögsebesség-vektorral?

c) Határozzuk meg a korong elengedése utáni ω_{pr} precessziós szögsebességet, azaz a korong normálvektora forgásának a szögsebességét.

F6. Két L hosszúságú matematikai ingát egy D rugóállandójú, súlytalan rugóval kötünk össze. Az ingatestek tömege m, az *ábrán* látható helyzetben a rugó feszítetlen. Határozzuk meg a rendszer egyensúlyi helyzet körüli kis rezgéseinek sajátfrekvenciáit és normálmódusait. Készítsünk ábrát is a normálmódusokról!