1. zárthelyi dolgozat megoldásai

2017. november 10.

F1.) a.) A forgó vonatkoztatási rendszerben a test egyensúlyát kifejező egyenlet:

$$0 = \underbrace{m(r_0+l)\omega^2}_{\text{centrifugális erő}} - \underbrace{Dl}_{\text{rugóerő}},$$

ebből:

$$l = \frac{r_0}{\frac{D}{m\omega^2}-1}.$$

b.) Ha a kis test mozog, a cső falára merőleges irányú Coriolis-erő is fellép, ami $2mv\cdot\omega$ nagyságú nyomóerőt eredményez. A test mozgásegyenlete sugárirányban:

$$m\ddot{r} = mr\omega^2 - D(r-r_0) - \mu\cdot 2m\dot{r}\omega,$$

ahol r most a test forgástengelytől mért távolsága. Áttérve az egyensúlyi helyzettől mért $x=r-r_0-l$ változóra:

$$m\ddot{x} = mx\omega^2 - Dx - 2\mu m\dot{x}\omega,$$

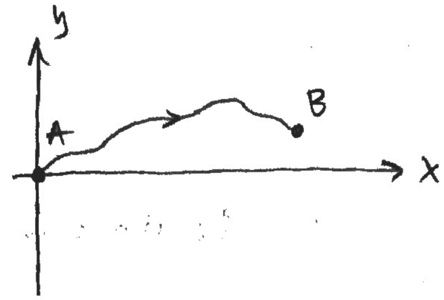
rendezve:

$$\ddot{x} + \underbrace{2\mu\omega}_{\alpha}\cdot\dot{x} + \underbrace{\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)}_{\omega_0^2}x = 0,$$

ez pedig éppen a sebességgel arányos csillapítású, harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete. Az α csillapítási tényező fele reciproka éppen a keresett időt adja meg:

$$\Delta t = \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{\mu\omega}$$, ez tehát a végeredmény.

F2)



Az A és B pontok között a terjedési idő stacionárius, azaz:

$$S[y(x)] = \int_A^B n(y)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \text{ext}.$$

A Lagrange-függvény:

$$L(y,y') = \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}\,\sqrt{1+y'^2}.$$

A Lagrange-függvény nem függ x-től, ezért a kanonikus energia állandó:

$$E = py' - L \quad , \quad \text{ahol} \quad p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Tehát:

$$E = \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}\,\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}\,\sqrt{1+y'^2}$$

$$E = \sqrt{\frac{1-y^2/R^2}{1+y'^2}} = \text{const}.$$

Ebből a következő differenciálegyenletre jutunk:

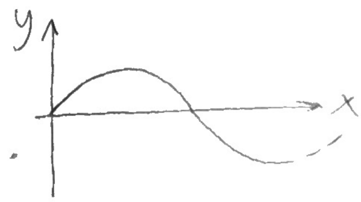
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1-E^2}{E^2}-\frac{y^2}{R^2}} \longrightarrow \int dx = \pm\frac{E}{\sqrt{1-E^2}}\int\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{y^2E^2}{R^2(1-E^2)}}}$$

Az integrálásnál áttérve az $u = \dfrac{yE}{R\sqrt{1-E^2}}$ változóra:

$$x - x_0 = \pm R\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pm R\arcsin\left[\frac{E}{\sqrt{1-E^2}}\,\frac{y}{R}\right].$$

Vagyis a keresett görbék:

$$y(x) = \pm R\,\frac{\sqrt{1-E^2}}{E}\cdot\sin\left(\frac{x-x_0}{R}\right).$$

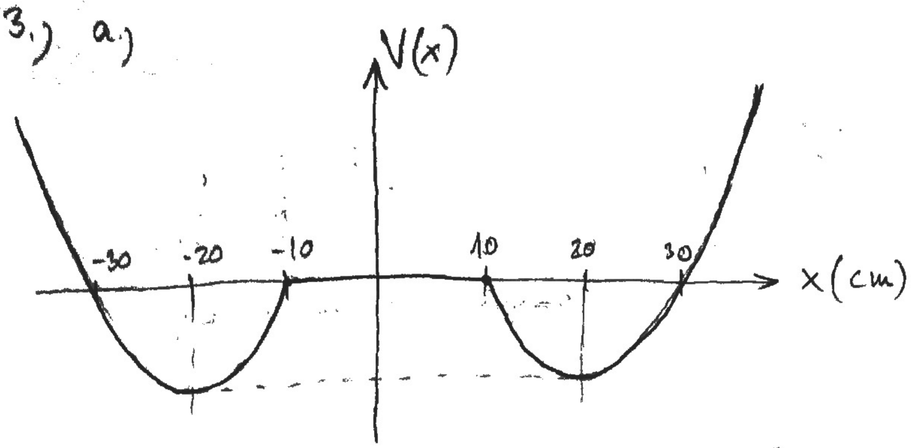


Ezt illesztve a peremfeltételhez:

$$y(x) = R\cdot\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\sin\left(\frac{x}{R}\right), \quad \text{hiszen} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Az E energia szemléletes jelentése tehát $E = \cos\alpha$.

F3.) a.)



A potenciál két parabolikus részből és egy konstans részből állítható össze. A potenciálok egy additív állandóban különbözhetnek.

Egy harmonikus oszcillátor trajektóriája:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2, \qquad \text{(origó körül)}$$

ebből

$$1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega_0^2}, \text{ tehát ellipszis.}$$

Az ábrán pl. a legkisebb ellipszist tekintve $A = 5\,\text{cm}$, $A\omega_0 = 10\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, így $\omega_0 = 2\,\frac{1}{\text{s}}$. Ez alapján a fenti potenciál alakja:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega_0^2(x+2a)^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2, & \text{ha } x < a \\ 0, & \text{ha } -a < x < a \\ \frac{1}{2}m\omega_0^2(x-2a)^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2, & \text{ha } x > a, \end{cases}$$

ahol $a = 10\,\text{cm}$, $m = 0{,}2\,\text{kg}$, $\omega_0 = 2\,\frac{1}{\text{s}}$.

b.) Amikor a test a potenciál töréspontjához ér, az egyensúlyi helytől mért távolsága 10 cm, sebessége $20\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, így amplitúdója

$$A = \sqrt{(10\,\text{cm})^2 + \left(\frac{20\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}{2\,\frac{1}{\text{s}}}\right)^2} = \sqrt{2}\cdot 10\,\text{cm} \approx 14{,}14\,\text{cm}.$$

A periódusidő ezért:

$$T = 2\cdot\left(\underbrace{\frac{2\pi}{\omega_0} - 2\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{egy ellipszis-ív megtételéhez szükséges idő}} + \underbrace{\frac{10\,\text{cm}}{20\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}}_{\frac{1}{\omega_0}\text{, az egyenes szakasz befutási ideje}}\right) = \frac{1}{\omega_0}(3\pi + 2) \approx \underline{5{,}71\,\text{s}}$$

F4.) Időtérben maradva:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t')G(t-t')\,dt' \,, \text{ ahol } \quad f(t)=\frac{F(t)}{m}=\frac{F_0}{m}\Theta(t)\Theta(T-t),$$

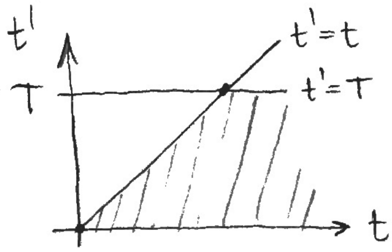
és

$$G(t)=\frac{\Theta(t)}{\omega_0}\sin(\omega_0 t).$$

Ezeket beírva:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0}{m}\Theta(t')\Theta(T-t')\cdot\frac{\Theta(t-t')}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t-t')\right)dt'$$

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_0}\int_0^{\infty}\underset{\substack{\uparrow\\ t'<T}}{\Theta(T-t')}\,\underset{\substack{\uparrow\\ t'<t}}{\Theta(t-t')}\sin[\omega_0(t-t')]\,dt'$$



Tehát két eset van:

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_0}\int_0^{t}\sin[\omega_0(t-t')]\,dt' \,,\ \text{ha} \quad t<T,$$

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_0}\int_0^{T}\sin[\omega_0(t-t')]\,dt' \,,\ \text{ha} \quad t>T.$$

Kiintegrálva:

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_0}\int_t^{0}-\sin[\omega_0 u]\,du=\frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[1-\cos(\omega_0 t)\right],\ \text{ha} \quad t<T$$

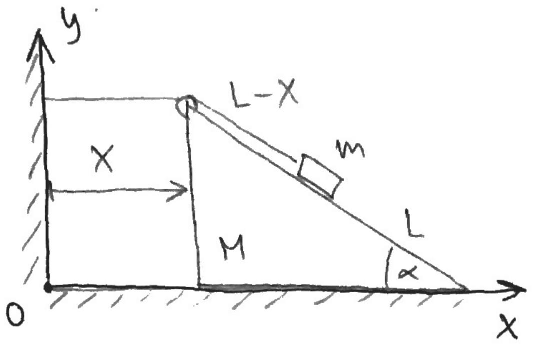
$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_0}\int_t^{t-T}-\sin[\omega_0 u]\,du=\frac{F_0}{m\omega_0^2}\left\{\cos[\omega_0(t-T)]-\cos(\omega_0 t)\right\},\ \text{ha } t>T.$$

Ez utóbbi így is írható:

$$x(t)=\frac{2F_0}{m\omega_0^2}\sin\left[\omega_0\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]\cdot\sin(\omega_0 T) \,,\ \text{ha} \quad t>T.$$

F5.)

a.)



Érdemes az ék faltól mért X távolságát általános koordinátaként bevezetni. A kis test helyzete ezzel kifejezhető.

$$\left.\begin{aligned} x &= X + (L-X)\cos\alpha \\ y &= L\sin\alpha - (L-X)\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Tehát a Lagrange-függvény:

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}_{T} - \underbrace{mgy}_{V}$$

A (*) egyenleteket felhasználva:

$$L(X,\dot{X}) = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\Big[\underbrace{\dot{X}^2(1-\cos\alpha)^2 + \dot{X}^2\sin^2\alpha}_{2\dot{X}^2(1-\cos\alpha)}\Big] - mgX\sin\alpha$$

A mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \rightarrow \quad -mg\sin\alpha = \big[M + 2m(1-\cos\alpha)\big]\ddot{X}$$

Tehát az ék gyorsulása:

$$\ddot{X} = -\frac{mg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)} = \text{állandó.}$$

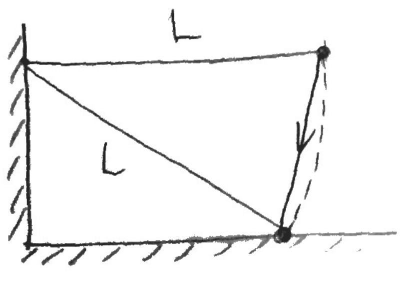
b.) A kis test helyzetét a (*) egyenletek adják meg:

$$\left.\begin{aligned} x &= L\cos\alpha + X(1-\cos\alpha) \\ y &= X\sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

Ez éppen egy egyenes paraméteres egyenlete, ebből

$$y(x) = \frac{x - L\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sin\alpha.$$

A kis test tehát egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgást végez:



F6.) a.) $$F(r) = -\frac{dV}{dr} = -\frac{K}{r^2} e^{-r/a}.$$

A körpálya feltétele:

$$\frac{d}{dr}\Big(\underbrace{V(r) + \frac{J^2}{2mr^2}}_{V_{eff}(r)}\Big)\Big|_{r=r_c} = 0, \text{ azaz } \quad \frac{K}{r_c^2} e^{-\frac{r_c}{a}} - \frac{J^2}{mr_c^3} = \emptyset. \qquad (1)$$

A stabilitás feltétele:

$$\frac{d^2}{dr^2} V_{eff}(r)\Big|_{r=r_c} > 0 \quad \text{azaz} \quad -\frac{2K}{r_c^3} e^{-\frac{r_c}{a}} - \frac{K}{ar_c^2} e^{-\frac{r_c}{a}} + \frac{3J^2}{mr_c^4} > \emptyset \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből:

$$-\frac{2K}{r_c^3} e^{-\frac{r_c}{a}} - \frac{K}{ar_c^2} e^{-\frac{r_c}{a}} + 3\frac{K}{r_c^3} e^{-\frac{r_c}{a}} > \emptyset,$$

azaz a körpálya stabil, ha $\underline{\underline{r_c < a}}$.

b.) A körfrekvencia: $\omega^2 = \frac{1}{m} \frac{d^2}{dr^2} V_{eff}(r)$. Ez (1) és (2) alapján így is írható:

$$m\omega^2 = \frac{J^2}{mr_c^4} - \frac{J^2}{mr_c^3 a} = \frac{J^2}{mr_c^4}\left(1 - \frac{r_c}{a}\right),$$

azaz

$$\omega = \frac{J}{mr_c^2}\sqrt{1 - \frac{r_c}{a}}$$

c.) A pálya záródik, ha:

$$\frac{\omega}{\dot\varphi} = \frac{\omega}{J/mr_c^2} = \sqrt{1 - \frac{r_c}{a}} = \text{racionális szám}.$$

A feladatban ez az arány $\frac{1}{2}$, így $\underline{\underline{r_c = \frac{3}{4}a}}$.