

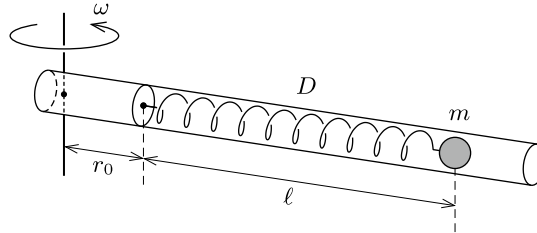
Elméleti mechanika gyakorlat

1. zárthelyi dolgozat

2017. november 10. (péntek) 15⁰⁰-17⁰⁰

Minden feladat egyformán 10 pontot ér. A feladatok megoldásához számológépen és íróeszközökön kívül semmilyen segédeszköz nem használható.

F1. Egy űrállomáson, a súlytalanság állapotában a következő kísérletet állítjuk össze. Egy D rugóállandójú, elhanyagolható nyugalmi hosszúságú és tömegű rugó végére egy m tömegű, pontszerű testet rögzítünk, majd a rendszert egy üvegcsőbe helyezzük. A rugó egyik végét a cső egy pontjához rögzítjük, majd a csövet a rugó rögzített végétől r_0 távolságban lévő, a csőre merőleges tengely körül $\omega < \sqrt{D/m}$ szögsebességgel egyenletes forgásba hozzuk.



a) A kezdeti rezgések lecsillapodása után a rugó állandósult ℓ hosszúságú lesz. Határozzuk meg ℓ értékét!

b) Ezután a testet kissé kitérítjük, majd kezdősebesség nélkül elengedjük. Mennyi idő alatt csökken a test rezgéseinek amplitúdója $1/e$ -szeresére, ha a cső fala és a test között a Coulomb-féle (nyomóerővel arányos) súrlódás lép fel, amelyet a μ csúszási súrlódási tényezővel jellemezhetünk? Tegyük fel, hogy μ viszonylag kicsi, azaz $\mu < \sqrt{D/(m\omega^2)} - 1$.

F2. Egy R sugarú, hengersizmetrikus optikai szál belsejében a törésmutató az

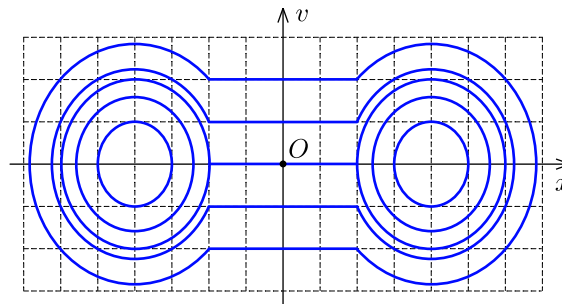
$$n(y) = n_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}$$

összefüggés szerint változik a henger tengelyétől (vagyis az x tengelytől) mért y távolság függvényében (itt n_0 pozitív konstans). Ebben a feladatban a Fermat-elv segítségével azt vizsgáljuk, hogy milyen pályán halad az optikai szálban egy fénysugár.

a) Írjuk fel a kanonikus energiát (Beltrami-kifejezést)!

b) Adjuk meg az origóból az x tengellyel α szöget bezáró irányban kiinduló fénysugár $y(x)$ pályáját!

F3. Az ábrán egy egydimenziós potenciálban mozgó, 0,2 kg tömegű pontszerű test néhány jellegzetes trajektóriája látható a $v(x)$ fázistérben szemlélítve. Egy vízszintes beosztás 5 cm-t, egy függőleges beosztás pedig 10 cm/s-ot jelöl, a görbe vonalak mind ellipszisek (vagy ellipszisévek).



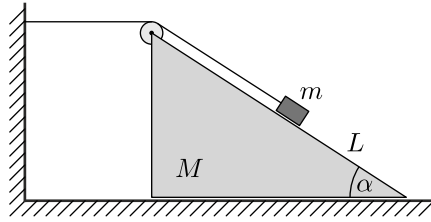
a) Adjuk meg a $V(x)$ potenciál alakját!

b) Mekkora az ábrán látható legnagyobb energiájú trajektóriához tartozó periódusidő?

F4. Egy m tömegű, ω_0 sajátfrekvenciájú, csillapítatlan, egydimenziós harmonikus oszcillátor kezdetben nyugalomban, az egyensúlyi helyzetében helyezkedik el ($x = 0, \dot{x} = 0$). Határozzuk meg az oszcillátor $x(t)$ kitérés-idő függvényét, ha az oszcillátort a következő időfüggésű külső erővel gerjesztjük:

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & \text{ha } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

F5. Az ábrán látható, M tömegű, α hajlásszögű ék felső éléhez egy ideális csiga van rögzítve. A csigán egy L hosszúságú fonalat vetettünk át, melynek egyik végét vízszintesen kifeszítve egy függőleges falhoz, másik végét pedig az éken elhelyezkedő, m tömegű kis testhez rögzítettük. Az ék ferde lapja éppen L hosszúságú. Kezdetben az ék éppen L távolságra van a faltól, ekkor a kis test az ék felső élénél (a csigánál) található. Ebből a helyzetből a testeket elengedjük. A súrlódás mindenhol elhanyagolható.



- A Lagrange-formalizmus segítségével határozzuk meg az ék gyorsulását!
- Rajzoljuk fel, milyen pályán mozog a kis test, és adjuk meg a pálya jellemző paramétereit!

F6. Egy pontszerű, m tömegű test olyan centrális erőterben mozog, melyet az

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} e^{-r/a}$$

alakú, vonzó jellegű *erőtörvény* ír le, ahol K és a pozitív konstansok.

- Milyen r_c sugarú körpályák lehetnek stabilak ebben az erőterben?
- Adjuk meg a (stabil) r_c sugarú körpálya körüli kis rezgések ω körfrekvenciáját!
- Mutassuk meg, hogy a körpálya r_c sugarától mért kitérésben ideálisan lineárisnak tekintett *erőtörvény* mellett létezik zárt pálya! Adjuk meg azt az r_c pályasugarat, amelyre két teljes körbefordulás alatt a test pontosan egy periódusnyi rezgést végez sugárirányban!