Elméleti mechanika 1. ZH

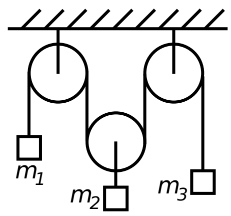
Név & Neptun kód:

2016.11.10., pontszám: ~~47~~ 41

1. Feladat[4] Egy m tömegű pontrészecske a következő V(x) potenciálban mozog:

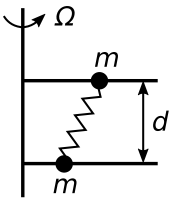
$$V(x) = \begin{cases} V_0, & \text{ha } x < -x_0, \\ 0, & \text{ha } -x_0 \leq x \leq 0, \\ ax^2, & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

(a) Vázoljuk a potenciált és a fázistérbeli trajektóriákat! (b) Számítsuk ki a potenciálban történő mozgás periódusidejének energiától való függését, ha $0 < E < V_0$! (A V_0, a, x_0 konstans, pozitív paraméterek.)



2. Feladat[4.5] (a) Írjuk fel az oldalt látható rendszer Lagrange-függvényét és a mozgásegyenleteket, a kényszereket Lagrange-multiplikátorokkal figyelembe véve! (b) Mekkora gyorsulással mozognak a testek? (*A csigák és a kötelek tömege, a közegellenállás, ill. a súrlódás is elhanyagolható. A testek csak függőlegesen mozognak és a vizsgált tartományban nem buknak át a csigákon. A kötelek végig feszesek. A rendszer homogén gravitációs térben van.*)

3. Feladat[10.5] *„Csúszó gömbi inga.”* Egy m_1 tömegű golyó egy vízszintes rúdon *súrlódva* mozoghat. A golyóhoz egy l hosszúságú merev, elhanyagolható tömegű rúddal egy m_2 tömegű másik golyót rögzítünk, ami tetszőlegesen mozoghat a térben. A golyókra ható közegellenállást is vegyük figyelembe, a levegő *ritka* közegnek tekinthető. A rendszer homogén gravitációs térben van. (a) Mennyi a rendszer szabadsági fokainak száma? Vannak-e ciklikus koordináták? Válaszainkat indokoljuk röviden! (b) A kényszert figyelembe vevő általános koordinátákat használva írjuk fel a rendszer Lagrange- és Rayleigh-függvényét, illetve (c)* a mozgásegyenleteket!



4. Feladat[11] Egy k rugóállandójú, l_0 nyugalmi hosszú *csillapítatlan* rugóval összekötött m tömegpontok vízszintes rudak mentén mozoghatnak súrlódásmentesen. A rudak távolsága d, és a végük egy függőleges tengelyhez van rögzítve, amelyet Ω állandó szögsebességgel forgatunk, homogén gravitációs térben. *Vizsgáljuk a rendszer mozgását bizonyos közelítésekkel élve!* (a) Írjuk fel a Lagrange-függvényt és a mozgásegyenleteket! (b) Tegyük fel, hogy a tömegpontok vízszintes koordinátáinak különbsége kicsi d-hez képest, és közelítsük ennek megfelelően a mozgásegyenleteket! *Közelítésünk olyan legyen, ami figyelembe veszi az első anharmonikus tagot!* Térjünk át tömegközépponti és relatív koordinátára és írjuk fel ezekkel a mozgásegyenleket! Mi a tömegközéppontra vonatkozó differenciálegyenlet általános megoldása? (c) Milyen paraméterek mellett biztos, hogy konzisztens a használt közelítés? (d) Legyen most a rugónk *gyengén csillapított*! Írjuk fel a Rayleigh-függvényt és a mozgásegyenleteket! Utóbbit adjuk meg a tömegközépponti és a relatív koordinátával! (e) Legyen most a rugó előfeszített ($l_0 < d$) és tegyük fel, hogy jelen vannak az előző pontban kiszámolt disszipatív tagok! Vezessük be az $\varepsilon = l_0/d$ kis *dimenziótlan* paramétert, és alkalmazzunk időfüggő perturbációszámítást ε-ban első rendig elmenve! Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy *létezik* olyan megoldás a relatív koordinátára vonatkozóan, ami a harmonikus oszcillátoréval azonos!

5. Feladat[12] Egy m tömegű, E energiájú pontrészecske a $V(x) = V_0[(ax)^6 - 2(ax)^4 + (ax)^2]$ potenciálban mozog ($a > 0, V_0 > 0$). (a) Adjuk meg a potenciál zérushelyeit, az egyensúlyi helyeket és azok stabilitását! (b) Vázoljuk a potenciált és a fázistérképet! (c) Mekkora a stabil egyensúlyi helyek körüli kis rezgések frekvenciája? (d) Mekkora a szeparátrixon mozgó részecske energiája? (e)* Most tegyük fel, hogy még egy b dimenziótlan paramétertől is függ a potenciál a következő módon: $V(x) = V_0[b(ax)^6 - 2(ax)^4 + (ax)^2]$. Adjuk meg az egyensúlyi helyeket! A stabilitásvizsgálathoz ezúttal ne deriváljunk, hanem a zérushelyeket is használva vázoljuk a potenciált és ez alapján következtessünk a stabilitásra! Vázoljuk a bifurkációs diagramot b függvényében!

6. Feladat[5] Egy gyárcsarnok teteje, az ott működő gépek rezgései miatt az $A\cos^2(\Omega t)$ függvény szerint mozog függőlegesen (egy alkalmas ponttól mérve). A plafonra fel van függesztve egy l_0 nyugalmi hosszú, k rugóállandójú *csillapítatlan* rugóval egy m tömegű test. (a) Vezessünk be megfelelő jelölést, *készítsünk ábrát* és írjuk fel a Lagrange-függvényt és a mozgásegyenleteket! (b) Milyen mozgást végez a felfüggesztett m tömegű test? A $t = 0$ időpillanatban a test a plafontól d távolságra van, sebessége ekkor 0. A rendszer homogén gravitációs térben van. (*A csillapítás, közegellenállás elhanyagolható, és feltehetjük, hogy a tömegpont csak függőleges irányban mozoghat. A gyár régóta, folyamatosan működik.*)