1. Elméleti mechanika ZH

2015. okt. 21.
Név, neptun kód:

1. Feladat (3 pont) Egy m tömegű, E energiájú pontrészecske a

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x < 0, \\ ax^2, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

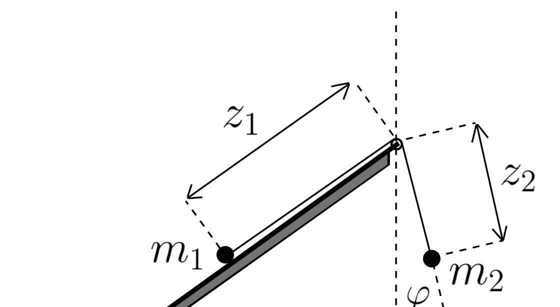
potenciálban mozog ($a > 0$). (a) Számítsuk ki a mozgás periódusidejét! (b) Vázoljuk a potenciált és a fázistérképet! (c) Legyen most a megadott potenciálunk esetében $a < 0$. Induljon ekkor $v_0 = \sqrt{\frac{2|a|x_0^2}{m}}$ kezdősebességgel a részecske az x_0 pontból, és adjuk meg mennyi idő alatt jut a $2x_0$ koordinátájú pontba!

2. Feladat (5 pont) Egy m tömegű részecske a $V(x) = ax + \varepsilon bx^3$ potenciálban mozog, a $t = 0$ időpillanatban v_0 sebességgel indul az origóból. Írjuk le a test mozgását $\varepsilon = 0$ esetén! Írjuk fel az $\varepsilon \ll 1$ dimenziótlan paraméter szerinti perturbációs sorfejtésből adódó korrekciókat meghatározó differenciálegyenleteket a második rendig (tehát az $O(\varepsilon^3)$ tagokat elhanyagolva), a hozzájuk tartozó kezdeti feltételekkel együtt! Oldjuk meg a differenciálegyenleteket!

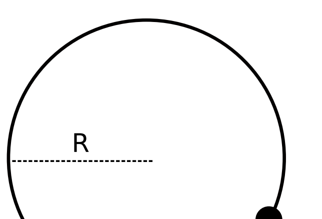
3. Feladat (5 pont) Adott l hosszúságú fonál végeire egy m_1 és egy m_2 tömegű testet rögzítünk, majd a fonalat átvetjük egy ferde, rögzített vékony lemez (lejtő) végén lévő csigán, az ábra szerint. (A rendszer homogén gravitációs térben van, a súrlódás mindenhol elhanyagolható és egyik tömegpont sem bukik át a vizsgált mozgás során a lemez végén lévő csigán.) (a) Használjuk a z_1, z_2 és φ általános koordinátákat, és a kényszerfeltételt Lagrange-multiplikátorral figyelembe véve írjuk fel a Lagrange-függvényt! (b) Adjuk meg a mozgásegyenleteket! (c) A mozgásegyenletek felhasználásával mutassuk meg, hogy az m_2 tömegű golyó ingása esetén szükségképpen z_1 és z_2 is változik! Ehhez az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk csak a $\varphi \ll 1$-el jellemezhető mozgások vizsgálatára!

4. Feladat (5 pont) Vízszintes síkban elhelyezkedő kör alakú drótkereten egy m_1 és egy m_2 tömegű tömegpont mozoghat, melyeket egy k rugóállandójú, l_0 nyugalmi hosszúságú rugó köt össze az ábra szerint. A kör alakú drótkeret sugarát jelöljük R-el. (a) Írjuk fel a Lagrange-függvényt és a (b) mozgásegyenleteket! (c) Legyen most a két tömeg egyenlő ($m_1 = m_2 = m$) és legyen a rugó nyugalmi hossza $l_0 \ll R$, valamint a vizsgált mozgás során a két tömegpont köríven, radiánban mért távolsága is kicsi. Adjuk meg ebben a közelítésben a mozgásegyenletek általános megoldását! (A feladatban a súrlódás elhanyagolható.)

5. Feladat (4 pont) Egy csillapított, m tömegű oszcillátort a következő erővel gerjesztünk: $F(t) = F_0\theta(t)(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$, ($\tau > 0$, $\theta(t)$ a Heaviside-függvény). Adjuk meg a kitérés időfüggését, ha a kezdeti feltételek: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$!
(A csillapított harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m$, Green-függvénye frekvenciatérben $\widetilde{G}(\omega) = ({\omega_0}^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\omega\alpha)^{-1}$, az idő függvényében pedig $G(t) = \frac{\theta(t)}{\omega_\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}\sin(\omega_\alpha t)$, ahol $\omega_\alpha^2 = {\omega_0}^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$.)



Ábra a 3. feladathoz.



Ábra a 4. feladathoz.