1. Elméleti mechanika ZH

2014. nov. 6.

1. Feladat (4 pont)
Tekintsük a $V(x) = ax^2 + bx^5$ ($a > 0$) potenciált. (a) Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket és azok stabilitását, ábrázoljuk ezt bifurkációs diagramon b függvényében. (b) Mi a stabil egyensúlyi hely(ek) körüli kis rezgések frekvenciája? (c) Vázoljuk a fázistérbeli trajektóriákat $b > 0$ esetén különböző energiájú mozgások esetén!
Pontozás:
(a) $x_{0,1} = 0$, $x_{0,2} = \sqrt[3]{-\frac{2a}{5b}} \to 0.75$ p + 0.75 p;
stabil/instabil $\to$ 0.5 p + 0.5 p;
bifurkációs diagram $\to$ 0.5 p;
(b) kis rezgések frekvenciája $\to$ 0.5 p
(c) trajektóriák $\to$ 0.5 p
Kis számolási hibáért 0.1 pont levonása járt. A (b) résznél, ha csak részben volt jó a bifurkációs diagram, arra 0.2, 0.3 pontot adtam. A (c) résznél ha valaki elkezdte vázolni a trajektóriákat, és a stabil fixpont köré ellipsziseket rajzolt, arra adtam 0.2 pontot.

2. Feladat (3 pont)
Egy m tömegű tömegpont $v_0 = \sqrt{\frac{2a}{m}}x_0^3$ sebességgel indul az $x_0 > 0$ pontból a $V(x) = -ax^6$ potenciálban ($a > 0$). Adjuk meg a végtelenbe jutás idejét!
Pontozás:
$E = \frac{m}{2}v_0^2 + V(x) = 0$ felírásáért 1.5 pont (0.5 p kin. en., 0.5 p potenciál, 0.5 p ”=0”)
$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^6}}$ kiindulási képlet 0.5 p;
$1/x^3$ integrálja $\to$ 0.5 p;
helyes behelyettesítés, és végeredmény $\to$ 0.5 p.

3. Feladat (3 pont)
Határozzuk meg a $V(x) = V_0 \mathrm{tg}^2(\alpha x)$ potenciálban való mozgás periódusidejét az energia függvényében! (Tipp: térjünk át az $y = \sin(\alpha x)$ változóra.)
Pontozás:
A) megoldási út: közvetlen integrálással
fordulópontok felismerés $\to$ 0.5 p;
helyes képlet T-re a feladat potenciáljával $\to$ 0.5 p;
integrál helyes elvégzése $\to$ 2 p;
Egyéb:
0.2 pontot adtam, ha valaki helyesen felírta a Jacobit
0.2 pontot vontam le a határ elnézéséért; 0.1 pontot a Jacobi-det. lefelejtéséért;
0.5 pontot valamilyen nagyobb számolási hibáért; illetve
0.5 pontot vontam le, ha az utolsó integrálnál az $\arcsin(x)$ végeredmény helyett más szerepel.
B) megoldási út: változócsere az energiára vonatkozó képletben, harmonikus oszcillátor (3 p)
Kisebb számolási hibákért -0.1 pont.

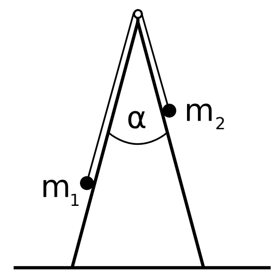
4. Feladat (4 pont)
Adott l hosszúságú fonál végeire egy m_1 és egy m_2 tömegű testet rögzítünk, majd a fonalat átvetjük egy α szögű csúccsal rendelkező h magasságú szimmetrikus éken az ábra szerint. (A rendszer homogén gravitációs térben van, a fonálhossz $l < h/\cos(\alpha/2)$, és egyik tömegpont sem bukik át a vizsgált mozgás során az ék csúcsában lévő csigán.) (a) Írjuk fel a Lagrange-függvényt! (b) Határozzuk meg a fonálban ébredő kényszererő nagyságát! (Használjunk Lagrange-multiplikátort a kényszerfeltétel figyelembevételéhez!) (c) Adjuk meg a mozgásegyenleteket és azok megoldását, ha a testek kezdetben nyugalomban voltak!
Pontozás:

(a) Lagrange $\to$ 1.5 p (0.5 p (K) + 0.5 p (V) + 0.5 p (kényszer));
(b) kényszererő $\to$ 1 p;
(c) mozgásegyenletek (1 p), megoldásuk a megadott kf-el (0.5 p).

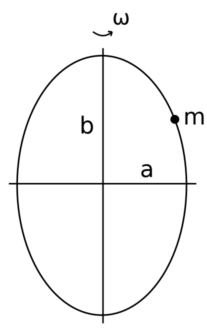
5. Feladat (5 pont)
Egy csillapított oszcillátort hosszú ideje az $F(t) = F_0 \cos^2(\Omega t)$ külső erővel gerjesztünk. Adjuk meg a kitérés időfüggését!
(A csillapított harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m$, Green-függvénye frekvenciatérben $\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\omega\alpha}$, az idő függvényében pedig $G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}\sin(\omega t)$, ahol $\omega^2 = {\omega_0}^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$.)

Pontozás:
A) úton: F Fourier transzformáltja helyesen (2 p);
$\tilde{x}(\omega) = \tilde{G}(\omega)\tilde{f}(\omega) \to$ 1p, ha utána fel is lett használva;
$\tilde{x}(\omega)$-ból $x(t)$ számolása, helyes végeredmény (1p + 1p).
B) úton: konvolúció formulája időtérben, ha be is lett írva a helyes Green-függvény (1 p);
változócsere, és/vagy $\sin(\omega s)$ átírása $\frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\omega s} - e^{-\mathrm{i}\omega s})$ alakba (1 p)
az integrál elvégzésével arányosan (3 p).

6. Feladat (6 pont)
Egy m tömegű tömegpont egy függőleges síkban elhelyezkedő a, illetve b tengelyű ellipszis alakú keret mentén mozoghat, homogén gravitációs térben. Ezt a keretet a függőleges szimmetriatengelye körül ω szögsebességgel forgatni kezdjük. (a) Hány szabadsági fokú az így kapott rendszer? (b) Írjuk fel a Lagrange-függvényt alkalmas koordinátázásban, és az abból kapott mozgásegyenleteket! (c) Adjuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és jellemezzük stabilitásukat ω függvényében! (d) Tegyük fel, hogy a testre sebességgel arányos közegellenállási erő hat. Írjuk fel a Rayleigh-függvényt, és az így adódó mozgásegyenleteket! (Tipp: egy $x - y$ síkban elhelyezkedő ellipszis pontjai paraméterezhetők az ($a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$) alakban.)
Pontozás:
(a) 1 (0.5 p)
(b) L (1.5 p)
(c) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = 0$ megoldások (0.5 p + 0.5 p + 0.5 p)
instabil (0.2 p), stabil, ha .. (0.4 p); stabil, ha .. (0.4 p)
(d) Rayleigh-fv: 1 p, ME: 0.5 p.



Ábra a 4. feladathoz.



Ábra a 6. feladathoz.