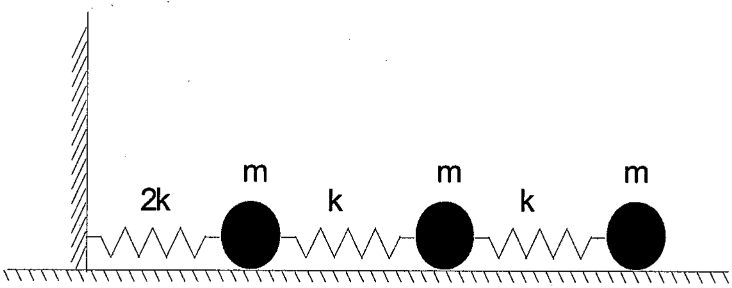
Elméleti mechanika, 2. ZH

2013. december 13.

1. Feladat (10 pont+2 bónusz pont)

Tekintsük az 1. ábrán látható elrendezést! A tömegek súrlódás nélkül csúszkálhatnak.

- Írjuk fel a Lagrange- és Hamilton-függvényt! (Használjunk egyensúlyhoz viszonyított koordinátákat!) (2+2 pont)
- A kanonikus egyenletek segítségével írjuk fel a mozgásegyenleteket! (3 pont)
- Adjuk meg a sajátrezgések frekvenciáit megadó egyenletet! Mi a helyzet a zérómódussal, miért? (2+1 pont)
- Bónusz: Adjuk meg a sajátfrekvenciákat! (Segítség: Hogy is volt az a főegyütthatóval és a konstans taggal?) (2 pont)



1. ábra.

2. Feladat (10 pont)

Tóparton a gyerekek csúszdát szeretnének építeni, arra a partszakaszra, melynek keresztmetszete becslésük szerint $y = -ax^5$; $a > 0$ alakú, jelenleg a víz $\left(X_0, Y_0 = -aX_0^5\right)$; $X_0 > 0$ pontban mossa a partot.

- Legalább milyen magasra tervezzék a csúszda tetejét, ha azt szeretnék, hogy a legnehezebb, M tömegű társuk is élvezhesse egy pillanatra a súlytalanság állapotát vízbecsapódás előtt? (Kezdősebesség nélkül indul a csúszás.) (8 pont)
- Az építést követő év esősnek ígérkezik, elképzelhető, hogy a fent említett vízmosási pont $X_0 < 0$-ra változik. Tudnak majd akkor „repülni"? (2 pont)

3. Feladat (3 pont)

Egy l hosszúságú, m tömegű rudat megforgatunk a felezőpontján átmenő tengely körül egy asztalon, ω_0 szögsebességgel. Mikor áll meg, ha a rúd és asztal közötti súrlódási együttható μ?

4. Feladat (10 pont)

Tekintsük az alábbi 2 dimenziós centrális potenciált

$$V(r) = \begin{cases} -V_0;\ V_0 > 0 & \text{ha } r_1 < r < r_2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- Milyen impulzusmomentumok esetén alakulhat ki körpálya? Stabil? Mekkora a sugara? (3 pont)
- Vegyünk most egy m tömegű, N impulzusmomentumú, $E < \frac{N^2}{2mr_2^2}$ energiájú tömegpontot. Mit állíthatunk a pályájáról? Vázoljuk a fázistér radiális részét! (2 pont)
- Tekintsük újra az előző részecskét, és kezdjük el r_2-t nagyon lassan csökkenteni (azaz $\dot{r}_2 \cdot$ periódusidő $\ll r_2 - r_1$), írjuk fel a megmaradó mennyiségre vonatkozó integrált! (2 pont)
- Tegyük fel most, hogy r_1 és r_2 is nagyok, ekkor a centrifugális potenciáltól tekintsünk el (ekkor $E < 0$). Becsüljük meg mekkorára lehet összenyomni az r_1 és r_2 távolságot, ahhoz, hogy tömegpont pályájának korlátossága ne változzon meg! (3 pont)

5. feladat (2 pont+3 bónusz pont)

Adott a következő Lagrange-sűrűség (kink-modell):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - U(\phi),$$

ahol $U(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2$.

- Írjuk fel a ϕ-re vonatkozó téregyenletet (mozgásegyenletet)! (2 pont)
- Bónusz: Mutassuk meg, hogy a

$$\phi_{kink}(x,t) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left[\frac{m}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x-x_0) - ut}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right];\ -1 < u < 1$$

"mozgó kink" megoldása a téregyenletnek!