

1.) (6 pont) Tekintsük a gerjesztett harmonikus oszcillátort $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f$, ahol a gerjesztés legyen $f(t) = f_0 \sin^2(\omega_0 t)$ ha $0 < t < \pi/\omega_0$ és 0 máshol. Számoljuk ki a differenciálegyenlet partikuláris megoldását. (Emlékeztető: A harmonikus oszcillátor retardált Green-függvénye $\theta(t) \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}$).

2.) (6 pont) Mozoghat-e egy síkinga felfüggesztési pontja a síkban elhelyezkedő körpályán. (Ez nem más, mint egy kettős inga akkor, amikor a középső tömeg 0. Írjuk fel a Lagrange-függvényt és a mozgásegyenleteket! Vannak-e ciklikus koordináták (olyan koordináták, amelyekről nem függ explicite a Lagrange-függvény)? Vannak-e megmaradó mennyiségek?

3.) (5 pont) Számoljuk ki a periódusidő energiafüggését az alábbi potenciálban:
 $V(x) = +\infty$, ha $x < -x_0$, $V(x) = 0$ ha $-x_0 < x < 0$ és $V(x) = ax$ ha $x > 0$.

4.) Egy tömegpont $y=f(x)$ kényszerpályán mozoghat homogén gravitációs erőterben.
a) (3 pont) Írjuk fel a Lagrange-függvényét és a mozgásegyenleteit!
b) (3 pont) Tegyük fel, hogy a sebességével arányos közegellenállási erő hat a tömegpontra. Írjuk fel ekkor a disszipációs függvényt és az közegellenállással módosított mozgásegyenleteket!

5.) Egy a kitérés szögével arányos visszatérítő forgatónyomatékokat (általánosított erőt) $(k\phi)$ kifejtő csavarrugóra úgy helyezünk egy tömeg nélküli rudat, hogy az egyensúlyi helyzetben a grav. térben pont felfelé álljon (mint egy metronóm). A rúd végén egy m tömegpont található.
a) (4 pont) Írjuk fel a Lagrange-függvényét és az Euler-Lagrange-egyenletet!
b) (3 pont) Mely k értékekre lesz a $\phi = 0$ egyensúlyi helyzet stabil? Adjuk meg a nem függőleges egyensúlyi helyzeteket meghatározó egyenletet. Milyen $k \leq k_c$ mellett van ilyen egyensúly?
c) (3 pont) Tegyük fel, hogy k kicsit kisebb mint k_c . A potenciál negyedrendig történő sorfejtésével határozzuk meg a többi fixpontot és stabilitásukat. Vázoljuk fel a fázisteret és a bifurkációs diagramot ebben a tartományban!

6.) Tekintsük az a rendszert, amikor egy vízszintes asztalon súrlódás nélkül csúszni képes tömegpontot az asztal "közepéhez" rögzített, 0 nyújtatlan hosszúságú rugó másik végéhez rögzítjük. Ez nem más, mint a 2D-s izotróp oszcillátor.
a) (5 pont) Írjuk fel a Lagrange-függvényt és a mozgásegyenleteket Descartes és polárkoordinátákban is! Mi a helyzet a két esetben a ciklikus koordinátákkal?
b) (2 pont) Tegyük fel, hogy a tömegpontra sebességgel arányos közegellenállási erő hat! Írjuk fel ekkor a disszipációs függvényt és az közegellenállással módosított mozgásegyenleteket (mindkét koordinátázással)!