4. Konzultáció: Periodikus jelek soros RC és RL tagokon, komplex ellenállás

Részlet (nagyon béta)

"Elektrós"-Zoli

2013. november 3.

A jegyzetről

Jelen jegyzet a negyedik konzultációm anyagának egy részletét tartalmazza.
A jegyzetben található levezetések nem szükségesek az *Elektronika és méréstechnika* című tárgy teljesítéséhez, viszont a második féléves *Differenciálegyenletek megoldása* című tárgyhoz jól jöhetnek. Emellett a fizikában máshol is vannak hasonló egyenletek és levezetések, így érdemes átnézni őket.

Frissített változatért látogasd meg a honlapomat (ami jelenleg az ls86.net névre hallgat), vagy küldj e-mailt:
lightside86@gmail.com

A jegyzet esetlegesen hibákat tartalmazhat, ha netán valaki találna ilyet, akkor kérem jelezze azt e-mailben!

2013.11.03.
Budapest

Tartalomjegyzék

1. Periodikus jelek soros RC és RL tagokon:

1.1. Periodikus négyszögjel:

Mi van, ha nem szimpla töltődés van, hanem valami változik?

1.1.1. Állandósult jelalak:

Mi történik sok sok idő múlva?

1.1.2. Egyenáramú leválasztás:

Mire jók a nagy kondenzátorok?

2. Szinuszos jel soros RC és RL tagokon

Emlékeztetőül:

Elem	$U(t) =$	$I(t) =$
R	$I(t)R$	$\frac{U(t)}{R}$
L	$L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}(t)}$	$\frac{1}{L}\int U(t')\mathrm{d}t'$
C	$\frac{1}{C}\int I(t')\mathrm{d}t'$	$C\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}(t)}$

2.1. Szinuszos áram:

Mint ahogy korábban is láthattuk, soros RL é RC kapcsolás esetén az áram határozza meg a feszültségeket. Legyen az áram:

$$I(t) = \hat{I}\sin(\omega \cdot t) \tag{2.1}$$

Soros RC:

$$U_R(t) = RI(t) \qquad U_C(t) = \frac{1}{C}\int I(t')\mathrm{d}t' \tag{2.2}$$

Vagyis:

$$U_R(t) = R\hat{I}\sin(\omega t) = \hat{U}\sin(\omega t) \qquad U_C(t) = \frac{1}{C}\int \hat{I}\sin(\omega t')\mathrm{d}t' = -\frac{\hat{I}}{\omega C}\cos(\omega t) \tag{2.3}$$

Soros RL:

$$U_R(t) = RI(t) \qquad U_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.4}$$

$$U_R(t) = R\hat{I}\sin(\omega t) = \hat{U}\sin(\omega t) \qquad U_L(t) = L\frac{\mathrm{d}(\hat{I}\sin(\omega t))}{\mathrm{d}t} = \hat{I}\omega L\cos(\omega t) \tag{2.5}$$

Most pedig vegyünk elő néhány trigonometriai azonosságot:

$$\sin(x+\pi/2) = \sin(x)\cos(\pi/2) + \cos(x)\sin(\pi/2) = \sin(x)0 + \cos(x)1 = \cos(x) \tag{2.6}$$
$$\sin(x-\pi/2) = \sin(x)\cos(\pi/2) - \cos(x)\sin(\pi/2) = \sin(x)0 - \cos(x)1 = -\cos(x) \tag{2.7}$$

Vagyis írhatjuk azt, hogy

$$U_C(t) = -\frac{1}{\omega C}\hat{I}\cos(\omega t) = \frac{1}{\omega C}\cdot\hat{I}\sin(\omega t - \pi/2) \tag{2.8}$$
$$U_L(t) = \omega L\hat{I}\cos(\omega t) = \omega L\cdot\hat{I}\sin(\omega t + \pi/2) \tag{2.9}$$

Ha ezekre ránézünk, akkor rádöbbenhetünk, hogy $1/\omega C$, valamint ωL ellenállás jellegű mennyiségek lehetnek, ugyanis a fázisban eltolt árammal vannak beszorozva.
Összefoglalásul azt mondhatjuk, hogy soros RC és RL kapcsolásoknál szinuszos áramforrás esetén a kapacitás és induktivitás ellenállása és fázistolása:

$$X_C := \frac{1}{\omega C} \qquad -90^\circ \text{ -os fázistolás} \tag{2.10}$$
$$X_L := \omega L \qquad +90^\circ \text{ -os fázistolás} \tag{2.11}$$

A $-90°$-os fázistolásra azt is szokás mondani, hogy $90°$-ot "késik" a feszültség az áramhoz képest, a $+90°$-osra pedig hogy "siet".

2.2. Szinuszos feszültség:

Ha szinuszos feszültségforrásunk van, akkor kicsit más a helyzet. Induljunk ki a huroktörvényből:

$$\begin{aligned} U_L(t) + U_R(t) &= U_g(t) && (2.12)\\ L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + RI(t) &= U \cdot \sin(\omega t) \qquad / : L && (2.13)\\ \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}I(t) &= \frac{U}{L} \cdot \sin(\omega t) && (2.14) \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{U}{L} \cdot \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t := x \\ I(t) := y(x) \\ \frac{R}{L} := a; \\ \frac{U}{L} := b \end{cases} \tag{2.15}$$

$$y'(x) + a \cdot y(x) = b \cdot \sin(\omega x) \tag{2.16}$$

Ez természetesen egy inhomogén, lineáris, elsőrendű differenciálegyenlet, melynek teljes megoldása:

$$y(x) = Y(x) + y_0(x) \tag{2.17}$$

Ahol Y a homogén egyenlet általános megoldása, y_0 pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

A homogén rész:

$$\frac{\mathrm{d}Y(x)}{\mathrm{d}x} + a \cdot Y = 0 \qquad Y(x) = Ce^{-\int a\mathrm{d}x} = Ce^{-ax} \tag{2.18}$$

Ahol C integrációs konstans. Ez alapján az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$y_0(x) := C(x)e^{ax} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y_0(x)}{\mathrm{d}x} = C'(x)e^{-ax} + (-a)C(x)e^{-ax} \tag{2.19}$$

Visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} y_0'(x) + ay_0(x) &= b\sin(\omega x) && (2.20)\\ C'(x)e^{-ax} \cancel{-aC(x)e^{-ax}} + \cancel{aC(x)e^{-ax}} &= b\sin(\omega x) && (2.21)\\ C'(x) &= b\sin(x)e^{ax} \qquad \Big/ \int \mathrm{d}x && (2.22)\\ C(x) &= \int b\sin(\omega x)e^{ax}\mathrm{d}x && (2.23) \end{aligned}$$

Itt egy parciális integrálba jutunk[1]:

$$\int \underbrace{\sin(\omega x)}_{f'(x)}\underbrace{e^{ax}}_{g(x)}\mathrm{d}x = \underbrace{-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)}_{f(x)}\underbrace{e^{ax}}_{g(x)} - \int \underbrace{-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)}_{f(x)}\underbrace{ae^{ax}}_{g'(x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)e^{ax} + \frac{a}{\omega}\int \cos(\omega x)e^{ax}\mathrm{d}x \tag{2.27}$$

Most ismét integrálunk egyet parciálisan:

$$\int \underbrace{\cos(\omega x)}_{f'(x)}\underbrace{e^{ax}}_{g(x)}\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)}_{f(x)}\underbrace{e^{ax}}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)}_{f(x)}\underbrace{ae^{ax}}_{g'(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x)e^{ax} - \frac{a}{\omega}\int \sin(\omega x)e^{ax}\mathrm{d}x \tag{2.28}$$

---

[1]

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \int \mathrm{d}x && (2.24)\\ f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x && (2.25)\\ \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x && (2.26) \end{aligned}$$

Ha (2.27)-be behelyettesítjük (2.28)-t, akkor:

$$\int \sin(\omega x)e^{ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)e^{ax} + \frac{a}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)e^{ax} - \frac{a}{\omega}\int \sin(\omega x)e^{ax}\mathrm{d}x\right) = \tag{2.29}$$

$$= -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)e^{ax} + \frac{a}{\omega^2}\sin(\omega x)e^{ax} - \frac{a^2}{\omega^2}\int \sin(\omega x)e^{ax}\mathrm{d}x \tag{2.30}$$

Ezt szépen átrendezzük:

$$\left(1+\frac{a^2}{\omega^2}\right)\int \sin(\omega x)e^{ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)e^{ax} + \frac{a}{\omega^2}\sin(\omega x)e^{ax} \tag{2.31}$$

$$\left(\frac{\omega^2+a^2}{\omega^2}\right)\int \sin(\omega x)e^{ax}\mathrm{d}x = \frac{a}{\omega^2}\sin(\omega x)e^{ax} - \frac{1}{\omega}\cos(\omega x)e^{ax} \tag{2.32}$$

$$\int \sin(\omega x)e^{ax}\mathrm{d}x = \left(\frac{\omega^2}{\omega^2+a^2}\right)\left[\frac{a}{\omega^2}\sin(\omega x)e^{ax} - \frac{1}{\omega}\cos(\omega x)e^{ax}\right] \tag{2.33}$$

$$\int \sin(\omega x)e^{ax}\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{\omega^2+a^2}\left[a\sin(\omega x) - \omega\cos(\omega x)\right] \tag{2.34}$$

Tehát

$$C(x) = b\frac{e^{ax}}{\omega^2+a^2}\left[a\sin(\omega x) - \omega\cos(\omega x)\right] \tag{2.35}$$

Így a teljes megoldás:

$$y(x) = Y(x) + y_0(x) = Ce^{-ax} + b\frac{\cancel{e^{ax}}}{\omega^2+a^2}\left[a\sin(\omega x) - \omega\cos(\omega x)\right]\cancel{e^{-ax}} = \tag{2.36}$$

$$= Ce^{-ax} + \frac{b}{\omega^2+a^2}\left[a\sin(\omega x) - \omega\cos(\omega x)\right] \tag{2.37}$$

És most térjünk vissza az eredeti mennyiségekre:

$$I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{L}\frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\omega^2}\left[\frac{R}{L}\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right] \tag{2.38}$$

Az egyetlen ismeretlen integrációs konstans a C. A tag, amiben szerepel, egy időben exponenciálisan lecsengő tag ($\frac{L}{R} := \tau$, szokásos jelölés) tehát ez nyílván azt jelenti, hogy van egy kezdeti mennyiség, ami idővel "elhal", lecseng a veszteségek miatt (R). Logikus következtetés, hogy C a kezdeti áram, I_0. Az időállandónak megfeleltethető egy frekvencia, ezt jelöljük ω_h-val ($\omega_h := 1/\tau$). Tehát:

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{L}\frac{1}{\omega_h^2+\omega^2}\left[\omega_h\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right]} \tag{2.39}$$

Itt ismét érdemes a cos-t átírni sin-á, mert akkor szuperponálhatjuk a sin-al[2].

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{L}\frac{1}{\omega_h^2+\omega^2}\left[\omega_h\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right] = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{L}\frac{1}{\omega_h^2+\omega^2}\left[\omega_h\sin(\omega t) + \omega\sin(\omega t - \pi/2)\right] \tag{2.42}$$

És akkor a jelölések:

$$A_1 = \omega_h \quad A_2 = \omega \quad \varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = -\pi/2 \tag{2.43}$$

Így:

$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{{\omega_h}^2 + \omega^2 + \omega_h\omega\underbrace{\cos(\pi/2 - 0)}_{=0}} = \sqrt{{\omega_h}^2 + \omega^2} \tag{2.44}$$

[2] Szinuszos rezgések szuperponálása (Bronstejn 8. kiadás 2.7.3.2. Rezgések szuperpozíciója, vagy összetétele, 84. oldal)

$$A_1\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\sin(\omega t + \varphi_2) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{2.40}$$

ahol

$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad \tan(\varphi) = \frac{A_1\sin(\varphi_1) + A_2\sin(\varphi_2)}{A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_2)} \tag{2.41}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{A_1\sin(\varphi_1)+A_2\sin(\varphi_2)}{A_1\cos(\varphi_1)+A_2\cos(\varphi_2)} = \frac{\omega_h \overbrace{\sin(0)}^{=0} + \omega \overbrace{\sin(-\pi/2)}^{=-1}}{\omega_h \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \omega \underbrace{\cos(-\pi/2)}_{=0}} = -\frac{\omega}{\omega_h} \tag{2.45}$$

Vagyis

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_h}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\frac{R}{L}}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{X_L}{R}\right) \tag{2.46}$$

Tehát a pusztán sin-al leírt áram:

$$\begin{aligned}
I(t) &= I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{L}\frac{\sqrt{\omega_h{}^2+\omega^2}}{\omega_h^2+\omega^2}\sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right] = && (2.47)\\
&= I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{L}\frac{1}{\sqrt{\omega_h{}^2+\omega^2}}\sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right] = && (2.48)\\
&= I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{L}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\omega^2}}\sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right] = && (2.49)\\
&= I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{L}\frac{1}{\sqrt{\frac{R^2+\omega^2L^2}{L^2}}}\sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right] = && (2.50)\\
&= I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right] && (2.51)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right]} \tag{2.52}$$

Az áram ismeretében az ellenálláson és induktivitáson eső feszültség már könnyen számítható:

$$\begin{aligned}
U_R(t) &= RI(t) = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right] && (2.53)\\
&= U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right] && (2.54)
\end{aligned}$$

$$\boxed{U_R(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U\frac{R}{\sqrt{R^2+X_L{}^2}}\sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right)\right]} \tag{2.55}$$

Az induktivitásé:

$$\begin{aligned}
U_L(t) &= L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = LI_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + U\frac{L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right]\right) && (2.56)\\
&= -I_0\frac{L}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + U\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right] && (2.57)\\
&= -I_0\frac{\cancel{L}}{\frac{\cancel{L}}{R}}e^{-\frac{t}{\tau}} + U\frac{X_L}{\sqrt{R^2+X_L{}^2}}\sin\left[\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right)\right] && (2.58)\\
&= -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U\frac{X_L}{\sqrt{R^2+X_L{}^2}}\sin\left[\omega t + \arctan\left(\frac{R}{X_L}\right)\right] && (2.59)
\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy $\tan(\varphi) = \cot(\varphi') = \cot(\pi/2-\varphi)$, valamint hogy $\tan(\varphi) = 1/\cot(\varphi)$, így $\tan(\varphi) = 1/\tan(\pi/2-\varphi)$

$$\boxed{U_L(t) = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U\frac{R}{\sqrt{R^2+X_L{}^2}}\sin\left[\omega t + \arctan\left(\frac{R}{X_L}\right)\right]} \tag{2.60}$$

És most nézzük a soros RC-t, de csak röviden. Ekkor a huroktörvény:

$$\begin{aligned}
U_C(t) + U_R(t) &= U_g(t) && (2.61)\\
RI(t) + \frac{1}{C}\int I(t')\mathrm{d}t' &= U\cdot\sin(\omega t) \qquad /\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} && (2.62)\\
R\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I(t) &= U\omega\cdot\cos(\omega t) \qquad /\cdot\frac{1}{R} && (2.63)\\
\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}I(t) &= \frac{U\omega}{T}\cdot\cos(\omega t) && (2.64)
\end{aligned}$$

Ha ezt végigszámolnánk, akkor azt kapnánk eredményül, hogy:

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U \frac{1}{\sqrt{R^2 + {X_C}^2}} \sin\left[\omega t + \arctan\left(\frac{X_C}{R}\right)\right]} \tag{2.65}$$

$$\boxed{U_R(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U \frac{R}{\sqrt{R^2 + {X_C}^2}} \sin\left[\omega t + \arctan\left(\frac{X_C}{R}\right)\right]} \tag{2.66}$$

$$\boxed{U_C(t) = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + {X_C}^2}} \sin\left[\omega t - \arctan\left(\frac{R}{X_C}\right)\right]} \tag{2.67}$$

3. Komplex ellenállások

3.1. Az eddigi tapasztalatok összefoglalása

Az eddigi tapasztalatok soros RC kapcsolásoknál:

- Áramgenerátor esetén a kondenzátorok feszültsége $90°$-os késésben van az áramhoz képest (ami mellékesen egybeesik az ellenállás fázisával, mivel az ellenállás feszültsége "leköveti" az áramot.
- A kondenzátorok ellenállása alacsony frekvenciákon nagy, magas frekvenciákon kicsi.
- Feszültséggenerátor esetén a kondenzátorokon eső szinuszos feszültség alacsony frekvenciánál közel egybeesik a bemenő jel fázisával, magas frekvenciákon közel $-90°$-os eltolást szenved.
- Az ellenállás és a kondenzátor feszültsége közt mindíg van egy $-90°$-os fáziskülönbség.

Hasonlóképpen a tapasztalataink soros RL kapcsolások esetén:

- Áramgenerátor esetén a tekercsek feszültsége $90°$-ot siet az áramhoz képest.
- A tekercsek ellenállása alacsony frekvenciákon kicsi, míg magas frekvenciákon nagy.
- Feszültséggenerátor esetén a tekercseken eső szinuszos feszültség alacsony frekvenciánál közel $+90°$-os eltolást szenved, míg magas frekvenciákon közel egybeesik.
- A tekercs és az ellenállás feszültsége közt minden pillanatban $+90°$ fáziskülönbség van.

Tehát akkor vegyük sorra, hogy mi milyen fázisban van?

Mivel soros kapcsolásokról van szó, ezért az áram minden alkatrésznél azonos, de csak az ellenálláson eső feszültség fázisával esik egybe.
Feszültséggenerátorok esetén a bemenő feszültség az eredő ellenálláson esik, ezáltal fázisa különbözik mind az ellenállás, mind a frekvenciafüggő ellenállások[3] fázisától, azok "eredőjén" esik.

Mindezen tulajdonságok precíz matematikai leírása a komplex számok segítségével lehetséges!

3.2. A komplex ellenállások:

Ellenállások alatt általában az "Ohm-os" ellenállást értjük. A kapacitív és induktív ellenállásokat (valamint az olyan hálózatok eredő ellenállását, melyek frekvenciafüggő és ohmos ellenállásokat is tartlmaznak) impedanciáknak nevezzük.

Az impedanciáknak két fő jellemzője van: fázis és abszolút érték. Szokásos ezen mennyiségeket a komplex számok segítségével leírni.
A kapacitások impedanciájának a fázisa $-90°$, ami a komplex számok nyelvén: $-j$ (ahol $j^2 = -1$), az abszolút értéket jelöljük X_C-vel, így a kapacitív impedancia:

$$Z_C = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} \qquad |Z_C| = X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{3.1}$$

[3] Ezáltal az áramhoz képesti fázistolásban van.

Az induktivitások impedanciájának a fázisa $+90°$, ami a komplex számok nyelvén: j, az abszolút értéket jelöljük X_L-el, így az induktív impedancia:

$$Z_L = jX_L = j\omega L \qquad\qquad |Z_L| = X_L = \omega L \tag{3.2}$$

Egyesekben felmerülhet a kérdés, hogy miként kell bánni ezekkel a komplex ellenállásokkal?

A válasz: ugyan úgy, ahogy az Ohm-osakkal! ;-) A különbség csak annyi, hogy nem szimplán R-ek lesznek a képletekbnen, hanem lesznek benne Z_L-ek és Z_C-k is. Csak annyi a különbség, hogy a kiszámításkor kell tudni bánni a komplex számokkal.

1. Példa soros RLC kapcsolás eredője:

$$\begin{aligned} Z_e &= R + Z_L + Z_C = R + jX_L - jX_C = R + j\left(X_L - X_C\right) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = && (3.3)\\ &= R + j\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right) && (3.4)\end{aligned}$$

   Ha csak az abszolút érték érdekel minket, akkor a komplex számoknál szokásos módon számolunk[4] Vagyis a példánknál maradva:

$$|Z_e| = \sqrt{\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \cdot \left[R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{3.6}$$

2. Példa: egy párhuzamosan kapcsolt kapacitással és induktivitással sorosan kapcsolt ellenállás esetén:

$$\begin{aligned} Z_e &= R + Z_L \times Z_C = R + \frac{Z_L \cdot Z_C}{Z_L + Z_C} = R + \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = R + \frac{\frac{L}{C}}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = && (3.7)\\ &= R - j\frac{\frac{L}{C}}{\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}} = R - j\frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} && (3.8)\end{aligned}$$

   És így az abszolút érték:

$$|Z_e| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}\right)^2} \tag{3.9}$$

A komplex ellenállások és feszültségek ábrázolása: komplex vektorábrák

Ide kellenének.

[4] A komplex szám szorozva önmaga komplex konjugáltjával megadja az abszolútértékének négyzetét.

$$|a + i \cdot b|^2 = (a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b) = a^2 + b^2 \qquad \to \qquad |a + i \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3.5}$$