# 1. Konzultáció: Áramköri alapfogalmak és ellenállás-hálózatok

"Elektrós"-Zoli

2013. november 3.

## A jegyzetről

Jelen jegyzet az első konzultációm anyagát tartalmazza, néhol kissé bővebben, valamint több példával, mint a konzultációkon volt.
A jegyzet utolsó fejezetei (Érdekes, hasznos, trükkös példák, valamint a Függelék) olyan dolgokról szól, melyek elsajátítása nem létszükség az *Elektronika és méréstechnika* című tárgy teljesítéséhez, és még laboratóriumban sem biztos, hogy előjönnek, viszont a második féléves *Elektromágnesség* című tárgy előadásaihoz és gyakorlataihoz jól jöhetnek.

**A jegyzet bárki szabadon letöltheti a honlapomról, viszont nem járulok hozzá, hogy a jegyzeteimet bárki más terjessze, továbbadja, vagy módosítsa!**
**Frissített változatért látogasd meg a honlapomat (ami jelenleg az ls86.net névre hallgat), vagy küldj e-mailt: lightside86@gmail.com**

A jegyzet esetlegesen hibákat tartalmazhat, ha netán valaki találna ilyet, akkor kérem jelezze azt e-mailben!

2013.11.03.
Budapest

# Tartalomjegyzék

# 1. Alapvető áramköri törvények:

## 1.1. Ohm-törvény

Egy vezető két pontjának potenciálkülönbsége elosztva a rajta átfolyó áram erősségével megadja az adott vezető két pontja közt lévő ellenállás értékét. Az ellenállás mértékegysége az Ohm ($\Omega$).
(*Ez persze nem tökéletesen precíz megfogalmazás egyetemen, és látható lesz majdani tanulmányok során*[1]*., hogy szorul még némi kiegészítésre, de én igyekszem az egyszerűségnél maradni* ).

$$R = \frac{U}{I} \qquad [R] = \frac{V}{A} = \Omega \tag{1.1}$$

## 1.2. Kirchhoff törvények:

**Kirchhoff I. törvénye (csomóponti törvény):**

Egy áramköri csomópontból kifolyó, és az oda befolyó áramok előjeles összege nulla.
(*Ez részben azt is kimondja, hogy nem jöhetnek létre extra töltések, és nem is tűnhetnek el a semmibe. Vagyis ez egyben a töltésmegmaradás megfogalmazása is.*)

$$\sum_k I_k = 0 \tag{1.2}$$

**Kirchhoff II. törvénye (huroktörvény):**

Zárt áramköri hurok mentén az egyes feszültségek előjeles összege nulla.
*(A gyakorlatban, ha van egy zárt áramköri hurok, akkor tetszés szerint felvehető egy pozitív körbejárási irány. Az áramköri hurokban, ha egy vektor a hurok körbejárási irányával azonos irányú, akkor pozitív előjellel adjuk hozzá a többihez, ha ellentétes a vektor iránya, akkor negatívnak tekintjük.)*

$$\sum_k U_k = 0 \tag{1.3}$$

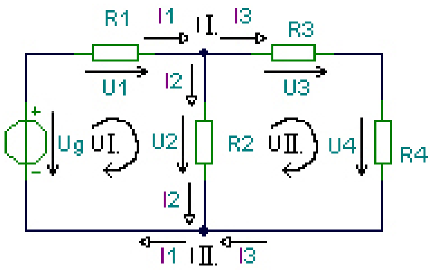
**A kettőt együtt alkalmazva:**

Tegyük fel, hogy adva van egy áramkör, és ebben ki szeretnénk számítani bizonyos értékeket (pl: feszültségeket és áramokat). Ha fel tudunk írni annyi egyenletet, amennyi hiányzó adatunk van, és ezek kellő módon kapcsolódnak az ismeretlenekhez, akkor ezek egy megoldható, több ismeretlenes egyenletrendszert adnak[2] (az egyenletek csatoltságát a csomóponti és huroktörvények megfelelő felvétele adja). A kérdéses értékekhez is rendelnünk kell bizonyos irányokat. Az irány felvétele lényegében nem számít, mert az egyenletek úgy is kiadják, hogy a felvett irányba esik-e a keresett érték, vagy vele ellentétes.

Megjegyzés:

- A feszültséget egy egyszerű nyíllal jelöljük: 
- Az áramot egy háromszögben végződő nyíllal jelöljük: 

Egy példa:




1. ábra. Áramköri hurkok és csomópontok, feszültségekkel és áramokkal

[1]Akit érdekel, lásd: A. Elektromos vezetés, Drude-modell. Továbbá, ahol az Ohm-törvény csődöt mond és kiütközik az elektronika "modell" mivolta: B. Szupravezetők
[2]Lineáris egyenletrendszerek megoldása, lásd: C. függelék.

Az egyes hurkokra és csomópontokra felírhatjuk a csomóponti és huroktörvényeket:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{U\,I.:} & -U_g + U_1 + U_2 = 0 & \mathrm{U\,II.:} & -U_2 + U_3 + U_4 = 0 \\ \mathrm{I\,I.:} & I_1 - I_2 - I_3 = 0 & \mathrm{I\,II.:} & I_2 + I_3 - I_1 = 0 \end{array} \tag{1.4}$$

A kérdéses mennyiségek összefoglalva: 4 feszültség és 3 áram, tehát 7 egyenlet kell. Jól láthatóan a két csomóponti törvény ugyan azt mondja ki, de nem kell kétségbe esni, ugyanis ha a fenti egyenletrendszert kombináljuk az egyes ellenállásokra vonatkozó Ohm-törvényekkel, akkor már van elég egyenletünk.

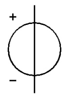
## 2. Ideális források és generátorok:

**A forrás és generátor közti különbség:**

A generátor kifejezést inkább olyan eszközökre szoktuk használni, amik valamilyen időfüggő jelet adnak le, míg forrásoknak inkább a fix feszültséget biztosító eszközöket.

(*Pongyola ember lévén, elképzelhető, hogy a továbbiakban nem teszek különbséget a kettő között, előfordul hogy mindkettőt generátornak nevezem. De ami azt illeti, ez nem túl nagy hiba: az időben konstans értéket is lehet időfüggőnek tekinteni, csak abban éppen állandó. ;-)*)

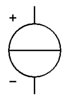
**Ideális feszültségforrás és generátor:**




Ennek a generátornak **a belső ellenállása:** $R_b = 0$, és **a rákapcsolt terheléstől függetlenül mindig a kívánt feszültségértéket biztosítja** a kapcsain.

*Ez azért lényeges, mivel ekkor ha rákapcsolunk egy ellenállást, akkor mérhető rajta a generátor feszültsége és egy bizonyos áram. Ha más terhelő ellenállást rakunk rá, akkor ismét ugyanakkora feszültség lesz tapasztalható, de az áramérték már más lesz.*

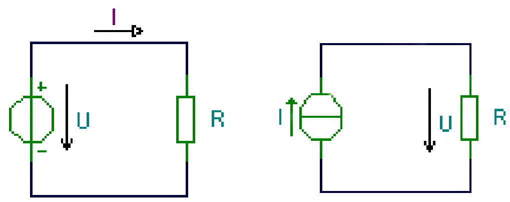
**Ideális áramforrás és generátor:**




Ennek a generátornak a **belső ellenállása:** $R_b = \infty$, és **a rákapcsolt terheléstől függetlenül, állandóan a kívánt áramot adja le** a kapcsain.

*Ebben az esetben, ha két különböző ellenállást kapcsolunk a kapcsokra, akkor az áramok fognak megegyezni a két esetben, és a feszültségértékek fognak különbözni.*

Az Ohm-törvény "megtestesülései" a két generátor használatával:




(a) Ohm törvény: $I = \frac{U}{R}$ (b) Ohm törvény: $U = I \cdot R$

2. ábra. Az Ohm-törvény a két generátorral

**A generátorok terhelhetősége:**

Vizsgáljuk meg, hogy a két típusú forrás hogyan reagál, ha extrém kicsi, illetve extrém nagy ellenállást kapcsolunk rájuk.

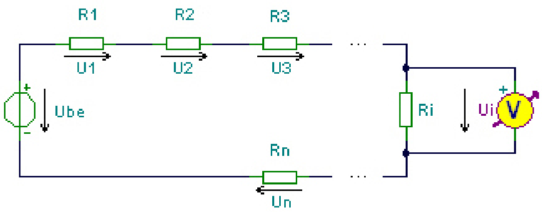
A teljesítmény számítása természetesen: $\boxed{P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}}$

| | Feszültségforrás | Áramforrás |
|---|---|---|
| $R \to 0$ | $P = U^2/R \to \infty$ | $P = I^2 \cdot R \to 0$ |
| $R \to \infty$ | $P = U^2/R \to 0$ | $P = I^2 \cdot R \to \infty$ |

Vagyis ha egy feszültséggenerátort rövidre zárunk, akkor "elfüstöl", mivel végtelen teljesítményt akar generálni[3]. Viszont, ha nagy ellenállást rakunk rá, akkor alig ad le teljesítményt, kvázi nyugalomban van.

Az áramgenerátor pont az ellentéte, ugyanis rövidre zárva nem ad le teljesítményt. És ha nagy ellenállást rakunk rá (pl. szakadás is tekinthető nagy ellenállásnak), akkor is megpróbálja átpréselni azt az áramot, amit neki kéne, de nem bír kellő teljesítményt előállítani, és ő ettől "füstöl el".

# 3. Soros ellenállás-kapcsolás:




3. ábra. $n$ darab ellenállásból álló soros kapcsolás

## 3.1. Eredő ellenállás:

Ha egy kapcsolás csak sorosan kapcsolt ellenállásokat tartalmaz, akkor az eredő ellenállás értéke:

$$R_e = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{3.1}$$

A képletből egyértelműen látszik, hogy soros kapcsolásnál a relatíve kis ellenállások elhanyagolhatók.

És most kettéválik a buli, mert persze nem mindegy, hogy feszültség, vagy áramforrás van bekötve:

## 3.2. Ha áramforrás van:

Az egyes elemeken az áramok megegyeznek!
*Itt nincsenek csomópontok (ha az ábrát nézzük, az ott lévő mérőműszertől büntetlenül eltekinthetünk, mivel belső ellenállása végtelen [lásd később: 6. fejezet]), az áramnak csupán egy útja lehetséges, így az egyes elemeken átfolyó áramoknak meg kell egyezniük.*

$$I = I_1 = I_2 = \ldots = I_n \tag{3.2}$$

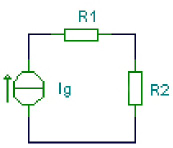
Áramforrás esetén a főágban folyó áramot az áramforrás "mondja meg". Így azzal nincs gond:

$$I_g = I = I_k \tag{3.3}$$

Az egyes áramok az Ohm-törvény alapján:

$$U_k = (R_k \cdot I_k) = R_k \cdot I_g \tag{3.4}$$

Speciálisan 2 ellenállás esetén:




$$I_g = I = I_1 = I_2 \tag{3.5}$$

$$U_1 = R_1 \cdot I_g \qquad U_2 = R_2 \cdot I_g \tag{3.6}$$

[3]Hozzá kell tennem, hogy a mai tápegységek, feszültség és áramforrások többsége rendelkezik túláram-védelemmel, vagyis automatikusan lekapcsolnak túlterhelés esetén.

## 3.3. Ha feszültségforrás van:

Itt is hasonlóan számolhatjuk az egyes feszültségeket, mint az imént, ha előtte meghatározzuk az áramot (az áramot most az ellenállások határozzák meg):

$$I = \frac{U_g}{R_e} = \frac{U_g}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} = I_k \tag{3.7}$$

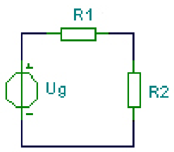
Az egyes feszültségek így:

$$U_k = \left( R_k \cdot I_g = R_k \cdot \frac{U_g}{R_e} \right) = U_g \cdot \frac{R_k}{R_e} \tag{3.8}$$

A feszültségekre vonatkozó ilyen jellegű képleteket úgy szokás nevezni, hogy potenciométer-formulák, vagy más néven: feszültségosztó képletek, mivel azt írják le, hogy az ellenállások arányaiban hogyan oszlik meg a feszültség.

A potenciomáter-formula a potenciométer nevű eszközről kapta a nevét. Ez egy olyan ellenállás, amelynek van egy harmadik kivezetése, és ezen kivezetés csatlakoztatási pontja az ellenállás két vége közt csúsztatható. Ezzel úgymond fel lehet osztani az ellenállást két ellenállásra, amelyek osztásviszonya változtatható. Mivel a feszültség soros kapcsolás esetén az ellenállások nagyságának arányában oszlik meg, így ez az eszköz használható feszültségszabályozóként is (pl: régebbi hangszabályzók). Továbbá ha csak a középső és az egyik szélső állást kötjük be, akkor szimpla változtatható ellenállásként használható.

2 ellenállásból álló kapcsolás:



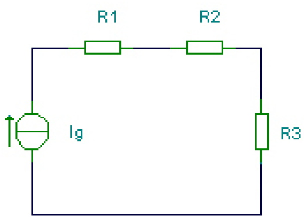

$$I = \frac{U_g}{R_e} = \frac{U_g}{R_1 + R_2}$$

$$U_1 = I \cdot R_1 = \frac{U_g}{R_1 + R_2} \cdot R_1 = U_g \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{3.9}$$

$$U_2 = I \cdot R_2 = \frac{U_g}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = U_g \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.10}$$

## 3.4. Példák:

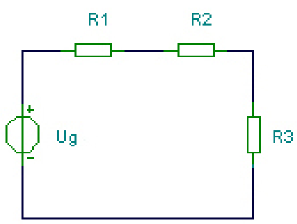
**1. Példa:** Legyen a kérdés az összes áram és feszültség 3 ellenállás esetén, áramforrással:




$$I_g = I = I_1 = I_2 = I_3 \tag{3.11}$$

$$U_1 = R_1 \cdot I_g \qquad U_2 = R_2 \cdot I_g \qquad U_3 = R_3 \cdot I_g \tag{3.12}$$

**2. Példa:** Legyen a kérdés az összes áram és feszültség 3 ellenállás esetén, feszültségforrással:



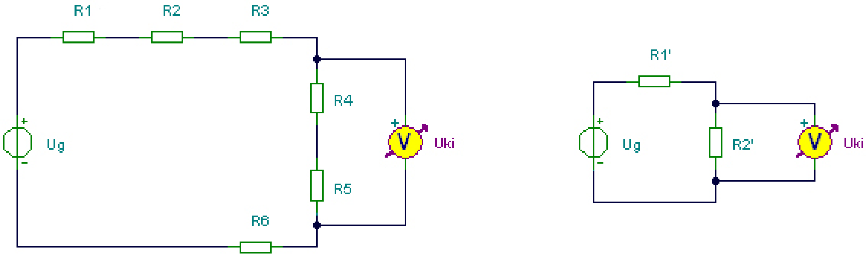

$$I = \frac{U_g}{R_e} = \frac{U_g}{R_1 + R_2 + R_3} = I_1 = I_2 = I_3 \tag{3.13}$$

$$U_1 = R_1 \cdot \frac{U_g}{R_e} = U_g \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{3.14}$$

$$U_2 = U_g \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{3.15}$$

$$U_3 = U_g \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{3.16}$$

**3. Példa:** Legyen a kérdés most az $R_4$-en és az $R_5$-ön együtt eső feszültség!




4. ábra. A rész-ellenállások eredőit kiszámítva egyszerűsödik a probléma

*Ha több ellenállásból áll a rendszer, akkor vissza lehet vezetni két ellenállásból álló rendszerre.*

A második kapcsolásban lévő értékek:

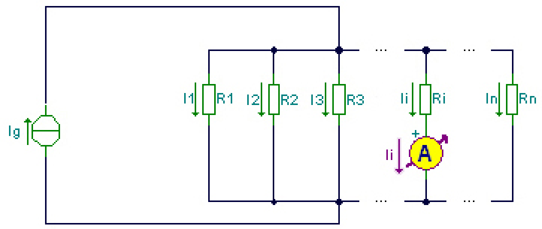
$$R_1' = R_1 + R_2 + R_3 + R_6 \qquad R_2' = R_4 + R_5 \tag{3.17}$$

Az $R_4$-en és $R_5$-ön egyszerre eső feszültség a potenciométer-formula alapján:

$$U_{ki} = U_{45} = U_g \cdot \frac{R_2'}{R_1' + R_2'} = U_g \cdot \frac{R_4 + R_5}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_6) + (R_4 + R_5)} = \tag{3.18}$$

$$= U_g \cdot \frac{R_4 + R_5}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6} \tag{3.19}$$

# 4. Párhuzamos ellenállás-kapcsolás:




5. ábra. $n$ darab ellenállásból álló párhuzamos kapcsolás

## 4.1. Eredő ellenállás, "replusz" művelet:

Párhuzamos ellenállások esetén a vezetőképességek (az ellenállások reciprokai) adódnak össze:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \tag{4.1}$$

A képletből egyértelműen látszik, hogy párhuzamos kapcsolásnál a relatíve nagy ellenállások hanyagolhatók el. Továbbá azt is érdemes kiemelni, hogy ha adott egy ellenállás, akkor azzal bármekkora ellenállást párhuzamosan kapcsolva[4] az eredő ellenállás csakis kisebb lehet.

A szakmában használatos egy jelölés, ami sokban megkönnyíti az írást. Ezt a jelölést külön műveletnek is szokás tekinteni, ez az úgynevezett replusz művelet.

Két ellenállás esetén az eredő ellenállás:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1} := R_1 \times R_2 \tag{4.2}$$

Az utolsó tag kimondva: "$R_1$ *replusz* $R_2$". Három ellenállás esetén:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2} = R_1 \times R_2 \times R_3 \tag{4.3}$$

És végül $n$ ellenállás esetén:

$$R_e = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_n}{R_2 \cdot R_3 \cdot \ldots \cdot R_n + R_1 \cdot R_3 \cdot \ldots \cdot R_n + \ldots + R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_{n-1}} = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n \tag{4.4}$$

De ami azt illeti bőven elég a két ellenállásos változat, mivel érvényes az asszociativitás (és mellékesen a kommutativitás is).

Itt is külön vizsgáljuk az áramforrás és a feszültségforrás esetét!

## 4.2. Ha feszültségforrás van:

Az egyes ellenállásokon a feszültségek megegyeznek (függetlenül attól, hogy feszültség, vagy áramforrásról van szó)!

$$U = U_1 = U_2 = \ldots = U_n \tag{4.5}$$

Ebben az esetben az összes feszültséget a feszültségforrás "mondja meg". Így azzal nincs gond:

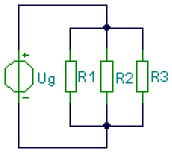
$$U_g = U = U_k \tag{4.6}$$

Az egyes áramok az Ohm-törvény alapján:

$$I_k = \left(\frac{U_k}{R_k}\right) = \frac{U_g}{R_k} \tag{4.7}$$

[4] a szakmában ezt "söntölésnek" nevezzük

Speciálisan 3 ellenállás esetén:




$$U_g = U = U_1 = U_2 = U_3 \tag{4.8}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_g}{R_1} \qquad I_2 = \frac{U_g}{R_2} \qquad I_3 = \frac{U_g}{R_3} \tag{4.9}$$

## 4.3. Ha áramforrás van:

Itt is hasonlóan számolhatjuk az egyes áramokat, mint az imént, ha előtte meghatározzuk a feszültséget (a feszültséget most az ellenállások határozzák meg):

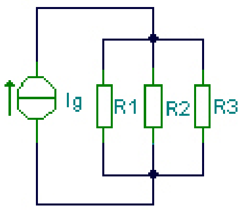
$$U = I_g \cdot R_e = I_g \cdot (R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n) = U_k \tag{4.10}$$

Az egyes feszültségek így:

$$I_k = \frac{U_k}{R_k} = \frac{I_g \cdot R_e}{R_k} = I_g \cdot \frac{R_e}{R_k} \tag{4.11}$$

Az egyes áramokra vonatkozó képleteket áramosztó-képleteknek is szokás nevezni, mivel azt írják le, hogy az egyes ágak között milyen arányban oszlik szét az áramforrás árama.

Speciálisan 3 ellenállás esetén:



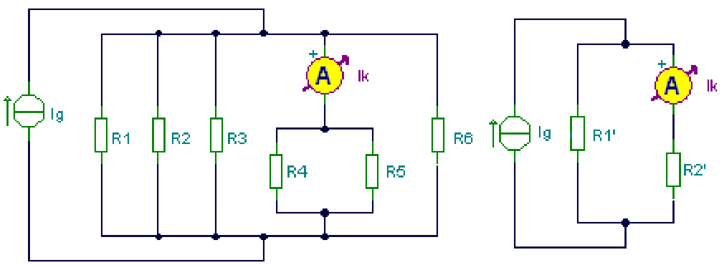

$$U = I_g \cdot R_e = I_g \cdot (R_1 \times R_2 \times R_3) \tag{4.12}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{I_g \cdot (R_1 \times R_2 \times R_3)}{R_1} = I_g \cdot \frac{(R_1 \times R_2 \times R_3)}{R_1} \tag{4.13}$$

$$I_2 = I_g \cdot \frac{(R_1 \times R_2 \times R_3)}{R_2} \qquad I_3 = I_g \cdot \frac{(R_1 \times R_2 \times R_3)}{R_3} \tag{4.14}$$

## 4.4. Példa:

Legyen a kérdés az, hogy az $R_4$-en és az $R_5$-ön együtt mennyi áram folyik át!




6. ábra. A rész-ellenállások eredőit kiszámítva itt is egyszerűsödik a probléma

*Itt is hasonló a szitu, mint soros kapcsolás esetén: ha több ellenállásból áll a rendszer, akkor vissza lehet vezetni két ellenállásból álló rendszerre:*

A második kapcsolásban lévő értékek:

$$R_1' = R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_6 \qquad R_2' = R_4 \times R_5 \tag{4.15}$$

Az $R_4$-en és $R_5$-ön egyszerre eső feszültség a potenciométer-formula alapján:

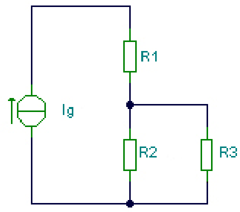
$$I_{45} = I_g \cdot \frac{(R_1' \times R_2')}{R_2'} = I_g \cdot \frac{(R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_6) \times (R_4 \times R_5)}{R_4 \times R_5} = I_g \cdot \frac{R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4 \times R_5 \times R_6}{R_4 \times R_5} \tag{4.16}$$

## 5. Vegyes kapcsolások:

Ezen példák megoldásakor két szemléletet/megoldási elvet emelnék ki:

- A kapcsolások egyes részeit redukáljuk, amennyire tudjuk, így egyszerűsítve a példát, majd kellő módon kifejtjük a számítást.
- Az Ohm-törvényből indulunk ki, és a felmerülő hiányzó mennyiségeket fejtjük ki sorban addig, amíg kész nem lesz a megoldás.

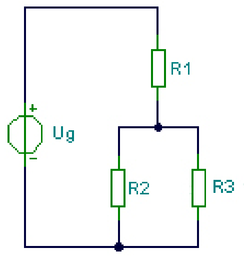
1. Legyen a következő kapcsolásban a kérdés az $R_3$ ellenálláson eső feszültség, és áram:




7. ábra. Egyszerű vegyes kapcsolás áramgenerátorral

$$U_3 = I_g \cdot (R_2 \times R_3) \qquad I_3 = I_g \cdot \frac{R_2 \times R_3}{R_3} \tag{5.1}$$

2. Legyenek a kérdés, az $R_3$ ellenálláson eső feszültség:




8. ábra. Egyszerű vegyes kapcsolás feszültséggenerátorral

Kövessük azt a gondolatmenetet, hogy az $R_2$ és $R_3$ ellenállásokat egy ellenállásnak tekintjük:

$$R_{23} := R_2 \times R_3 \tag{5.2}$$

Ekkor a feszültséghez rögtön használható a potenciométer-formula:

$$U_{23} = U_g \cdot \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} \tag{5.3}$$

Visszahelyettesítve az $R_{23}$ értékét:

$$U_3 = U_g \cdot \frac{R_2 \times R_3}{R_1 + (R_2 \times R_3)} \qquad I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{U_g \cdot \frac{R_2 \times R_3}{R_1 + (R_2 \times R_3)}}{R_3} \tag{5.4}$$

A másik gondolatmenet:

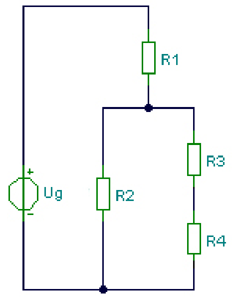
$$U_3 = \frac{R_3}{I_3} \qquad I_3 = I \cdot \frac{R_2 \times R_3}{R_3} \qquad I = \frac{U_g}{R_1 + (R_2 \times R_3)} \tag{5.5}$$

Az első egyenletbe behelyettesítve a másodikat és a harmadikat megkapjuk az iménti eredményt.

$$U_3 = R_3 \cdot I_3 = R_3 \cdot I \cdot \frac{R_2 \times R_3}{R_3} = I \cdot (R_2 \times R_3) = \frac{U_g}{R_1 + (R_2 \times R_3)} \cdot (R_2 \times R_3) = \tag{5.6}$$

$$= U_g \cdot \frac{R_2 \times R_3}{R_1 + (R_2 \times R_3)} \tag{5.7}$$

3. Most legyen a kérdés az $R_4$ ellenálláson eső feszültség:




9. ábra. Kicsit nehezebb vegyes kapcsolás feszültséggenerátorral

Az első gondolatmenetet követve: először tekintsük egyetlen ellenállásnak az $R_2$, $R_3$ és $R_4$-es ellenállásokat:

$$R_{234} := R_2 \times (R_3 + R_4) \tag{5.8}$$

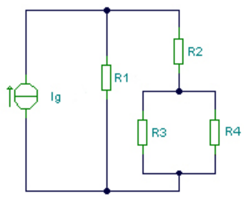
Alkalmazva a potenciométer formulát:

$$U_{234} = U_g \cdot \frac{R_{234}}{R_1 + R_{234}} = U_g \cdot \frac{R_2 \times (R_3 + R_4)}{U_1 + R_2 \times (R_3 + R_4)} \tag{5.9}$$

Ez a feszültség történetesen megegyezik az $R_2$-n eső feszültséggel, és így az $R_3$ és $R_4$ ellenállsokon együtt eső feszültséggel. Az $R_4$ ellenálláson eső feszültség ismét a potenciométer-formulával határozható meg, csak most $U_2$-ből:

$$U_4 = U_2 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = U_g \cdot \frac{R_2 \times (R_3 + R_4)}{U_1 + R_2 \times (R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \tag{5.10}$$

4. A következő gyakorlópéldában legyen kérdéses az $I_4$ áram:




10. ábra. Kicsit nehezebb vegyes kapcsolás áramgenerátorral

Itt most csak az eredményt közlöm (a korábbiakhoz hasonló egyszerűséggel oldható meg):

$$I_4 = I_2 \cdot \frac{R_3 \times R_4}{R_4} = I_g \cdot \frac{R_1 \times [R_2 + (R_3 \times R_4)]}{R_2 + (R_3 \times R_4))} \cdot \frac{R_3 \times R_4}{R_4} \tag{5.11}$$

# 6. Mérőműszerek:

## 6.1. Ideális mérőműszerek:

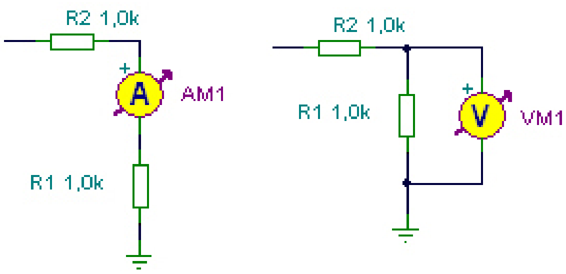
**Az ideális feszültségmérő:**


Az ideális feszültségmérő belső ellenállása: $R_b = \infty$, és a kapcsolásban párhuzamosan kell bekötni (a teljes potenciálkülönbséget éreznie kell, áram nem folyhat rajta).

**Az ideális árammérő:**


Az ideális árammérő belső ellenállása: $R_b = 0$, és a kapcsolásban sorosan kell bekötni (minden áramnak át kell folynia, amit mérni akarunk, feszültség nem eshet rajta).

Az árammérő és a feszültségmérő helyes bekötése:



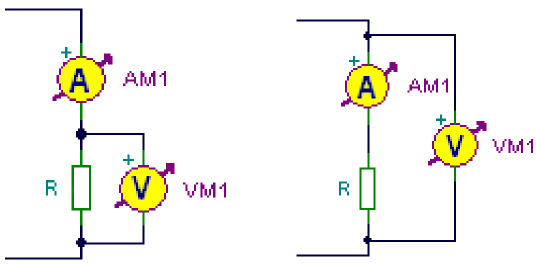

(a) Árammérő bekötése (b) Feszültségmérő bekötése

11. ábra. Műszerek bekötése

## 6.2. Nem ideális mérőműszerek bekötése:

A gyakorlatban természetesen nincs olyan, hogy valaminek végtelen, vagy nulla az ellenállása. A műszerek is véges paraméterekkel rendelkeznek, ennél fogva korlátozottan használhatók.

Tekintsük azt az esetet, amikor egyszerűen egy ellenálláson eső feszültséget és azon átfolyó áramot szeretnénk megmérni egyszerre[5] (ebből lehet pl. teljesítményt számolni, vagy ellenállást meghatározni). Ekkor a következő mérési elrendezések lehetségesek:




(a) Kis ellenállások esetén (b) Nagy ellenállások esetén

12. ábra. Áram és feszültségmérés kis és nagy ellenállások esetén

Nem mindíg választhatjuk akármelyik elrendezést. Külön kell választani azokat az eseteket, ha az adott ellenállás értéke nagyon nagy, illetve nagyon kicsi.
Először határoljuk be, hogy jelen esetben mi is számít nagyon kis, illetve nagyon nagy ellenállásnak! A jelen(!) mérés esetében[6] az számít kis ellenállásnak, ami az árammérő belső ellenállásának nagyságrendjébe esik, vagy annál

[5] Általános dolog, hogy ha mérünk valamit, azzal befolyásoljuk, megváltoztatjuk magát a mért dolgot. Ha két külön műszerrel mérünk különkülön, akkor nem vesszük figyelembe, hogy a másik műszer milyen módon befolyásolta a korábbi mérést, és hogy most éppen nem érvényesül egyan az a hatás. Ezért ha több műszerrel is mérni kell, akkor azokat ajánlott egyszerre bekötni.

[6] Mindíg mérési elrendezéstől függ, hogy mi mekkorának számít. Félreértés ne essék: általában nem a műszerek és források paramétereihez szokás viszonyítani, ez csupán most lényeges!

kisebb. Nagynak pedig az, ami a feszültségmérő belső ellenállásának nagyságrendjébe esik, vagy annál nagyobb.

Vizsgáljuk meg a két elrendezést aszerint, hogy ha azt használjuk, akkor milyen értékeket mutatnak a műszerek, és hogy valójából milyen értékek fordulnak elő!

**Kis ellenállás esetén:**

Ha kicsi az ellenállás (az egyszerűség kedvéért egyezzen meg az árammérő belső ellenállásával) és vele sorosan kapcsoljuk az árammérőt, majd ezekkel párhuzamosan a feszültségmérőt, akkor a feszültségmérő kétszer akkora feszültséget mutat, mint amit kéne!
Viszont ha az ellenállással párhuzamosan kötjük a feszültségmérőt, és vele sorba az árammérőt, akkor mindkéd műszer által mutatott érték jó közelítéssel pontos lesz. Tehát ez az elrendezés (12a) használandó kis ellenállások esetén!

**Nagy ellenállás esetén:**

Ha nagy az ellenállás (az egyszerűség kedvéért egyezzen meg a feszültségmérő belső ellenállásával) és vele párhuzamosan kapcsoljuk a feszültségmérőt, majd ezekkel sorosan az árammérőt, akkor az árammérőn kétszer akkora áram folyik át, mint az ellenálláson, vagyis nagyon pontatlan!
Viszont ha az ellenállással sorosan kötjük az árammérőt, és mindkettővel egyszerre párhuzamosan a feszültségmérőt, akkor mindkét műszer által mutatott érték jó közelítéssel pontos lesz. Tehát ez az elrendezés (12b) használandó nagy ellenállások esetén!

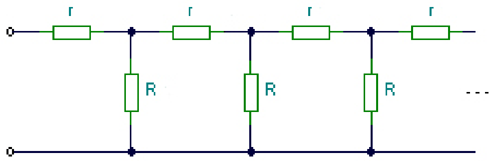
*Megjegyzés: általában nem szokott gond lenni a mai mérőműszerek paramétereivel, vagyis általában kellően nagy, illetve kis ellenállást képviselnek a megfelelő méréseknél, ezért nem kell külön bajlódni, hogy melyik elrendezést válasszuk!*

*Megjegyzés:* előfordul, hogy olyan ellenállás értékét kell meghatározni, ami már benne van a kapcsolásban. Tipikus hiba ilyenkor azt mondani, hogy rákötöm a multimétert ellenállásmérő-állásban, aztán kész, mert ilyenkor nem az ellenállás értékét mérjük, hanem a teljes áramkör két kiszemelt pontja közti eredő ellenállást.

# 7. Érdekes, hasznos, trükkös példák:

## 7.1. Végtelen ellenállás-lánc:

Ez egy tipikus gondolkodtató feladat, hasonlókat szoktak feladni versenypéldákként, valamint a legtöbb helyen, ahol elektronikával, vagy elektromágnességgel foglalkoznak, be szokták mutatni. A feladat, hogy megadjuk az eredő ellenállást



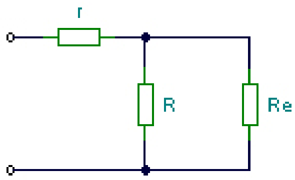

13. ábra. Végtelen ellenállás-lánc kétféle ellenállásból

**Első közelítés:** egyértelmű, hogy ennek a láncnak van valamekkora eredő ellenállása. Első közelítésben azt lehet mondani, hogy ez az ellenállás biztos nagyobb, vagy egyenlő $r$-el, mivel valami még sorosan van kapcsolva vele. Továbbá azt is meg tudjuk mondani, hogy az eredő ellenállás biztos kisebb lesz $r + R$-nél, mivel az első $R$ ellenállással párhuzamosan van kapcsolva a lánc többi része (ha két ellenállás párhuzamosan van kapcsolva, akkor eredő ellenállásuk kisebb lesz, mint bármelyiküké külön).
Tehát a további számításaink helyességét könnyen ellenőrizhetjük azzal, ha megnézzük, hogy teljesülnek-e a következő relációk:

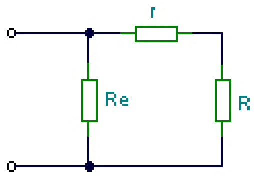
$$r \leq R_e \leq r + R \tag{7.1}$$

Megjegyzés: az egyenlőségek akkor teljesülnek, ha $R = 0$, vagy $r = \infty$. (Továbbá, ha $r = 0$, akkor az eredő ellenállás 0 lesz, mivel végtelen sok $R$ ellenállás párhuzamosan kötve 0 eredő ellenállású.)

**A megoldás:** azt már tisztáztuk, hogy a végtelen ellenállásláncnak van egy eredő ellenállása, ekkor az egész lánc helyettesíthető egyetlen $R_e$ ellenállással. Mivel a láncunk végtelen hosszú, ezért plusz egy "láncszemet" beiktatva nem változik meg az eredő ellenállás értéke, tehát egy plusz fokozattal együtt is $R_e$ kell legyen az eredő ellenállás értéke. A kérdés csak az, hogy miként rakjuk be ezt a plusz fokozatot?
Az elrendezések már mondhatni maguktól is megmondják, hogy melyikük a jó, és melyikük a rossz.




(a) A helyes elrendezés




(b) A rossz elrendezés

14. ábra. A kétféle elképzelhető fokozat-beiktatás

- A helyes elrendezés: ugyan azt lehet elmondani, mint amit első közelítésben is láttunk, az eredő ellenállás teljesíti a (7.1) relációt.
- Ekkor az $R_e$ eredő ellenállással párhuzamosan van kapcsolva a fokozat, ami azt jelenti, hogy az így vett "új" eredő ellenállás kisebb, vagy egyenlő kell legyen a korábbival, és az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $r = R = R_e = 0$, vagy $r = R_e = \infty$

A fentiekből egyértelműen látszik, hogy melyik a jó szitu, de a biztonság kedvéért számoljuk végig mindkét esetet.

**A rossz eset:**

$$\begin{aligned} R_e &= R_e \times (r + R) = \frac{R_e \cdot (r + R)}{R_e + (r + R)} \\ R_e \cdot (R_e + r + R) &= R_e \cdot r + R_e \cdot R \\ {R_e}^2 + R_e \cdot r + R_e \cdot R &= R_e \cdot r + R_e \cdot R \\ {R_e}^2 &= 0 \end{aligned}$$

__A jó eset:__

$$\begin{aligned}
R_e &= r + R \times R_e = r + \frac{R \cdot R_e}{R + R_e} \\
R_e \cdot (R + R_e) &= r \cdot (R + R_e) + R \cdot R_e \\
R_e \cdot R + {R_e}^2 &= r \cdot R + r \cdot R_e + R \cdot R_e \\
{R_e}^2 - r \cdot R_e - r \cdot R &= 0 \\
R_{e12} &= \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4 \cdot r \cdot R}}{2}
\end{aligned}$$

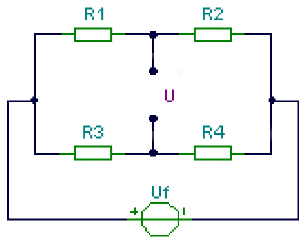
A kérdés, hogy melyik gyököt kell figyelembe venni? Szerintem a legjobb azt átgondolni, hogy ha a $R$ ellenállás értéke 0 volna, akkor azt kell kapjuk, hogy $R_e = r$. Nézzük meg, hogy $R = 0$ esetén a másodfokú egyenletnek mi a két megoldása:

$$R_{e12} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4 \cdot r \cdot R}}{2} = \frac{r \pm \sqrt{r^2}}{2} = \begin{cases} r \\ 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

Tehát a pozitív gyököt kell figyelembe vennünk:

$$R_e = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4 \cdot r \cdot R}}{2} \tag{7.3}$$

## 7.2. Hídkapcsolás




15. ábra. Hídkapcsolás

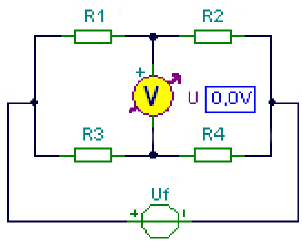
Ez egy elég egyszerű kapcsolás, de mégis külön figyelmet érdemel. Ha egy hídkapcsolás két ágában azonos módon oszlik meg a feszültség, akkor a középen lévő feszültségmérő nem mutat feszültséget, mivel a feszültségmérő két pontja között nincs potenciálkülönbség. Ekkor beszélünk kiegyenlített hídról.

A kiegyenlítettség feltétele tehát:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{7.4}$$

Ne feledjük, hogy a feszültségek soros kapcsolás esetén az ellenállások arányában oszlanak meg, ezért jogos a feszültségek aránya helyett az ellenállások hasonló arányát tekinteni.
Sokak jobban szeretik azt a megfogalmazást, hogy a híd akkor kiegyenlített, ha a "szemközti" ellenállások szorzatai megegyeznek (ami az iménti egyenlet puszta átrendezése):

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3 \tag{7.5}$$




16. ábra. Kiegyenlített híd

Mit is jelent a kiegyenlített állás gyakorlatilag? Azt, hogy a két pontot tetszőleges módon összeköthetjük, akár egy vezetékkel, akár egy ellenálláson keresztül, vagy akár szabadon is hagyhatjuk, a kapcsolás lényegében nem változik. Vagyis sem a kapcsolásban lévő feszültségek, sem az áramok, sőt még az eredő ellenállás sem[7].

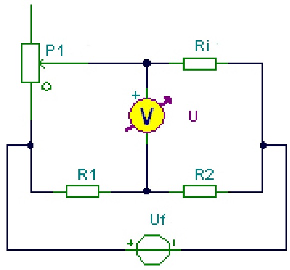
[7] Az eredő ellenállást több szemszögből is lehet tekinteni, jelen esetben a feszültségforrás szemszögéből értendő.

Mindezek azt is jelentik, hogy ha egy kiegyenlített híd közepén van egy ellenállás, akkor tekinthetjük úgy, mintha ott sem lenne, így nagymértékben megkönnyítve egy ilyen kapcsolás számítását.

**A hídkapcsolás egy alkalmazása: ellenállás-mérés.**

Állítsunk össze egy hídkapcsolást úgy, hogy $R_1$ és $R_2$ ismert arányú ellenállások. A másik ágba helyezzünk el egy potenciométert, míg a másik ellenállás helyére az $R_i$ ismeretlen ellenállást. A híd közepére beiktatunk egy áram, vagy feszültségmérőt. Ha sikerül a potenciométert olyan állásba tekerni, hogy középen nincs feszültség, vagy nem folyik áram, akkor elértük a kiegyenlített állást. A potenciométer ellenállását leolvasva az ismeretlen ellenállás értéke:

$$R_P \cdot R_2 = R_i \cdot R_1 \qquad \Longrightarrow \qquad R_i = R_P \cdot \frac{R_2}{R_1} \tag{7.6}$$



17. ábra. Ellenállásmérés hídkapcsolással

*Megjegyzés: manapság digitális multimétert szokás használni, ezek tudnak mérni áramot, feszültséget, ellenállást, teljesítményt, és még egyéb mérési funkcióik is vannak, így a fenti mérési módszer már nem sűrűn használatos.*

## 7.3. Delta-csillag és Csillag-Delta átalakítás:

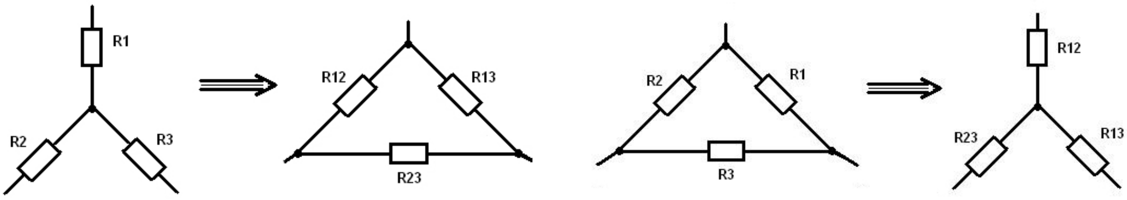
Az előző pontban tehát volt szó arról, hogy milyen mázlisták vagyunk, ha épp egy kiegyenlített híd van egy kapcsolásban, amivel kéne dolgoznunk. De mi a helyzet, ha mégsem így van?

Két féle eljárást lehet ekkor választani.

- Felírjuk az áramkörre vonatkozó Kirchhoff-törvényeket és megoldjuk a kapott egyenletrendszert.
- Átalakítjuk a kapcsolást.

Most mi az utóbbi esetet fogjuk tárgyalni.

Ismeretes egy átalakítás, amelyet "csillag-delta", vagy "delta-csillag" átalakításnak neveznek. Először is tisztázzuk, hogy a "csillag", illetve a "delta" szavak ellenállás-alakztokat takarnak. Ezen kapcsolások egymással "felcserélhetőek" egy áramkörben.



(a) Csillad-delta átalakítás

(b) Delta-csillag átalakítás

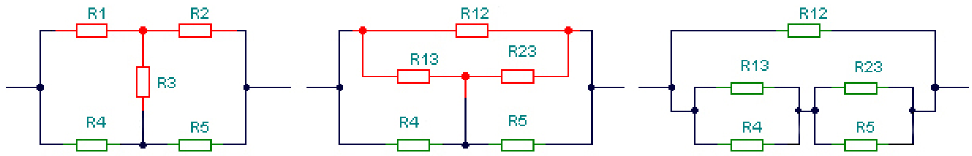
18. ábra. A csillag és delta kapcsolások közti áttérések

Az átalakitás transzformációs képletei:

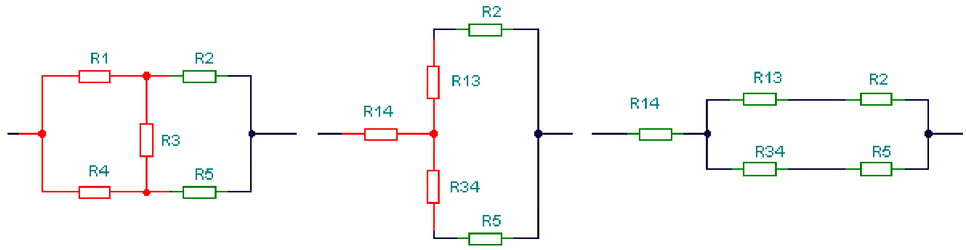
$$\text{Csillag} - \text{Delta}: \qquad R_{ij} = \frac{R_i \cdot R_j + R_i \cdot R_k + R_j \cdot R_k}{R_k} \tag{7.7}$$

$$\text{Delta} - \text{Csillag}: \qquad R_{ij} = \frac{R_i \cdot R_j}{R_i + R_j + R_k} \tag{7.8}$$

És most nézzük meg, hogy mégis miként néznek ki ezek az átalakítások egy kapcsolás esetében:



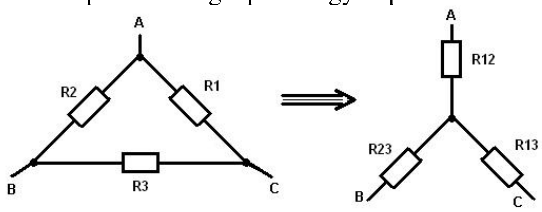

(a) Csillag-Delta átalakítás alkalmazása




(b) Delta-Csillag átalakítás alkalmazása

19. ábra. Az átalakítások alkalmazása nem kiegyenlített híd esetén

De miként is lehet a transzformációs képleteket megkapni? Vegyük példának a Delta-Csillag átalakítást.




A transzformáció lényege, hogy a kapcsolásokat bármely két pont közt vizsgálva ugyan úgy kell viselkedniük. Pontosabban ez eredő ellenállásokat írjuk fel a pontok között úgy, hogy amikor két pontot tekintünk, akkor úgy vesszük, hogy a harmadik pont a "levegőben lóg". Így felírhatunk három egyenletet a három ismeretlen ellenállásra, az egyenletrendszert megoldva megkaphatjuk a transzformációs képleteket.

Az egyenletek:

$$\mathrm{A-B:} \qquad R_{12} + R_{23} = R_2 \times (R_1 + R_3) = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_2 + (R_1 + R_3)} \tag{7.9}$$

$$\mathrm{A-C:} \qquad R_{12} + R_{13} = R_1 \times (R_2 + R_3) = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + (R_2 + R_3)} \tag{7.10}$$

$$\mathrm{B-C:} \qquad R_{23} + R_{13} = R_3 \times (R_1 + R_2) = \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + (R_2 + R_3)} \tag{7.11}$$

Most vonjuk ki a (7.10) egyenletből a (7.11) egyenletet:

$$(7.10) - (7.11) \qquad R_{12} - R_{23} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3) - R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 \cdot R_2 - R_3 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{7.12}$$

Majd az így kapott (7.12) egyenletet adjuk hozzá az (7.9) egyenlethez:

$$(7.9) + (7.12) \qquad 2 \cdot R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2 - R_3 \cdot R_2 + R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = \tag{7.13}$$

$$= \frac{R_1 \cdot R_2 - R_3 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_1 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \tag{7.14}$$

$$= \frac{2 \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{7.15}$$

Tehát

$$R_{12} = \frac{R_2 \cdot R_2}{R_1 + R_3 + R_3} \tag{7.16}$$

Az utolsó lépés az eredeti egyenletekkel kifejezve: {(7.9)+[(7.10)-(7.11)]}/2. Hasonlóan kapható meg a többi transzformációs képlet is.

# A. Elektromos vezetés, Drude-modell:

Az elektromágnesség című tárgyban a következő képen tárgyalják az elektromos vezetést:

Egy vezető ellenállása:

$$R = \varrho \frac{l}{A} \tag{A.1}$$

Ahol $l$ a vezető hossza, $A$ a keresztmetszete, $\varrho$ pedig a fajlagos ellenállás, ami már nem olyan egyszerű.

Kezdésnek tekintsük a fémes vezetőket: mi történik, ha egy fémes vezető két pontjára feszültséget kapcsolunk? Ekkor a potenciálkülönbségnek megfelelően a következő erő fog hatni az elektronokra:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} \tag{A.2}$$

Tegyük fel, hogy a töltéseket semmi nem akadályozza a mozgásukban. Rendezzük át az egyenletet, majd integráljunk az idő szerint és megkapjuk a töltéshordozók sebességét a potenciál bekapcsolásától számított $t$-edi időpillanatban:

$$\vec{v} = \frac{e\vec{E}}{m} t \tag{A.3}$$

Most térjünk vissza a valóságba! Ahhoz, hogy a töltéseket semmi ne akadályozza a mozgásukban, az kéne, hogy semmi ne mozogjon és tökéletes legyen a rácsszerkezet. Ez nem túl sűrűn valósul meg. A töltéshordozók hőmérséklettől függően nagyjából azonos időközönként ütköznek/szóródnak az atommagokon, ezáltal lefékeződnek, majd újra felgyorsulnak. Az ütközések közt eltelt átlagos időt relaxációs, vagy karakterisztikus időnek nevezzük és $\tau$-val jelöljük.
Mivel az ütközések között a töltések egyenletesen gyorsuló mozgást végeznek, emiatt a töltések sebességét is átlagolnunk kell:

$$v_{\text{átlag}} = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\tau \tag{A.4}$$

Tehát a töltések $v_{\text{átlag}}$ sebességgel mozognak. Tegyük fel, hogy a töltéshordozók sűrűsége $\rho$, ekkor az áramsűrűség:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}_{\text{átlag}} \tag{A.5}$$

A töltéssűrűség nem más, mint adott térfogatban a töltéshordozók száma szorozva azok töltésével, tehát:

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = en\vec{v} = \underbrace{\frac{e^2 n}{2m}\tau}_{=\sigma} \vec{E} \tag{A.6}$$

Ahol $\sigma$ nem más, mint a fajlagos vezetőképesség:

$$\sigma = \frac{e^2 n}{2m}\tau \tag{A.7}$$

És természetesen a fajlagos vezetőképesség alapján a fajlagos ellenállás:

$$\varrho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m}{e^2 n \tau} \tag{A.8}$$

De még mindíg nem végeztünk, ez ugyanis általában a fémes vezetőkre igaz. Előfordulhat, hogy nem csak az elektronok vezetnek[8]. Lehetnek pozitív és negatív töltéshordozók, különböző tömeggel és töltéssel[9]. Ha általános leírást akarunk, akkor mindezek vezetési járulékát összegezni kell.
Vezessünk be egy új fogalmat, a töltéshordozók mozgékonyságát, $\mu$-t, aminek segítségével a töltéshordozók sebessége (például lyukak és elektronok esetén):

$$v_+ = \mu_+ E \qquad v_- = -\mu_- E \tag{A.9}$$

A negatív töltéshordozóknál kell egy negatív előjel az ellentétetes irányú mozgás miatt, így:

$$j = e(n_+ v_+ - n_- v_-) = \underbrace{e(n_+\mu_+ - n_-\mu_-)}_{\sigma} E \tag{A.10}$$

[8]Sőt, akár az is, hogy az elektronok egyáltalán nem vezetnek.
[9]Például a folyadékokban az ionok vezetnek, félvezetőknél meg az elektronok és a lyukak.

Végül a teljesen általános leírás:

$$j = \sum_{i=1}^{N} q_i n_i v_i = \sum_{i=1}^{N} q_i n_i \mu_i E = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{{q_i}^2 n_i}{2m_i} \tau_i}_{\sigma} E \tag{A.11}$$

Ahol: $N$ az összes különböző töltéshordozó száma, $n_i$ és $q_i$ az $i$-edik fajta töltéshordozó darabszáma és töltése, $m_i$ a tömge, $\tau_i$ pedig a rá jellemző relaxációs idő. Így a fajlagos ellenállás:

$$\varrho = \frac{1}{\sigma} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i n_i \mu_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{2m_i}{{q_i}^2 n_i \tau_i} \tag{A.12}$$

Ha viszont tényleg nagyon precízek akarunk lenni, akkor a geometriát is integrállal kéne kifejezni...[10]

# B. Szupravezetők:

A szupravezetőkről általában sokan hallanak, és mindenkiben az marad meg, hoy azoknak nulla az ellenállása. Szerintem ez egy elég helytelen megfogalmazád, mivel nem 0 az ellenállásuk, csupán veszteségmentesen folyhatnak bennük az áramok.

A folyó áramban enm lehet nagyobb a töltések sebessége, mint ami a potenciálkülönbség hatására létrejön. Ha az Ohm-törvényre nézünk, akkor annak kéne bekövetkeznie, hogy az az áram végtelenné válna akármekkora feszültség hatására, akkor viszont már az egész világegyetem összeroskadt volna ;-)

Részletesebb leírás: majd, ha jobban értek hozzá...

# C. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Tegyük fel, hogy adott egy 3 ismeretlenes egyenletrendszer:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = D_1 \tag{C.1}$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = D_2 \tag{C.2}$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = D_3 \tag{C.3}$$

ahol $x,\ y$, és $z$ az ismeretlenek, $a_i,\ b_i$ és $c_i$ az együtthatóik, $D_i$-k konstansok.

Egy ilyen egyenletrendszer megoldására több mód is van.

## C.1. Mátrixinvertálás

A lineáris egyenletrendszereket vektoregyenletek formájában is felírhatjuk. Az $\underline{A}$ mátrix tartalmazza az egyes ismeretlenek együtthatóit a következő képen:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Ekkor a vektoregyenlet a következő képen írható fel:

$$\underline{A}\vec{v} = \vec{D} \tag{C.4}$$

Részletesen kiírva:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

[10] Ezt már tényleg nem írom fel...

Az $\underline{A}$ mátrix inverzének ($\underline{A}^{-1}$) ismeretében, könnyedén megkaphatjuk a megoldást:

$$\begin{aligned} \underline{A}^{-1} \cdot / \qquad \underline{A}\vec{v} &= \vec{D} && \text{(C.5)} \\ \underbrace{\underline{A}^{-1}\underline{A}}_{\underline{I}}\vec{v} &= \underline{A}^{-1}\vec{D} && \text{(C.6)} \\ \vec{v} &= \underline{A}^{-1}\vec{D} && \text{(C.7)} \end{aligned}$$

Ehhez persze meg kell határozni $\underline{A}^{-1}$-et, ami már nem túl gyors:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \mathrm{Adj}\, \underline{A} \tag{C.8}$$

A determináns $3 \times 3$-as mátrix esetén:

$$\det \underline{A} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - (a_1c_2b_3 + b_1a_2c_3 + c_1b_2a_3) \tag{C.9}$$

Az adjungált mátrix megalkotásának lépései:

1. Aledetermináns képzés
2. "Sakktábla" módjára + és - előjelek
3. Tükrözés a főátlóra

Az 1. lépés részletesen: az egyes elemek helyére azon almátrix determinánsát kell beírni, ami nem egy sorban, vagy oszlopban van az adott elemmel. Konkrét példák:

Az $a_1$ elem helyére

$$\left(\begin{array}{c|cc} a_1 & b_1 & c_1 \\ \hline a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right) \tag{C.10}$$

alapján a $b_2$, $c_2$, $b_3$ és $c_3$ elemekből álló mátrix determinánsát kell írni, vagyis: $b_2c_3 - c_2b_3$. Jelöljük ezt $ad_{11}$-el.

Az $a_2$ elem helyére

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ \hline a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right) \qquad ad_{12} = a_2c_3 - c_2a_3 \tag{C.11}$$

Így az aldeterminánsok által alkotott mátrix:

$$\begin{pmatrix} ad_{11} & ad_{12} & ad_{13} \\ ad_{21} & ad_{22} & ad_{23} \\ ad_{31} & ad_{32} & ad_{33} \end{pmatrix} \tag{C.12}$$

A sakktáblás előjelezés után:

$$\begin{pmatrix} +ad_{11} & -ad_{12} & +ad_{13} \\ -ad_{21} & +ad_{22} & -ad_{23} \\ +ad_{31} & -ad_{32} & +ad_{33} \end{pmatrix} \tag{C.13}$$

A főátlóra való tükrözés után már meg is van az adjungált mátrix:

$$\mathrm{Adj}\, \underline{A} = \begin{pmatrix} +ad_{11} & -ad_{21} & +ad_{31} \\ -ad_{12} & +ad_{22} & -ad_{32} \\ +ad_{13} & -ad_{23} & +ad_{33} \end{pmatrix} \tag{C.14}$$

Mindent kiírva (és az előjelekkel beszorozva):

$$\mathrm{Adj}\, \underline{A} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - c_2b_3 & c_2a_3 - a_2c_3 & a_2b_3 - b_2a_3 \\ c_1b_3 - b_1c_3 & a_1c_3 - c_1a_3 & b_1a_3 - a_1b_3 \\ b_1c_2 - c_1b_2 & c_1a_2 - a_1c_2 & a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix} \tag{C.15}$$

## C.2. Gauss elimináció

Ez egy elég lassú módszer, de előnye, hogy minden esetben használható[11], valamint algoritmizálható, így egy számítógép segítségével könnyen elvégezhető emberi felügyelet és munka nélkül.

Az első lépés az, hogy annak megfelelően kell sorbarendezni az egyenleteket, hogy a főátlóban ne szerepeljenek 0 együtthatók.
Ezután a lépések:

- Osszuk le az első sort $a_1$-el:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} & \dfrac{D_1}{a_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & D_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & D_3 \end{array} \tag{C.16}$$

- Ezt szorozzuk be $a_2$-vel és vonjuk le a 2. sorból, szorozzuk be $a_3$-al és vonjuk ki a 3. sorból, továbbá végezzünk el pár elnevezést.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} & \dfrac{D_1}{a_1} \\ 0 & \underbrace{b_2 - a_2\dfrac{b_1}{a_1}}_{:=b_2'} & \underbrace{c_2 - a_2\dfrac{c_1}{a_1}}_{:=c_2'} & \underbrace{D_2 - a_2\dfrac{D_1}{a_1}}_{:=D_2'} \\ 0 & \underbrace{b_3 - a_3\dfrac{b_1}{a_1}}_{:=b_3'} & \underbrace{c_3 - a_3\dfrac{c_1}{a_1}}_{:=c_3'} & \underbrace{D_3 - a_3\dfrac{D_1}{a_1}}_{:=D_3'} \end{array} \tag{C.17}$$

- Így a "maradék:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} & \dfrac{D_1}{a_1} \\ 0 & b_2' & c_2' & D_2' \\ 0 & b_3' & c_3' & D_3' \end{array} \tag{C.18}$$

- Most a 2. sort osszuk le $b_2'$-vel:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} & \dfrac{D_1}{a_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{c_2'}{b_2'} & \dfrac{D_2'}{b_2'} \\ 0 & b_3' & c_3' & D_3' \end{array} \tag{C.19}$$

- És ezt $b_3'$-vel beszorozva vonjuk ki a 3. sorból és nevvezzünk el másként pár dolgot ismét:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} & \dfrac{D_1}{a_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{c_2'}{b_2'} & \dfrac{D_2'}{b_2'} \\ 0 & 0 & \underbrace{c_3' - b_3'\dfrac{c_2'}{a_2'}}_{:=c_3''} & \underbrace{D_3'' - b_3'\dfrac{D_2'}{a_2'}}_{:=D_3''} \end{array} \tag{C.20}$$

  Így azt kapjuk, hogy:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} & \dfrac{D_1}{a_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{c_2'}{b_2'} & \dfrac{D_2'}{b_2'} \\ 0 & 0 & c_3'' & D_3'' \end{array} \tag{C.21}$$

[11] Speciális struktúrát mutató egyenletrendszerek esetére léteznek gyorsabb eljárások is.

- Osszuk le a 3. egyenletet $c_3''$-vel, így:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} & \frac{D_1}{a_1} \\ 0 & 1 & \frac{c_2'}{b_2'} & \frac{D_2'}{b_2'} \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{\frac{D_3''}{c_3''}}_{:=D_3'''} \end{array} \tag{C.22}$$

- A 3. sort beszorozva $\frac{c_2'}{b_2'}$-vel vonjuk ki a 2. sorból ás beszorozva $\frac{c_1}{b_1}$-el vonjuk ki az 1. sorból

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{b_1}{a_1} & 0 & \underbrace{\frac{D_1}{a_1} - \frac{c_1}{b_1}D_1'''}_{:=D_1'''} \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\frac{D_2'}{b_2'} - \frac{c_2'}{b_2'}D_3'''}_{:=D_2'''} \\ 0 & 0 & 1 & D_3''' \end{array} \tag{C.23}$$

- Ami maradt:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{b_1}{a_1} & 0 & D_1''' \\ 0 & 1 & 0 & D_2''' \\ 0 & 0 & 1 & D_3''' \end{array} \tag{C.24}$$

- A 2. sort szorozva $\frac{b_1}{a_1}$-el, majd kivonva az 1. sorból:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & D_1''' - \frac{b_1}{a_1}D_2''' \\ 0 & 1 & 0 & D_2''' \\ 0 & 0 & 1 & D_3''' \end{array} \tag{C.25}$$

- Most már csak vissza kell helyettesíteni.

# Tárgymutató