Elektromágnesség 4.versenyfeladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
   A feladat megoldása során felhasználjuk a tükörtöltések módszerét. Mivel a két síklap össze van kötve, ezért nyílván ekvipotenciálisak lesznek, és a végtelen nagyságuk miatt olyanok mintha null potenciálon lennének, azaz mintha földelve lennének. Tehát valóban használhatjuk a tükörtöltések módszerét.
   Először is keressük meg, hogy milyen tükörtöltések kellenek. Ezt az ábrán láthatjuk:

   Ahhoz, hogy a pillanatnyi töltésüket a lemezeknek külön külön meghatározzuk, ki kell számolnunk a felületi töltéssűrűségüket, majd azt integrálni a félvégtelen síkra.
   A felületi töltéssűrűség kiszámításához meg kell határoznunk a térerősséget a sík egy adott pontjában. A térerősséget egy adott pontban az egyes töltések tereinek szuperpozíciójaként kapjuk meg.
   Vegyük fel az (x, y, z) tengelyeket a fenti ábrán látható módon. Ekkor a két lemez az yz illetve xz síkokban lesznek. Számoljuk ki először az yz síkon a felületi töltéssűrűséget, majd abból analóga módon következtethetünk az xz lemezére is.
   A sík egy pontjában, csak a síkra merőleges irányú lesz az eredeő tér, hiszen a többi pont ki fogja oltani egymást. Ebből a térerősségből pedig, a töltéssűrűséget az ismert módon számolhatjuk:

$$\eta = \varepsilon_0 E$$

   itt értelemszerűen E a térerősségnek a síkra merőleges komponensének az abszolútértéke. Tehát E térerősség az yz sík egy tetszőleges pontjában(itt a technikai számolást nem részletezem, hiszen az csak néhány geometriai megfontolás):

$$E_{yz} = \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(a^2+z^2+(y-b)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+z^2+(y+b)^2)^{3/2}}\right]$$

   Tehát a töltéssűrűség:

$$\eta_{yz} = \frac{qa}{2\pi}\left[\frac{1}{(a^2+z^2+(y-b)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+z^2+(y+b)^2)^{3/2}}\right]$$

   A síklap töltése pedig, ennek az integrálja a síkra:

$$Q_{yz} = \frac{qa}{2\pi}\int_0^\infty dy\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(a^2+z^2+(y-b)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+z^2+(y+b)^2)^{3/2}}\right]dz$$

   Végezzük el először a z szerinti integrálást! Most egy ilyen típusú integrált kell kiszámítanunk:

$$\int \frac{1}{(p^2+z^2)^{3/2}}\,dz$$

   Alakítgassuk egy kicsit:

$$\int \frac{1}{(p^2+z^2)^{3/2}}\,dz = \frac{1}{p^3}\int \frac{1}{\left(1+\left(\frac{z}{p}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Legyen $\frac{z}{p} = \text{sh}t$ Ekkor $dz = p\text{ch}t\ dt$. ismerjük továbbá az $\text{ch}^2t - \text{sh}^2t = 1$ összefüggést. Ezeket felhasználva az integrál:

$$\frac{1}{p^3}\int \frac{1}{\left(1+\left(\frac{z}{p}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{p^2}\int \frac{1}{\text{ch}^2t}dt = \frac{1}{p^2}\text{th}t$$

Visszatérve a z változóra, az integrál:

$$\int \frac{1}{(p^2+z^2)^{3/2}}\,dz = \frac{z}{p^2\sqrt{p^2+z^2}}$$

De nekünk vannak határaink is. Az eredeti határozott integrál tehát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{(p^2+z^2)^{3/2}}\,dz = \left[\frac{z}{p^2\sqrt{p^2+z^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{p^2}$$

Az eredeti feladatra visszatérve, az integrandus 'baloldali' részénél: $p^2 = a^2+(y-b)^2$ a 'jobboldali' résznél: $p^2 = a^2+(y+b)^2$. Azaz, marad:

$$Q_{yz} = \frac{qa}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{a^2+(y-b^2)} - \frac{1}{a^2+(y+b^2)}\right]\,dy$$

Most már csak egy ilyen típusú integrált kell kiszámítanunk. Ezt könnyen megtehetjük, hiszen egyből átrendezhetjük egy alapintegrállá:

$$\int \frac{1}{a^2+(y\pm b)^2}dy = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y\pm b}{a}\right)^2}dy = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{y\pm b}{a}$$

Most vegyük a határokon is:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+(y\pm b)^2}dy = \frac{1}{a}\left[\text{arctg}\frac{y\pm b}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2} \mp \text{arctg}\frac{b}{a}\right]$$

Tehát ezeket visszaírva az eredeti töltés integráljába, megkapjuk a töltést:

$$Q_{yz} = \frac{qa}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{a^2+(y-b^2)} - \frac{1}{a^2+(y+b^2)}\right]\,dy = \frac{qa}{\pi}\left[\frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}+\text{arctg}\frac{b}{a}\right] - \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}+\text{arctg}\frac{b}{a}\right]\right]$$

Azaz:

$$Q_{yz} = \frac{2q}{\pi}\text{arctg}\frac{b}{a}$$

Teljesen hasonlóan számolhatjuk ki az xz sík töltését. A felületi töltéssűrűség:

$$\eta_{xz} = \frac{qb}{2\pi}\left[\frac{1}{(b^2+z^2+(x-a)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(b^2+z^2+(x+a)^2)^{3/2}}\right]$$

Ahonnan a töltés:

$$Q_{xz} = \frac{qb}{2\pi}\int_0^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(b^2+z^2+(x-a)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(b^2+z^2+(x+a)^2)^{3/2}}\right]dz$$

Itt láthatóan úgyanolyan integrálokat kell kiszámolni mint az előző esetbe, tehát ezt most nem részletezem, egyből a végét írom:

$$Q_{xz} = \frac{2q}{\pi}\text{arctg}\frac{a}{b}$$

Láthatjuk tehát, hogy amint vártuk a két lemez pillanatnyi töltése különbözni fog, tehát valóban áram fog folyni a kettő között. Ezt az áramot úgy kapjuk meg, hogy deriváljuk a lemezen levő

töltést idő szerint. Itt az $a(t)$ és $b(t)$ távolságok függnek az időtől.
Át térve a polárkoórdinátákra: $a = r\sin\omega t$ és $b = r\cos\omega t$ ez így írható:

$$Q_{xz}(t) = \frac{2q}{\pi}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\omega t)$$

Most a mozgást csak a megadott síknegyedben vizsgáljuk, hiszen a töltés oda van 'beszorítva' (nem tud átmenni a lemezen), tehát $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\omega t) = \omega t$ Azaz:

$$Q(t) = \frac{2q}{\pi}\omega t$$

Az áram pedig ennek az idő szerinti deriváltja:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{2q}{\pi}\omega$$

2. Feladat:
A feladat az volt, hogy egy a súlypontján átmenő tengely körül forgatott egyenletes töltéssűrűségű szabályos tetraédernek kell a mágneses dipolmomentumát. (Innentől kezdve ahol tetraédert írok ott természetesen a szabályos tetraédert értem)
A mágneses dipolmomentum:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\iiint \vec{r} \times \vec{J}(\vec{r})\ dV$$

Na de itt egy forgó testről van szó, ezért a $\vec{J}$ áramsűrűség vektor így írható:

$$\vec{J} = \rho\vec{v}$$

Ahol $\vec{v}$ egy adott pont pillanatnyi sebessége. Mivel a pontok körpályán mozognak, ezért $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$.
Azaz a momentum:

$$\vec{\mu} = \frac{\rho}{2}\iiint \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\ dV$$

Na de $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \cdot \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{\omega}\vec{r}) = (r^2E - \vec{r} \circ \vec{r})\omega$. Itt E a 3×3-as egységmátrix, és a $\circ$ a diadikus szorzat operátora. Ezt visszaírva az integrálba ($\vec{\omega}$-t nyílván kiemelhetünk most):

$$\vec{\mu} = \frac{\rho}{2}\iiint \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\ dV = \frac{\rho\vec{\omega}}{2}\iiint (r^2E - \vec{r} \circ \vec{r})\ dV$$

Ezt most szorozzuk be és osszuk le a tetraéder ρ_t tömegsűrűségével:

$$\vec{\mu} = \frac{\rho\vec{\omega}}{2\rho_t}\iiint \rho_t(r^2E - \vec{r} \circ \vec{r})\ dV$$

Tehát azt kaptuk, hogy a kiszámítandó integrál nem más mint a tetraéder tehetetlenségi tenzora, hiszen az integrál definíció szerint ez.
A feladat szerint a tengely a tetraéder súlypontján megy át. Tehát a súlyponton átmenő tetszőleges tengelyre kéne meghatároznunk a tehetetlenségi nyomatékot azaz a súlyponti tehetetlenségi tenzort. Ez először nehéznek tűnik, de használjuk ki a tetraéder szimmetriáját. Ha ismerjük a tehetetlenségi tenzort, az ugyanolyan mintha ismernénk a tehetetlenségi ellipszoidot, a súlypontra. Azt ismerjük, hogy a tetraéder súlypontján és valamelyik csúcsán áthaladó egyenes körüli 120 fokos forgatás a tetraédert önmagába viszi át. Na de egy általános ellipszoid, melynek mindhárom főtengelye különböző hosszúságú, csak akkor megy át önmagába, ha valamelyik főtengelye körül 180 fokkal forgatjuk. Tehát a tetraéder szimmetriája miatt most nyílván annak kell teljesülnie, hogy az ellipszoid főtengelyei egyenlő hosszúak, azaz egy gömb. Vagyis a súlyponton átmenő összes tengelyre vonatkoztatva ugyanakkora lesz a tehetetlenségi nyomaték.
Ezért elég a legszimmetrikusabbra tengelyre kiszámolnunk.
Legyen a z tengely merőleges az alaplap síkjára, és mennyen át a vele szemközti csúcson (természetesen

mennyen át a súlyponton is, tehát az alapháromszöget annak súlypontjában fogja metszeni). legyen az x tengely merőleges a z tengelyre és merőleges párhuzamos az alappal és merőleges az alapháromszög oldalára. Az y tengely pedig értelem szerűen erre a kettőre legyen merőleges. Számoljuk ki most a z tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot. Ekkor láthatóan elég csak a tetraéder harmadára integrálni. A tetraéder él hossza legyen a.
A kiszámítandó integrál:

$$\iiint (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

A határok:

$$0 \leq z \leq a\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad 0 \leq x \leq z\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad -x\sqrt{3} \leq y \leq x\sqrt{3}$$

Tehát az integrál. Az integrálásokat sorra elvégezve(ezek csak alapintegrálok), a következőt kapjuk:

$$\int_0^{a\sqrt{\frac{2}{3}}} dz \int_0^{z\frac{\sqrt{2}}{4}} dx \int_{-x\sqrt{3}}^{x\sqrt{3}} dy(x^2 + y^2) = \frac{\sqrt{2}}{720}a^5$$

Na de nekünk ennek a háromszorosa kell, és ezzel a mágneses dipolmomentum (Legyen $\vec{n}$ az $\vec{\omega}$ irányú egységvektor):

$$\vec{\mu} = \frac{\rho\omega}{2}\frac{\sqrt{2}}{240}a^5\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{480}\rho\omega a^5\,\vec{n}$$

3. Feladat:
Bontsuk fel a föld mágneses indukció vektorát egy víszintes és függőleges komponensre. Ekkor a függőleges komponensnek nincs fluxusa a karikán át. Legyen a víszintes komponens B. legyen a karika tengelye és a víszintes által bezárt szög φ. Ekkor $\varphi = \omega t$.
Ekkor a föld vízszintes komponenséből származó karikán átmenő fluxus nagysága folyamatosan változik a karika forgása végett. E miatt a karikában feszültség indukálódik, tehát áram fog folyni a karikában. Ennek az áramnak lesz egy mágneses tere a karika középpontjában, és ezért megváltozik az eredő tér iránya és nagysága a karika középpontjában, vagyis a mágnestű ki fog térni az eredeti helyzetéből.
Számoljuk ki most az áramot.
A karikán átmenő fluxus:

$$\Phi = B\rho^2\pi\cos\omega t$$

Az indukált feszültség tehát:

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = B\rho^2\pi\omega\sin\omega t$$

Vagyis az áram:

$$I = \frac{U_i}{R} = \frac{B\rho^2\pi\omega\sin\omega t}{R}$$

Ahol R a karika elektromos ellenállása.
Egy ρ sugarú I árammal átjárt karika középpontjában a mágneses indukció nagysága ismert, hogy:

$$B_k = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{\rho} = \frac{\mu_0 B\rho\pi\omega}{2R}\sin\omega t$$

Ezt is bontsuk fel egy vízszintes és egy arra merőleges komponensre, majd ezeknek vegyük az egy periódusra vett átlagát:

$$B_{kv} = B_k\cos\omega t = \frac{\mu_0 B\rho\pi\omega}{2R}\sin\omega t\cos\omega t = \frac{\mu_0 B\rho\pi\omega}{2R}\sin 2\omega t$$

Az átlag:

$$< B_{kv} >= \frac{\mu_0 B\rho\pi\omega}{2R}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T \sin 2\omega t\ dt = 0$$

Vagyis a vízszintes komponens egy periódusra vett átlaga nulla.
Most nézzük a karika terének merőleges komponensét:

$$B_{km} = B_k \sin \omega t = \frac{\mu_0 B \rho \pi \omega}{2R} \sin \omega t \sin \omega t = \frac{\mu_0 B \rho \pi \omega}{2R} \sin^2 \omega t$$

Az átlag:

$$< B_{km} >= \frac{\mu_0 B \rho \pi \omega}{2R} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \; dt$$

Számoljuk ki ezt az integrált:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \; dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \frac{1}{2} \; dt - \underbrace{\int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{2} \; dt}_{0} \right) = \frac{1}{T} \left[\frac{t}{2} \right]_0^T = \frac{1}{2}$$

Vagyis a merőleges komponens átlaga:

$$< B_{km} >= \frac{\mu_0 B \rho \pi \omega}{4R}$$

A feladatban adott volt, hogy átlagosan $\alpha = 2°$-kal, térül ki a mágnestű. A mágnestű a karika mágneses terének és a föld mágneses tere eredőjének irányába áll be. Azaz:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{< B_{km} >}{B} = \frac{\mu_0 \rho \pi \omega}{4R}$$

Innen ki tudjuk fejezni a karika elektromos ellenállását. A feladatban a karika n fordulat száma adott. Ennek kapcsolata a szögsebességgel ismert, hogy:$\omega = 2\pi n$. Ezzel tehát a karika elektromos ellenállása:

$$R = \frac{\mu_0 \rho \pi^2 n}{2\mathrm{tg}\alpha} \approx 1,8 \cdot 10^{-4} \Omega$$

Érdekes, hogy ez nem függ a föld mágneses terétől.

4. Feladat:
Mivel a rúd esik lefelé a mágneses mezőben, ezért a körben áram fog indukálódni. Számoljuk ezt ki, amikor a rúd már x távolságot eset lefelé.
Az indukált feszültség:

$$U = Blv = Bl\dot{x}$$

Tehát az indukált áram:

$$I = \frac{Bl\dot{x}}{R_0 + 2\rho x}$$

Hiszen az ellenállása folyamatosan nő a sínnek. Ez az indukált áramból származó erő lassítani fogja a rudat az esésébe, és a lefelé mutató gravitációs erő pedig gyorsítani fogja. Tehát a mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = mg - BIl = mg - Bl \frac{Bl\dot{x}}{R_0 + 2\rho x} = mg - \frac{B^2 l^2 \dot{x}}{R_0 + 2\rho x}$$

Azaz:

$$\ddot{x} + \frac{B^2 l^2}{m} \frac{\dot{x}}{R_0 + 2\rho x} = g$$

Ez egy szép kis differenciálegyenlet, melyet meg kéne oldanunk. Láthatóan egyből integrálhatunk, idő szerint. Ekkor:

$$\dot{x} + \frac{B^2 l^2}{2m\rho R_0} \ln \left(1 + \frac{2\rho x}{R_0} \right) = gt + C$$

Ezt a differenciálegyenletet, bármennyire is próbáltam nem tudtam megoldani, sőt az a sejtésem, hogy nincs is zárt alakú megoldása, mivel még a számítógép program sem (pontosabban a Mathematica) tudja megadni. De még semmilyen elvégezhetetlen integrált vagy nem-elemi függvényt sem ad ki.
Legfeljebb szélső eseteket vizsgálhatunk.

Most nézzük meg, mi van amikor a rúd már elindult de még nem esett annyit. Azaz amikor $2\rho x << R_0$. Ekkor az $\ln(1+x) \approx x$ közelítést használhatjuk, hiszen x most kicsit. Azaz így kapunk egy lineáris inhomogén diffegyenletet x-re:

$$\dot{x} + \frac{B^2 l^2}{m R_0^2} x = gt + C$$

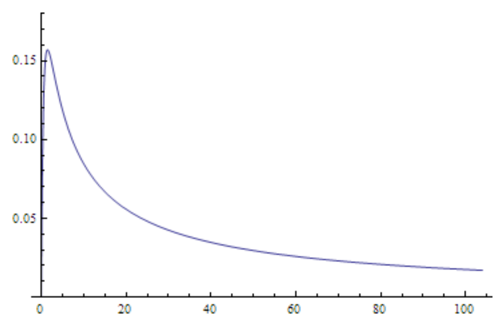
Figyelembe véve a kezdeti feltételeket: $\dot{x}(0) = 0$ és $x(0) = 0$, ennek a megoldása:

$$x(t) = \frac{m^2 R_0^4 g}{B^4 l^4} \left(1 - e^{\frac{B^2 l^2}{m R_0^2} t}\right) + \frac{m R_0^2 g}{B^2 l^2} t \Longrightarrow v(t) = \frac{m R_0^2 g}{B^2 l^2} \left(1 - e^{\frac{B^2 l^2}{m R_0^2} t}\right)$$

Tehát így fog mozogni, az elején.
Nézhetjük még azt is amikor x nagyon nagy lesz. Ekkor az ellenállás már nagyon nagy lesz, így alig fog áram folyni, tehát, ismét visszakapjuk a szabadesést:

$$x(t) = \frac{g}{2} t^2$$

Tehát aszimptotikusan a rúd szabadon fog esni.
Érdekes eredményt kapunk, ha például ábrázoljuk, numerikusan a diffegyenlet megoldását (Ezt mathematicával tettem). És ennek vesszük a relatív eltérését a négyzetes út törvénytől.



(A konstansoknak megadtam itt most valamilyen értéket.). Itt pontosan az:

$$\frac{5t^2 - x(t)}{5t^2}$$

ábrázoltam, ahol $x(t)$-t a mathematicaval numerikusan számoltattam ki.
Érdekes dolgot kaptunk. Azt látjuk, hogy hosszú idő múlva, ahogyan azt sejtettük az $x(t)$ függvény a szabadesésnek fog megfelelni. De nézzük, meg hogyan viselkedik közben. láthatjuk, hogy még a mozgás elején lesz egy maximális eltértése a szabadeséstől, majd egyre közelebb fog kerülni, hozzá és végül majd tartani fog hozzá. Érdekes lenne kiszámolni ezt a maximumális eltérést, de hát sajnos én még nem ismerem az ehhez szükséges matematikai közelítéses módszereket, és a differenciálegyenletek numerikus megoldásainak az elemezgetését.
Próbálozhatunk még azzal, hogy Taylor soros alakban keressük a megoldásokat, de ekkor sem jutunk semmi használhatóra.
Őszintén nem tudom, hogy mi mást tudnék kezdeni a jelenlegi tudásommal ezzel a diffegyenlettel, úgyhogy ennyiben hagyom a vizsgálatot.