Elektromágnesség 3.versenyfeladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:
Vegyünk, fel egy az ábrán látható koórdinátarendszert, az y tengely mutasson lefelé, az x tengely pedig jobbra. Miután beejtyük a tötltést, arra, fog hatni egy gravitációs erő az y irányban, hiszen a részecske egy gravitációs mezőben is benne van. A gravitációs mező gyorsítja, így lesz sebessége is. Mivel a gravitációs mezőre merőlegesen vízszintes irányban van egy mágneses mező is, és van sebessége a töltésnek, ezért fog rá hatni egy Lorentz erő is. Az ábrána mágneses mező az ábra a papírba befelé mutat, és így be is rajzoltuk a töltésre ható erőket:

Tudjuk, hogy a töltésre ható Lorentz erő nem tudja megváltoztatni a sebesség nagyságát, mivel arra mindig merőleges. ezért a töltés sebességének nagyságát csak a gravitációs erő változtatja. Az ábra alapján tehát a töltés mozgásegyenletei:

$$g - F\sin\alpha = m\ddot{y}$$
$$F\cos\alpha = m\ddot{x}$$

Na de ismerjük, hogy a Lorentz erő hogyan számítható ki. Mivel most $\mathbf{v}$ és $\mathbf{B}$ merőlegesek egymásra, ezért a Lorentz erő:

$$F = qvB$$

A mozgásegyenletek viszont, a Lorentz erőnek az x és y irányú komponenseit tartalmazzák.

$$F_x = F\cos\alpha = qB \cdot v\cos\alpha$$

Az ábráról látható, hogy $v\cos\alpha$ nem más mint a v sebességnek az y irányú komponense, azaz $v\cos\alpha = \dot{y}$ ahonnan $F_x = qB\dot{y}$. Hasonlóan $F_y = qB\dot{x}$. Ezekkel a mozgásegyenleteink, kicsit rendezve:

$$g - \frac{qB}{m}\dot{x} = \ddot{y}$$

$$\frac{qB}{m}\dot{y} = \ddot{x}$$

Ez láthatóan két csatolt differenciálegyelet.
A második egyenletet rögtön integrálhatjuk az $\dot{x}(y=0) = 0$ kezdőfeltétellel, hiszen a töltéstnek nem volt kezdősebessége. Ekkor:

$$\dot{x} = \frac{qB}{m}y$$

Ezt visszaírva az y irányú mozgásegyenletbe:

$$g - \frac{q^2B^2}{m^2}y = \ddot{y}$$

(a) Most először a pálya legmélyebb pontját kell meghatároznunk. Ez akkor lesz amikor $\dot{y} = 0$. Tehát elsőlépésben nekünk, még csak a $\dot{y}(y)$ függvény, kell. Ehhez alakítsuk át $\ddot{y}$-t a szokásos módon:

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{\dot{y}\,d\dot{y}}{dy}$$

Ezt beírva az előző diffegyenletbe szétválaszthatjuk a változókat:

$$\dot{y}\,d\dot{y} = \left(g - \frac{q^2B^2}{m^2}y\right)dy$$

Rögtön integrálhatunk, az $\dot{y}(y = 0) = 0$ kezdeti feltétel mellett, hiszen ejtettük a töltést. Elvégezve az integrálást:

$$\dot{y} = \pm\sqrt{y\left(2g - \frac{q^2B^2}{m^2}y\right)}$$

Ez láthatóan két helyen lesz nulla. Az egyik az ejtés magassága $y = 0$ Tehát ez lesz a pálya legmagasabb pontja. A másik pont ahol $\dot{y}$ nulla lesz pedig, az előző kifejezés alapján:

$$y_{max} = \frac{2m^2g}{q^2B^2} = 45m$$

Tehát ez lesz a pálya legmélyebb pontja. (g értékét mindenhol $g = 10m/s^2$-nek vettem. Bevallom a numerikus érték kiszámolását majdnem elfelejtettem, mert eddig sehol nem kellett...)

(b) A töltés sebessége:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Ide beírva, az elején kapott $\dot{x}(y)$ valamint az előző pontban kapott $\dot{y}(y)$ kifejezéseket:

$$v(y) = \sqrt{2gy}$$

Ez nyílván akkor lesz maximális, amikor y maximális. Ezt már az előző pontban meghatároztuk, Ide beírva:

$$v_{max} = \frac{2mg}{qB} = 30\frac{m}{s}$$

Tehát ez lesz a maximális sebessége a töltésnek. A $v(y)$ sebesség értékét mondjuk könnyebben is megkaphatjuk. Az elején tárgyaltuk, hogy a Lorentz erő nem végez munkát a töltésen, így a sebességének nagyságát csak a gravitációs mező változtatja. Tehát a munkatétel alapján:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Longrightarrow v(y) = \sqrt{2gy}$$

(c) Ahhoz, hogy a részecske pályáját meghatározzuk, térjünk vissza a:

$$g - \frac{q^2B^2}{m^2}y = \ddot{y}$$

differenciálegyenlethez. Kicsit rendezzük át:

$$\ddot{y} + \frac{q^2B^2}{m^2}y = g$$

Ez egy lineáris másodrendű állandóegyütthatós inhomogén differenciálegyenlet. A megoldására használhatjuk tehát a próbafüggvény módszerét. A homogén rész:

$$\ddot{Y} + \frac{q^2B^2}{m^2}Y = 0$$

Ez láthatóan pont a harmonikus rezgés differenciálegyenlete. Ennek ismerjük a megoldását, ami felírható ilyen alakban:

$$Y = C_1 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

Az inhomogén tag konstans, ezért a próbafüggvény $y_0 = A$ alakú, ahol A konstans. Ezt beírva a diffegyenletbe megkapjuk A-t:

$$A = \frac{m^2 g}{q^2 B^2}$$

Tehát a diffegyenlet általános megoldása $y = Y + y_0$:

$$y = C_1 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{m^2 g}{q^2 B^2}$$

A konstansokat a kezdeti feltételekből határozhatjuk meg. Ezek $y(t = 0) = 0$ és $\dot{y}(t = 0) = 0$. Ezek alapján $C_1 = 0$ és $C_2 = -\frac{m^2 g}{q^2 B^2}$. Vagyis a megoldás:

$$y(t) = -\frac{m^2 g}{q^2 B^2} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{m^2 g}{q^2 B^2}$$

Ebből meghatározhatjuk az $x(t)$-t is. Az elején kaptunk egy összefüggést $\dot{x}$ és y között:

$$\dot{x} = \frac{qB}{m} y = -\frac{mg}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mg}{qB}$$

Ezt rögtön integrálhatjuk, hogy x-t megkapjuk, az $x(t = 0) = 0$ kezdeti feltétellel. Elvégezve az integrálást:

$$x(t) = -\frac{m^2 g}{q^2 B^2} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mg}{qB} \cdot t$$

Tehát a részecske pályája:

$$x(t) = -\frac{m^2 g}{q^2 B^2} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mg}{qB} \cdot t \tag{1}$$

$$y(t) = -\frac{m^2 g}{q^2 B^2} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \tag{2}$$

Amint látjuk nem tudjuk megadni a fenti egyenletekből nem tudjuk explicit kifejezni y-t, de a t paraméterrel felírtuk a részecske pályáját megadó egyenleteket, hiszen t elvileg ki tudjuk küszöbölni, és akkor kapunk egy összefüggést y és x közt. Ráismerhetünk azonban, hogy ez egy nevezetes görbét ad meg, a cikloist. vagyis a részecske pályája ciklois.

2. Feladat:

Amikor a kis töltés belép a mágneses mezőbe, akkor el fog térülni, de sebességének nagysága nem fog változni, hiszen a rá ható mágneses Lorentz erő nem végez munkát rajta, így nem változtatja a sebességének a nagyságát. Tehát a mágneses mezőben a részecske pályája kör pálya lesz, és a szimmetriai okok miatt (a pályája szimmetrikus az y tengelyre a feladat szerint) a kör középpontja éppen az y tengelyen lesz.
Legyen a körpályájának a sugara R ezt megtudjuk határozni a mozgásából a mágneses mezőben:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB \Longrightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

Ez konstans hiszen a sebesség v nagysága konstans.
A mágneses mezőt határoló görbe azon pontjának a koordinátja ahol egy adott szögben kilőtt részecske belép legyen (x, y). Legyen a kilővés időpontjában a részecske sebességének az x tengellyel bezárt szöge α. A mágneses mezőn kívüli pályája a részecskének nyílván egyenes hiszen nem hat rá eltérítő erő. A mezőbe belépés pillanatában a részecske elkezd körpályán mozogni, és ennek a kinti pályának az egyenese a belépés pontjában nyílván érintője lesz a körnek, tehát merőleges lesz az ide (x, y) pontba a kör középpontjából húzott sugár egyenesére. Vagyis a geometria alapján ezen sugár az y tengellyel is éppen α szöget fog bezárni. Azaz $x = -R\sin\alpha$.
Mivel a részecskéket a $(-f, 0)$ pontból lőjük ki ezért az ábra alapján látható, hogy:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{f - x}$$

Az előző egyenletből kitudjuk fejezni $\sin\alpha$-t, és ezzel pedig $\mathrm{tg}\alpha$-t:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Ez alapján tehát y:

$$y(x) = \frac{x^2 - fx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Itt most nyílván $x \leq 0$. A 'másik oldalon' azaz ahol $x > 0$ ott csak ezt tükröznünk kell az y tengelyre.

3. Feladat:

Itt most egy kölcsönös indukciós együtthatót kell meghatároznunk. Ahhoz, hogy ezt megtegyük ki kell számolnunk az R sugarú gyűrű által körbeölelt mágneses fluxust. Ezt a fluxust a tőle d(a továbbiakban l, hogy ne keveredjünk..) távolságra lévő hosszú egyenes vezető mágneses teréből tudjuk kiszámítani. Hiszen $\Phi_{12} = L_{12}I$ ahol L_{12} a kölcsönös indukciós együttható. Legyen a gyűrű egy belső pontjának távolsága a középpontjától r, és r-nek a vízszintessel bezárt szöge φ. Ekkor a kis $dA = rd\varphi dr$ felület darabon átmenő fluxust kiszámíthatjuk.
A hosszú egyenes vezető mágneses tere a kis felület darab helyén:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{l - r\sin\varphi}$$

Ezt ismerhetjük, mondjuk a gyakorlatról ahol le is vezettük. Tehát ezen a kis felületdarabon áthaladó fluxus:

$$d\Phi_{12} = B \cdot dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{rd\varphi dr}{l - r\sin\varphi}$$

Vagyis a teljes fluxus:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{l - r\sin\varphi}$$

Először számítsuk ki a szög szerinti integrált. Itt a határokat a későbbiek kedvéért átírom $-\pi$-től π-g. Nyílván ugyanazt az értéket fogjuk kapni, hiszen egy periódusra kell integrálnunk. Vezessük még be az $a = r/l$ jelölést is itt. ekkor

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{l - r\sin\varphi} = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - \frac{r}{l}\sin\varphi} = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - a\sin\varphi}$$

Tehát most egy ilyen integrált kell kiszámítanunk:

$$\int \frac{dx}{1 - a\sin x}$$

Itt most x csak egy változó. Alakítgassuk egy kicsit:

$$\int \frac{dx}{1 - a\sin x} = \int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - a2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)}$$

Itt felhasználtuk a közismert $\sin 2t = 2\cdot\sin t\cos t$ összefüggést. Most adjuk hozzá a nevezőben a zárójeles mennyiséghez a^2-t és vonjuk is le belőle ugyanennyit, Azaz bővítsük nullával:

$$\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 - a^2 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2} + a^2\right)} = \int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 - a^2 + \left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} - a\right)^2\right)} =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}(1 - a^2)\left(1 + \left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - a}{\sqrt{1 - a^2}}\right)^2\right)}$$

Most használjuk a kövezkező helyettesítést:

$$y = \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - a}{\sqrt{1 - a^2}} \Longrightarrow dx = 2\sqrt{1 - a^2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\,dy$$

Ezt beírva:

$$\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}(1 - a^2)\left(1 + \left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - a}{\sqrt{1 - a^2}}\right)^2\right)} = \int \frac{2\sqrt{1 - a^2}\cos^2\frac{x}{2}\,dy}{\cos^2\frac{x}{2}(1 - a^2)\left(1 + y^2\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - a^2}}\int \frac{dy}{1 + y^2}$$

Ez már egy alapintegrál:

$$\frac{2}{\sqrt{1 - a^2}}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{2}{\sqrt{1 - a^2}}\mathrm{arctg}(y)$$

Visszatérve az eredeti változókra tehát az integrálunk:

$$\int \frac{dx}{1 - a\sin x} = \frac{2}{\sqrt{1 - a^2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - a}{\sqrt{1 - a^2}}\right)$$

A feladat eredeti változóira visszatérve:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{l - r\sin\varphi} = \frac{2}{\sqrt{l^2 - r^2}}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{l\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2} - r}{\sqrt{l^2 - r^2}}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Most látható, hogy a feladat elején miért tértem át más integrálási határokra. Ugyanis most gond lenne az értelmezési tartományokkal, hiszen a primitív függvény periódikus, és periódusa éppen 2π tehát itt nullát kapnánk az integrálra ha csak brute-force behelyettesítenénk. Ezt azért, mivel egy köztes pontban, π-nél a primitív függvény láthatóan nem deriválható. A primitív függvény grafikonját ábrázolva jobban láthatjuk ezt.
Tehát a most már jó határokat beírva, tudjuk azt hogy az arctan fv. a végtelenben tart $\pi/2$-hez és a - végtelenben tart $-\pi/2$-hez, tehát, a behelyettesített rész éppen $\pi/2 - (-\pi/2) = \pi$ lesz:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{l - r\sin\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{l^2 - r^2}}$$

Most már elvégezhetjük az r szerinti integrálást, ez egyszerű nagyon, így nem fejtem ki részletesen:

$$\int_0^R \frac{2\pi r}{\sqrt{l^2 - r^2}}\, dr = 2\pi[-\sqrt{l^2 - r^2}]_0^R = 2\pi(l - \sqrt{l^2 - R^2})$$

Most már megadhatjuk a fluxust (visszatérünk az eredeti jelölésre, azaz $l = d$)

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot 2\pi(d - \sqrt{d^2 - R^2}) = \mu_0 I(d - \sqrt{d^2 - R^2})$$

Tehát a rendszer kölcsönös indukciós együtthatója innen:

$$L_{12} = \mu_0(d - \sqrt{d^2 - R^2})$$

4. Feladat: A megoldás során a differenciális Ohm-törvényt fogjuk használni. Ehhez meg kell határoznunk a $j(r)$ áramsűrűséget. Attól a ponttól ahol az áramot bevezettük a lapra, az áramvonalak mindenfelé elkezdenek terjedni a síklapon, és a féltömbben is. Tehát az összes áram vonal egy félgömbön fog áthaladni. Vagyis az áramsűrűséget megtudjuk határozni. Most csak a bevezetett áramot tekintettük. Mivel a szuperpozíció elve szerint megtehetjük azt, hogy a be és kivezetett áramok hatásait külön tekintjük, majd azokat egybe rakjuk.
Vagyis a bevezetett áramra az áramsűrűség:

$$j(r) \cdot 2r^2\pi = I \Longrightarrow j(r) = \frac{I}{2\pi}\frac{1}{r^2}$$

láthatóan ez $1/r^2$-s. A differenciális Ohm törvény szerint az elektromos térerősség:

$$E(r) = \rho \cdot j(r) = \frac{\rho I}{2\pi}\frac{1}{r^2}$$

Ahol ρ az általunk keresett fajlagos ellenállás az anyagnak.
Az ebből adódó potenciál különbség a négyzet túlsó pontjai között (A potenciált a végtelenben választjuk nullának):

$$U_{be} = -\int_{\infty}^{a} \frac{\rho I}{2\pi}\frac{1}{r^2} + \int_{\infty}^{a\sqrt{2}} \frac{\rho I}{2\pi}\frac{1}{r^2} = \frac{\rho I}{2\pi a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Most ugyanezt el kell végeznünk, a kivezetett áramra. Nyílván ott csak annyi lesz a különbség, hogy minden előjelet vált. Vagyis a potenciálok a négyzet átellenes pontjaiban is nyílván ellentétes előjelűek lesznek. Ez viszont pont azt fogja jelenteni, hogy az U_{ki} potenciál különbség pont előjelben és nagyságban is meg fog egyezni az U_{be} potenciálkülönbséggel.Vagyis a fizikusok által mért U feszültség az előzőleg számolt U_{be} értéknek pont a kétszerese lesz. Azaz:

$$U = \frac{\rho I}{\pi a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Tehát innen az általunk keresett fajlagos ellenállás:

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\frac{\pi a U}{I}$$