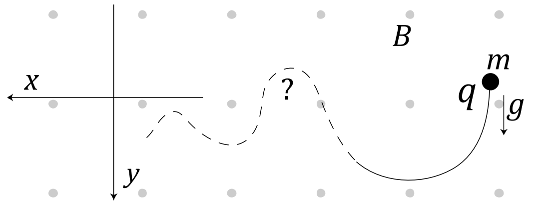
Tüzes Dániel, TUDPAAT
3. elektromágnesség tan gyakorlat szorgalmi

1. Vizsgáljuk meg a töltés mozgását!



Legyenek kezdőfeltételeink: $v_x(0)=0$ és $v_y(0)=0$. Tehát a gravitációs erő hatására elkezd gyorsulni lefele. Ekkor már lesz sebessége, így hatni fog rá a Lorentz erő, ami mindig merőleges a sebességére. Így láthatjuk, hogy a töltés síkmozgás fog végezni. Ne feledjük, hogy a Lorentz erő nem végez munkát! Írjuk fel tehát a testre ható erőket:

$$F_x = qv_yB = ma_x \equiv m\frac{dv_x}{dt}\text{, és } F_y = mg - v_xBq = ma_y \equiv m\frac{dv_y}{dt}.$$

Ez egy 2 ismeretlenes, 2 egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszer, melyből meghatározható v_y és v_x. Ezen értékekre (a részletes számításokat mellőzve, azokat a javítóra bízva)[1]:

$$v_x = \frac{gm}{Bq}\left(1-\cos\left(\frac{Bqt}{m}\right)\right) \text{ és } v_y = \frac{gm}{Bq}\sin\left(\frac{Bqt}{m}\right).$$

Ebből integrálással megkapjuk az út-idő függvény is:

$$s_y = -\frac{gm^2}{B^2q^2}\cos\left(\frac{Bqt}{m}\right) + C_1 \text{ és } s_x = \frac{gm}{Bq}\left(t - \sin\left(\frac{Bqt}{m}\right)\frac{m}{Bq}\right) + C_2.$$

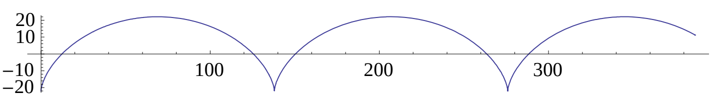
Behelyettesítve a paraméterekre, miszerint

$$Q = 0{,}5\cdot 10^{-5}C,\ m = 0{,}003\cdot 10^{-3}kg \text{ és } B = 0{,}4T,$$

$$s_y \approx -22{,}06m\cdot\cos(0{,}67Hz\cdot t) + C_1 \text{ és}$$

$$s_x \approx 14{,}71\frac{m}{s}(t - \sin(0{,}67Hz\cdot t)1{,}5s) + C_2.$$

Ábrázolva ezt (a kezdeti irányok függvényében, ahol a tengelyek mértékegységei m *és* $C_1 = C_2 = 0$) a $t\in[0{,}25s]$ -n:



(Ezzel megadtuk a c) részre a választ).

Kellemes kezdeti feltételekkel így a golyó legmélyebb pontja lehet akár a 0 magasságszint is. Így inkább határozzuk a golyó legfelső legalsó helyzeteinek magasságkülönbségét (így kiesik a konstans)! Triviális számítások után[2] kapjuk, hogy ezen $\Delta y_{\max}$ értékre: $\Delta y_{\max} = 2gm^2/(B^2q^2)$. Behelyettesítve a paraméterekre: $\Delta y_{\max} \approx 44{,}13m$.

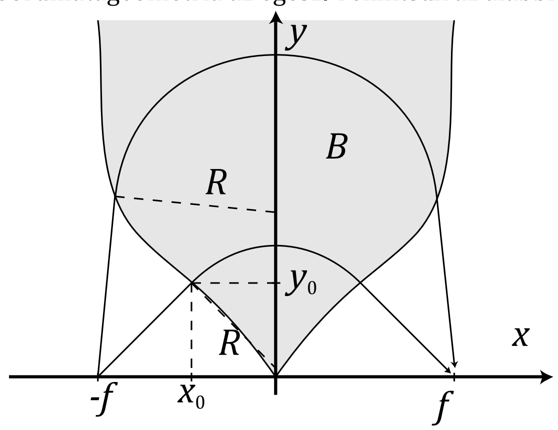
Vagyis a test ennyivel lesz lejjebb a legfölső ponthoz képest. (Ezzel megadtuk az a) részre a választ.)

A $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_y{}^2 + v_x{}^2}$ sebessége a kis golyónak maximális, ha jobb oldalon szereplő mennyiség maximális (határérték-számítási feladat[3]). Ugyanakkor, ha figyelembe vesszük, hogy a Lorentz erő nem végez munkát, csak a gravitációs, így tudhatjuk, hogy a golyó sebessége akkor maximális, mikor legmélyebben van. Sebességének nagyságát pedig megkaphatjuk a munkatételből[4]. Mindkét módszerből az jön ki, hogy $|\mathbf{v}|_{\max} = 2gm/Bq$, és a sebesség iránya vízszintes irányú.

Behelyettesítve a paraméterekkel, kapjuk, hogy: $|\mathbf{v}|_{\max} = 29{,}42m/s$. Ezzel megadtuk a b) részre is a választ.

Megjegyzem, hogy a görbe képe megegyezik (a megfelelő kezdeti feltételekkel) egy $r = \dfrac{gm^2}{B^2q^2} \approx 22{,}06m$ sugarú kör egy kerületi pontjának pályájának, ha az tisztán gördül.

2. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a töltés egyszer megy be a mágneses térbe, és egyszer lép ki onnan, ahonnan az útját folytatva épp a kívánt pontba megy. Innentől csak koordinátageometria az egész. Tekintsük az alábbi ábrát!



Feltüntettem 2 lehetséges útvonalat a töltésnek. A mágneses térben való haladáskor arra állandó nagyságú, a sebességére merőleges, $F = qvB$ erő hat, így egy $R = mv/(qB)$ sugarú köríven mozog. (Kell, hogy ha a töltés pozitív, akkor a mágneses indukcióvektor felénk, ha negatív, akkor tőlünk elfele mutasson az ábra szerinti elrendezésben) Szimmetria okok miatt a körív középpontja mindig az y tengelyen lesz. Legyen egy (x_0, y_0), ahol a töltés belép a mágneses térbe, és $y_0 = f(x_0)$! Ekkor a pillanatnyi sebességére merőleges lesz abban a pontban a görbületi sugár, melynek hosszát ismerjük. Feltétel tehát, hogy a beérkező töltés sebességvektorára rajzolt merőleges szakasz y tengellyel vett metszéspontjáig az R hosszúságú legyen. Használjuk a $-f = g$ jelölést! Illesszünk az $(g,0)$ és a $(x_0, f(x_0))$ pontokra egyenest! A hagyományos jelölések mellett $ag + b = 0$, ebből $b = -ag$, ebből visszahelyettesítve, a másik pontot is figyelembe véve: $ax_0 - ag = f(x_0)$, így $a = f(x_0)/(x_0 - g)$. Vagyis a keresett egyenes egyenlete: $y = f(x_0)(x-g)/(x_0-g)$. Most állítsunk erre merőlegest! $y_\perp = \dfrac{g - x_0}{f(x_0)}x + c$, ahol teljesülni kell, hogy egymást az $(x_0, f(x_0))$ pontban metszik, vagyis

$f(x_0) = \dfrac{g-x_0}{f(x_0)}x_0 + c$, ebből pedig $c = f(x_0) + \dfrac{x_0 - g}{f(x_0)}x_0$, tehát a keresett merőleges egyenes egyenlete:

$y_\perp = \frac{g-x_0}{f(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$. Számítsuk ki az *y* tengellyel alkotott metszéspontjukat! Ekkor $y_\perp(0)=x_0\frac{x_0-g}{f(x_0)}+f(x_0)$.

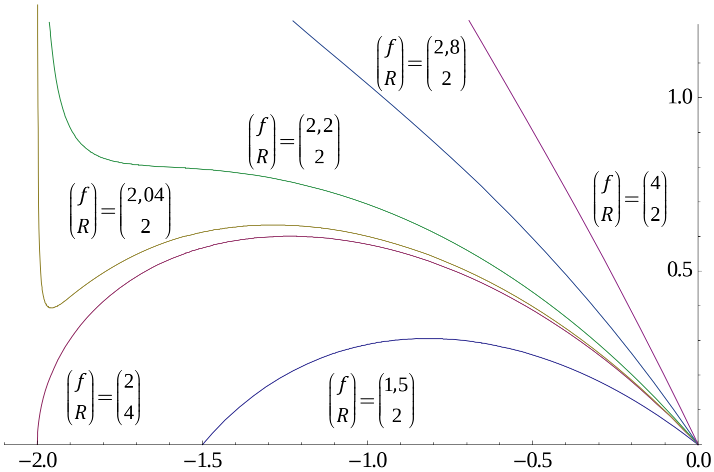
Most számítsuk ki a belépési pont és a most kiszámolt pont, vagyis a $(x_0, f(x_0))$ és a $(0, y_\perp(0))$ távolságát!

$r^2 = {x_0}^2 + \left(\frac{x_0-g}{f(x_0)}x_0\right)^2 := R^2$. Ebből kifejezve $f(x_0)$-t:

$f(x_0) = \pm x\frac{x-g}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\forall x\in(0,R)$. További fizikai meggondolások alapján (pl belépéskor a sebesség nem válthat előjelet) a keresett függvényünket az $y>0$ síkrészben a

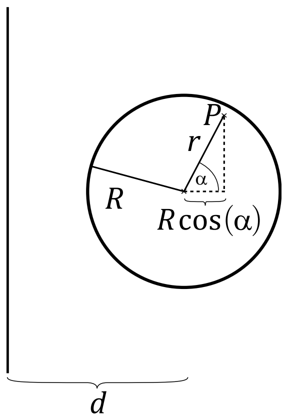
$$y(x)=\begin{cases} x\dfrac{x+f}{\sqrt{R^2-x^2}} & \text{ha x<0} \\ -x\dfrac{-x+f}{\sqrt{R^2-x^2}} & \text{ha x>0}\end{cases}$$

függvény $y>0$ része írja le. A függvény összetettnek látszik. Bonyolultságát *R* és *f* viszonya adja, valamint a számolás közben nélkülözhetetlen gyökvonás. Ennek a képhalmaza elég érdekes, ezért itt ábrázolom a fekső feltételt kielégítő esetet:



Láthatóan érdekes, kiemelt eset, mikor $f^2=R$ Ennél kisebb *f*-ekre már nem lőhetünk tetszőleges, pozitív meredekségű irányba.

3. Kétféleképp számolhatnánk a kölcsönös indukciós együtthatót, bizonyítandó hogy a két kölcsönös indukciós együttható ugyan az. Az egyszerűség kedvéért most csak az egyiket számolom ki. Tekintsük az ábrát! Mint ismert, a mágneses indukcióvektor nagysága egy tetszőleges *P* pontban $B=\frac{\mu I}{2\pi}\frac{1}{r}$



, ahol *r* a pont és egyenes távolsága. Paraméterezzük a körlap pontjait a kör középpontjától vett *r* távolsággal, és ezen *r* az ábrán meghatározott szögével! Számítsuk ki, hogy mennyi Φ fluxus megy át a végtelen hosszú egyenes által a körben!

$\Phi=\iint \mathbf{B}d\mathbf{A}$, mely jelen esetünkben

$\Phi=\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\mu I}{2\pi}\frac{1}{d+r\cos(\alpha)}rd\alpha\cdot dr$. Kiemelve a konstansokat, elvégezve a belső integrálást[5], kapjuk, hogy

$\Phi=\mu I\int_0^R\frac{r}{\sqrt{d^2-r^2}}dr$. Az újabb integrálást elvégezve[6],

$\Phi=\mu I\left(d-\sqrt{d^2-r^2}\right)$. Definíció szerint $M=\Phi/I$, így a kölcsönös indukciós együttható $M=\mu\left(d-\sqrt{d^2-r^2}\right)$.

4. Ezt a feladatot kétféleképpen fogom megoldani.

- Számolhatunk egyfajta eredő ellenállást az ismert $R=\rho l/A$ képlettel. Tételezzük fel, hogy az áram gömb szimmetrikusan terjed ki a bevezetési ponton! Ekkor a tőle *a* távolságban lévő pont és a $a\sqrt{2}$ távolságban lévő pontok között feszültségkülönbség lesz (mint ahogy az ellenállással rendelkező vezető két pontjában is, ha rajta áram folyik keresztül), melynek ΔU feszültségére $\Delta U = I\cdot R_{eredő}$ formula adott, így az eredő ellenállást kell kiszámolni. Az $R=\rho l/A$ egyenletet írjuk át a kívánt formára! Bontsuk fel a félgömböt kicsiny gömbhéjakra, hogy a keresztmetszete már állandó legyen! $dR=\rho dr/(2r^2\pi)$, ahol *dR* egy kicsiny félgömbhéj ellenállása,*dr* a vastagsága, és $2r^2\pi$ a felülete (keresztmetszete). Ebből az *a* és $a\sqrt{2}$ részek közötti effektív ellenállás:

$$R=\int_a^{a\sqrt{2}}dR=\int_a^{a\sqrt{2}}\rho/(2r^2\pi)\cdot dr=-\left[\rho/(2r\pi)\right]_a^{a\sqrt{2}}=\rho\frac{2-\sqrt{2}}{4\pi a}.$$

Ebből $\Delta U = I\rho\left(2-\sqrt{2}\right)/(4\pi a)$. Ekkora lesz a feszültség a két pont között a bemeneti áram miatt. A kimeneti áram még egyszer ennyi járulékot hoz (szuperpozíció elve). Így az össz, mért feszültségre $U=I\rho\left(2-\sqrt{2}\right)/(2\pi a)$, ebből

$\rho = 2aU\pi/\left(\left(2-\sqrt{2}\right)I\right)=aU\pi\left(2+\sqrt{2}\right)/I$.

- A differenciális Ohm törvény alapján a szokásos jelölések mellett $\mathbf{j}(\mathbf{r})=\mathbf{B}(\mathbf{r})/\rho$, ahol most $\mathbf{j}(\mathbf{r})=I\mathbf{r}/(2\pi r^3)$, feltélezve a gömbszimmetrikusságot (egyszerre csak az egyik áramot vizsgáljuk, aztán a szuperpozícióval összeadjuk őket). Így csak az egyik irányba vizsgálódva $E(r)=I\rho/(2\pi r^2)$. Ez előáll a $U=I\rho/(2\pi r)$ negatív gradienseként, tehát ez a potenciálfüggvény. (Még jó, hogy nem $r=0$ körül kell vizsgálódni.) Így a $r=a$ és $r=a\sqrt{2}$ pontok közötti feszültség

$$U=U_{I,be}+U_{I,ki}=\frac{I\rho}{2\pi a}\left(1-/\sqrt{2}+-1/\sqrt{2}--1\right)=I\rho\left(2-\sqrt{2}\right)/2\pi a$$

, vagyis a keresett ρ értékére $\rho=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\pi a U}{I}$.

Részszámítások

(Mert azért annyira mégsem vagyok nagyképű és okos, hogy a részszámításokat lehagyjam.)

1. Elsőből kifejezve v_y-t: $v_y = \frac{mdv_x}{qBdt}$, ezt visszaírva a 2. egyenletbe: $mg - qv_x B = \frac{m^2}{qB}\frac{d^2 v_x}{dt^2}$. Ez egy másodrendű differenciálegyenlet. Kicsit átalakítva:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + v_x \frac{B^2 q^2}{m^2} = \frac{qBg}{m}.$$

Használjuk a $d = \frac{qBg}{m}, c = \frac{B^2q^2}{m^2}, v_x = y, t = x$ rövidítést, így $\frac{d^2 y}{dx^2} + cy = d$. Keresem a megoldást $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3$ alakban, ahol λ kielégíti a $\lambda^2 + c = 0$ egyenletet. Ebből $\lambda_1 = -\sqrt{-c}, \lambda_2 = \sqrt{-c}$. C_3 triviálisan megkapható, így a megoldásunk most így néz ki: $y = C_1 e^{-\sqrt{-c}x} + C_2 e^{\sqrt{-c}x} + d/c$. Szeretném, ha teljesülnének a kezdeti feltételek, vagyis $y(0) = 0$ és $y'(0) = 0$. Az első feltételből: $0 = C_1 + C_2 + d/c$, a másodikból: $-C_1\sqrt{-c} + C_2\sqrt{-c} = 0$. A kettőből kapjuk, hogy $C_1 = C_2 = -d/2c$. Ezzel visszahelyettesítve *y*-ra, majd *i*-t kihozva: $y = -d/2c\left(e^{-i\sqrt{c}x} + e^{i\sqrt{c}x} - 2\right)$, most használva $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ definíciót:

$$y = -d/2c\left(\cos(\sqrt{c}x) + i\sin(-\sqrt{c}x) + \cos(\sqrt{c}x) + i\sin(\sqrt{c}x) - 2\right)$$

Egyszerűsítve kapjuk, hogy $y = -\frac{d}{2c}\left(\cos(\sqrt{c}x) - 1\right)$. Visszahelyettesítve a rövidítésekkel, egyszerűsítés után kapjuk, hogy $v_x = \frac{gm}{Bq}\left(1 - \cos\left(\frac{Bq}{m}t\right)\right)$.

A kezdeti első egyenletből $v_y = \frac{m}{qB}\frac{dv_x}{dt}$, így a deriválást elvégezve kapjuk fejben is, hogy $v_y = \frac{gm}{Bq}\sin\left(\frac{Bqt}{m}\right)$.

2. $s_{y,\min} = \min\left[-\frac{gm^2}{B^2q^2}\cos\left(\frac{Bqt}{m}\right) + C_1\right]_t$. Tudjuk, hogy a $\cos(x)$-re $\min[\cos(x)]_t = -1_{t=\pi}$.

$s_{y,\max} = \max\left[-\frac{gm^2}{B^2q^2}\cos\left(\frac{Bqt}{m}\right) + C_1\right]_t$, és hasonló ismeretek alapján $\max[\cos(x)]_t = 1_{t=0}$. Keressük a $\Delta y_{\max} = \left|s_{y,\max} - s_{y,\min}\right|$ értékét. Felhasználva, hogy a maximumfüggvény argumentumából a független változók kihozhatók:

$$\Delta y_{\max} = \frac{gm^2}{B^2q^2}\left|\max\left[\cos\left(\frac{Bqt}{m}\right)\right]_t + C_1 - \left(\min\left[\cos\left(\frac{Bqt}{m}\right)\right] + C_1\right)_t\right|$$

tehát $\Delta y_{\max} = \frac{gm^2}{B^2q^2}\left|-1-1\right| = 2\frac{gm^2}{B^2q^2}$.

3. A négyzetgyök függvény szigorú monotonitása miatt elegendő, ha csak a gyökjel alatti mennyiségnek van maximuma. Így vizsgáljuk a $\left(\frac{gm}{Bq}\sin\left(\frac{Bqt}{m}\right)\right)^2 + \left(\frac{gm}{Bq}\left(1 - \cos\left(\frac{Bqt}{m}\right)\right)\right)^2$ mennyiséget (*t*-nek függvényében). A független tényezőket eltávolítva, a négyzetre emelést elvégezve kapjuk, hogy ugyan ott van maximuma, ahol $\sin^2\left(\frac{Bqt}{m}\right) + 1 + \cos^2\left(\frac{Bqt}{m}\right) - 2\cos\left(\frac{Bqt}{m}\right)$.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság használata után azt látjuk, hogy ugyan ott van maxima az eredeti kifejezésnek, ahol $-\cos(Bqt/m)$-nek is, vagyis $t = \pi$-ben. Tehát a keresett $|\mathbf{v}|_{\max}$ értékére

$$|\mathbf{v}|_{\max} = \sqrt{\left(\frac{gm}{Bq}\sin\left(\frac{Bq\pi}{m}\right)\right)^2 + \left(\frac{gm}{Bq}\left(1 - \cos\left(\frac{Bq\pi}{m}\right)\right)\right)^2} = 2\frac{gm}{Bq}.$$

(Természetesen korábbi ismeretek nélkül is meg lehet kapni ugyan ezeket az értékeket, ha a függvény maximumát analízissel keressük meg.)

4. Használjuk a munkatétel alapján, hogy $mg\Delta h = 1/2 \cdot mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2g\Delta h}$. Behelyettesítve Δh-ra, hogy $\Delta h = \Delta y_{\max}$, kapjuk, hogy $|\mathbf{v}|_{\max} = \sqrt{2g2\frac{gm^2}{B^2q^2}} = 2\frac{gm}{Bq}$.

5. Kiszámítandó a $[Int] = \int_0^{2\pi}\frac{\mu I}{2\pi}\frac{1}{d + r\cos(\alpha)}d\alpha$ integrál.

Emeljünk ki $1/d$-t, majd vigyük a konstansokat az integrál elé: $[Int] = \frac{\mu Ir}{2\pi d}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1 + r\cos(\alpha)/d}d\alpha$. Ábrázolva az integrálandó függvényt, láthatjuk, hogy az mindenhol konvergens, folytonos, vagyis létezik primitív függvénye. Próbáljuk meg meghatározni ezt az *F*-t! Használjuk ehhez a $\tan(\alpha/2) = u$ helyettesítést! Alkalmazva a szögfüggvények azonosságait, $u^2 = \frac{2}{1 + \cos(\alpha)} - 1$, ebből $\cos(\alpha) = \frac{2}{u^2 + 1} - 1$. Kifejezve α-t, kapjuk, hogy $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{u^2 + 1} - 1\right)$. Így ebből

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{4u}{(1 + u^2)^2\sqrt{1 - \left(\frac{2}{1 + u^2} - 1\right)^2}} = \frac{2}{1 + u^2}.$$

Most helyettesítsünk vissza az integrálba, használjuk a $r/d = a$ rövidítést!

$F = \int\frac{1}{1 + a\left(2/(u^2 + 1) - 1\right)}\frac{2du}{1 + u^2} = \int\frac{2du}{1 + u^2(1 - a) + a}$. De jó volna, ha megfelelő c, e konstansokra $Int = 2e\int\frac{du}{1 + cu^2}$ fennállna, mert ekkor $F = 2e\left(\frac{\arctan(\sqrt{c}u)}{\sqrt{c}} + C\right)$. Ekkor teljesülnie kéne, hogy $1 + u^2(1 - a) + a = (1 + cu^2)/e$. Ebből következik, hogy $d - ea = c$ és $e + ea = 1$. Ezekből $e = 1/(1 + a)$ és $c = (1 - a)/(1 + a)$, vagyis felírható a kívánt alakban az integrál. Így

$F=\frac{2}{1+a}\arctan\left(u\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)/\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}=2\arctan\left(u\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)/\sqrt{1-a^2}$

Visszaírva az eredeti változóval:

$F=2\arctan\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)/\sqrt{1-a^2}$. Vegyük észre, hogy ez sajnos valójában nem a primitív függvénye a keresettnek, mert nem deriválható mindenhol. Ahol viszont deriválható, ott használható a Newton-Leibniz formula a határozott integrálhoz. Vagyis a keresett mennyiséget így írhatjuk fel: $[F]_0^{\pi}+[F]_{\pi}^{2\pi}=[F]_0^{\pi-\varepsilon}+[F]_{\pi+\varepsilon}^{2\pi}$. Ebből

$[F]_0^{\pi-\varepsilon}=\left[2\arctan\left(\tan(\alpha/2)\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)\right]_0^{\pi}/\sqrt{1-a^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ és

$[F]_{\pi+\varepsilon}^{2\pi}=\left[2\arctan\left(\tan(\alpha/2)\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)\right]_{\pi+\varepsilon}^{2\pi}/\sqrt{1-a^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ Így a keresett mennyiség $2\pi/\sqrt{1-a^2}$. Visszahelyettesítve a rövidítésekkel: $[Int]=\frac{\mu Ir}{2\pi d}\frac{2\pi}{\sqrt{1-r^2/d^2}}=\frac{\mu Ir}{\sqrt{d^2-r^2}}$

6. $\Phi=\mu I\int_0^R\frac{r}{\sqrt{d^2-r^2}}dr$. Az integrálandó függvény primitív függvényére: $\int\frac{r}{\sqrt{d^2-r^2}}dr=-\sqrt{d^2-r^2}$, így

$\Phi=\mu I\left[-\sqrt{d^2-r^2}\right]_0^R=\mu I\left(d-\sqrt{d^2-R^2}\right)$