2. Versenyfeladatsor megoldások

Tüzes Dániel, TUDPAAT

1. Feladat

Vegyünk fel egy koordináta-rendszert, ahol x irányban a, y irányban b és z irányban c a téglatest kiterjedése, és az tükörszimmetrikus az origóra, ahol a Q töltés is van! (Ekkor a feladatkitűzés jelölése szerint $x = c/2$.) Mérjük meg az $a \times b$ által meghatározott téglalapon áthaladó fluxust! A felület tetszőleges $P(x, y)$ pontjában a térerősség nagysága:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\frac{c^2}{4} + x^2 + y^2}$$

ebből a felületre merőleges komponens

$$E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\left(\frac{c^2}{4} + x^2 + y^2\right)^{3/2}} \frac{c}{2}$$

Felhasználva, hogy

$$\Psi = \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iint E_\perp \cdot dA,$$

mely jelen esetünkben

$$\Psi = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\left(\frac{c^2}{4} + x^2 + y^2\right)^{3/2}} \frac{c}{2} \cdot dx \cdot dy,$$

így megadhatjuk a keresett Ψ értékét. Elvégezve a belső integrálást, majd továbbá integrálással kapjuk, hogy

$$\Psi = \frac{cQa}{\pi\varepsilon} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{dy}{\left(c^2 + 4y^2\right)\sqrt{c^2 + a^2 + 4y^2}} = \frac{cQa}{\pi\varepsilon} \frac{1}{c} \frac{1}{2a} \left[\arctan \frac{y \cdot 2a}{c\sqrt{4y^2 + c^2 + a^2}}\right]_{-b/2}^{b/2}$$

Elvégezve a behelyettesítést, egyszerűbb alakra hozva kapjuk, hogy

$$\Psi = \frac{Q}{\pi\varepsilon} \arctan \frac{ba}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ahol $c = 2x$. Felírva a többi oldalra is, az együtthatókat kiemelve kapjuk, hogy

$$\sum \Psi = \frac{2Q}{\pi\varepsilon} \left(\arctan \frac{ab/c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \arctan \frac{ac/b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \arctan \frac{bc/a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

Az $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ összefüggés alapján $\arctan x + \arctan y + \arctan z = \arctan \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$, így

$$\sum \Psi = \frac{2Q}{\pi\varepsilon} \arctan \frac{\dots}{1 - \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}}$$

ahol a ... nem nulla érték. A nevező viszont annál inkább, márpedig $\arctan \infty = \frac{\pi}{2}$, így

$$\sum \Psi = \frac{2Q}{\pi\varepsilon} \frac{\pi}{2} = \frac{Q}{\varepsilon},$$

vagyis valóban teljesül Maxwell I. törvénye.

2. Feladat

A megoldás során felhasználjuk, hogy a rendszer a vizsgált tartományban ekvivalens azzal, mintha a a fémlapra tükrözve lenne egy másik, ellentétes előjelű q' töltés.

(a)

- Energia megmaradás alapján

  Az energia megmarad a folyamat során, mivel konzervatív erőkről van szó, így

  $$E_{mozg,q} + E_{pot,q} + E_{mozg,q'} + E_{pot,q'} = E'_{mozg,q} + E'_{pot,q} + E'_{mozg,q'} + E'_{pot,q'},$$

  mely jelen esetünkben

  $$2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q^2}{2\frac{d}{2}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q^2}{2d},$$

  ahol v a töltés sebessége a keresett pontban. Így ebből kifejezve v sebességet, annak nagyságára kapjuk, hogy

  $$v = \frac{q}{\sqrt{8m\pi\varepsilon d}},$$

  iránya pedig merőleges a fémlapra, és fémlap irányú.

- Analízissel

  A töltésre ható erő nagysága:

  $$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q^2}{(2d)^2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon} \frac{q^2}{d^2}$$

  a munkatétel alapján pedig

  $$E'_{mozg,q} - E_{mozg,q} = \Delta E_{mozg} = \int \mathbf{F} d\mathbf{s},$$

ebből pedig a behelyettesítés után, és $E_{mozg,q} = 0$ összefüggésből kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int\limits_0^{d/2} \frac{1}{8\pi\varepsilon}\frac{q^2}{(d-s)^2}ds = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{d-s}\right]_0^{d/2}.$$

Ismét elvégezve a behleyettesítést, majd v-t kifejezve kapjuk, hogy

$$v = \frac{q}{\sqrt{8m\pi\varepsilon d}}.$$

Ez megegyezik az első módszerben kapottal.

(b) • Analógiával

A ponttöltés által keltett mezőbe helyezett próbatöltésre ható erő nagysága fordítottan arányos a távolságuk négyzetével, hasonlóképp a gravitációs erőtörvénynél. A bolygómozgásra már jól kidolgozott egyenleteket ezzel a hasonlósággal felhasználhatjuk. Az ellipszispályán keringő bolygó keringési ideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}.$$

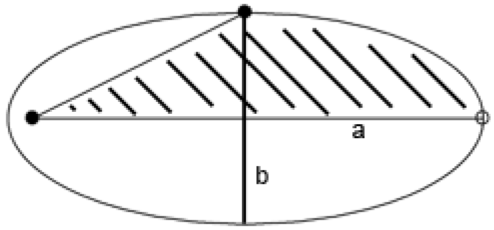
Bővítsük a gyök nevezőjét m-mel! Most vegyük észre, hogy a számlálóban megjelent az $F \cdot r^2$ szorzat. Az analógiát követve, az $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{r^2}$ egyenletből kifejezve $F \cdot r^2$ szorzatot, majd visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{q^2}}$$

Két, azonos abszolút értékű, de ellentétes előjelű töltésű és azonos tömegű töltés egymás elektromos mezejében úgy mozog, mintha a rögzített tömegközéppont körül keringenének, ahol a tömegkzéppont és a mozgó pontok töltése fele az eredetiének. Vagyis az egyenletben szereplő q a feladat kitűzése szerint használt q kétszerese. Továbbá jelen esetünkben $d = 2a$, vagyis a "'keringési időre"' kapjuk, hogy

$$T = 2\pi\sqrt{4\pi\varepsilon\frac{m\,(d/2)^3}{(q/2)^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon m d^3}{q^2}}.$$

Most számítsuk ki, hogy a teljes periódusidő hanyad részét igényli, hogy a töltés d-ről eljusson $d/2$-re! Megint az analógiával élek. Kepler II szerint a területi sebesség állandó.



Tudjuk a teljes ellipszis területét, hisz az $ab\pi$, a keresett terület pedig a besatírozott rész. A területi sebesség állandósága miatt a satírozott terület úgy aránylik az ellipszis területéhez, mint a keresett idő a keringési időhöz. A satírozott terület jobb oldalának nagysága $ab\pi/4$. Mind inkább elnyújtottabb az ellipszis, annál inkább igaz, hogy a satírozott terület bal oldalának nagysága $ab/2$, határhelyzetben pedig egzaktul igaz. Vagyis

$$\frac{T_{satirozott}}{T_{ellipszis}} = \frac{ab\pi/4 + ab/2}{ab\pi} = \frac{\pi+2}{4\pi},$$

így a keresett időre

$$T\left(d \to d/2\right) = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon m d^3}{q^2}}\frac{\pi+2}{4\pi} = \frac{\pi+2}{2}\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon m d^3}{q^2}}.$$

- Analízissel
  Tudjuk, hogy az energia megmarad, vagyis

$$2\cdot\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{2r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{2d},$$

ahol r a fémlaptól való távolság. A sebesség $\dot{r} = v$ definíciójából láthatóan egy elsőfokú, szétválasztható változójú differenciálegyenlethez jutunk:

$$m\dot{r}^2 + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\right) = 0$$

Innen a keresett T értékre:

$$\int_{d/2}^{d}\sqrt{\frac{r}{d-r}}dr = \int_{T(d/2)}^{T(d)}\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon m d}}dt,$$

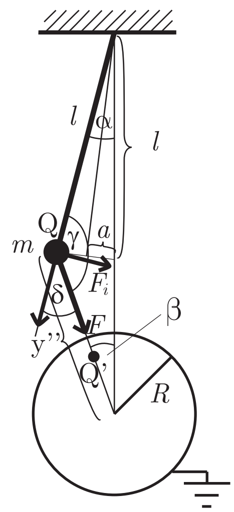
vagyis a

$$\frac{d}{4}\left(2+\pi\right) = \frac{qT}{\sqrt{\pi\varepsilon m d 8}}$$

egyenletből kapjuk, hogy

$$T\left(d \to d/2\right) = \frac{\pi+2}{2}\sqrt{\frac{2md^3\pi\varepsilon}{q^2}}$$

3. Feladat



Tekintsük az ábrát, ahol α a kitérés szöge, a a fél kitérés, Q' az inverziós töltés, y" a Q töltés távolsága a gömb középpontjától, F a Q töltésre ható erő nagysága, F_i ennek a fonálra merőleges komponense, y' pedig Q'-nek a gömb felszínétől vett távolsága. Az órán már kiszámoltak szerint $Q' = -\frac{y'}{R}Q$ és $\frac{y'}{R} = \frac{R}{y}$, ebből $Q' = -\frac{R}{R+d}Q$, és a két töltés távolsága pedig $R + d - \frac{R^2}{d+R}$. Most határozzuk meg F-t, majd annak F_i komponensét! Kezdetben, $\alpha = 0$ kitérésnél

$$F_{\alpha=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{RQ^2}{(R+d)\left(R+D-\frac{R^2}{d+R}\right)^2}.$$

- Matematikus precizitással
  Az y", $2a$ és $d+R$ által határolt háromszögre a cosinus tétel alapján

  $$y\text{"} = 4a^2 + b^2 - 4ab\cos\left(\alpha/2 - 90°\right),$$

  továbbá felhasználva, hogy $\sin\alpha/2 = a/l$, kapjuk y"-ra, hogy:

  $$y\text{"} = \sqrt{4l\sin^2\alpha/2\cdot(l-d-r)+(d+R)^2}.$$

  Ebből már kifejezhetjük F-t (a 0 kitéréshez megadott erő értékébe helyettesítsünk be d-re $y\text{"} - R$-rel!), egyszerűsítve:

  $$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{RQ}{y\text{"}}\frac{Q}{\left(y\text{"}-\frac{R^2}{y\text{"}}\right)^2}.$$

Az l, $l+d+R$ és y" által határolt háromszögre a sinus tétel alapján

$$\frac{\sin\alpha}{y"} = \frac{\sin\gamma}{l+d+R}.$$

Ezekből

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{l+b}{y"}\sin\alpha\right).$$

Ezekből már kifejezhetjük F_i erő nagyságát: $F_i = F\sin\delta$, ahol $\delta = 180° - \gamma$, így egybevetve, visszhelyettesítve F-re:

$$F_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{RQ}{y"^2}\frac{Q}{\left(y" - \frac{R^2}{y"}\right)^2}\sin\alpha\,(l+d+R).$$

Helyettesítsünk vissza y"-re, majd $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{l}$-vel, keressük az $F_i(a)$ függvény Taylor-polinomját 0 körül, az 1. rendű tagig, erre kapjuk, hogy

$$F_i \approx \frac{(l+d+R)\,Q^2R}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\left((d+R)^2 - R^2\right)^2 l}2a.$$

Vagyis a frekvencia:

$$f = \sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon m}\frac{R\,(l+d+R)}{\left((d+R)^2 - R^2\right)^2 l}} = \sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon m}\frac{R\,(l+d+R)}{d^2\,(d+2R)^2\,l}}.$$

- Fizikus lazasággal
  Mint azt már a hagyományos ingánál megtapasztaltuk, az ingó test elsőrendben vízszintesen ing. Ezt itt is kihasználva azt kapjuk, hogy a töltésre ható erő szintén hasonló módon, elsőrendben állandó. Az erőt megvizsgálva láthatjuk, hogy az más irányú, ha az inga kitér, ezt vizsgáljuk meg! Most legyen (a közelítéseket figyelembe véve) $x = 2a$, ahol x a kitérése az ingának vízszintesen. Ekkor $\sin\alpha = x/l$ és $\tan\beta = \frac{x}{d+R}$, tehát $\delta = \alpha + \beta$. Az erő merőleges komponensének nagysága tehát $F_i = F\sin(\alpha+\beta)$. Legyen a kitérés (és így szöge is) nagyon kicsi! Vegyük észre, hogy β szög kisebb α szögnél, vagyis az is kicsi, így $\tan\beta = \beta = \frac{l\sin\alpha}{d+R} = \frac{l\alpha}{d+R}$, ebből pedig

  $$F_i = F\sin(\alpha+\beta) = F(\alpha+\beta) = F\alpha\frac{l+d+R}{d+R}.$$

  Folytassuk az analógiát!

  $$F_{grav,\perp} = mg\alpha \Rightarrow f_{grav} = \sqrt{\frac{mg}{ml}} = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Jelen esetben pedig felírva az erőt, majd frekvecnitá kifejezve, egyszerűsítve:

$$F_{eketr.\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{RQ^2}{(R+d)\left(R+D-\frac{R^2}{d+R}\right)^2}\frac{l+d+R}{d+R}\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f = \sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon m}\frac{R\,(l+d+R)}{d^2\,(d+2R)^2\,l}}$$

4. Feladat
Vegyük körbe az egész rendszert egy zárt felülettel! Erre a $\oint \mathbf{E}d\mathbf{A} = 0$, mert belül az össztöltés 0. Most vegyünk egy másik térfogatdarabra az integrált: vegyünk egy olyan kicsi, $a \times b \times c$ téglalapot, mely tartalmazza magában az 1.-es kicsiny darabját. Ekkor a megfelelő adatok felvétele mellett csak az egyik $a \times b$ lapján lesz térerősség a téglatestnek, és az merőleges lesz a felületre, így

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{A} = E \cdot ab = \frac{Q_b}{\varepsilon},$$

ahol Q_b a térfogatban lévő töltés. (Az előjeleket a legtöbb helyen lehagytam, de fizikai meggondolások alapján mindenhol könnyen újra kitehetők.) Ebből

$$E = \frac{Q_b/ab}{\varepsilon} = \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

A 3-as fegyerzetet ekvipotenciális felület fogja közre, így abból a fluxus minden irányba egyenletesen "'megy ki"'. Egy ugyan olyan állású, $a \times b \times c$ tégalappal közrefogva ezen kicsi részét, így kapjuk, hogy:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{A} = E \cdot 2ab = \frac{Q_b}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{\eta}{2\varepsilon}.$$

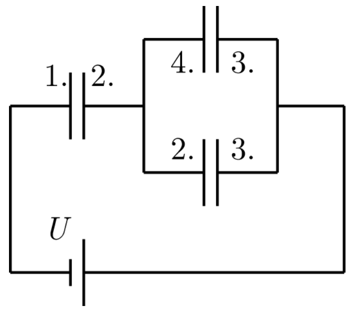
Az 1-es és 2-es fegyverzet közötti U feszéltségre tudjuk, hogy

$$U = \int_{1.}^{3.} E_{pill}dx,$$

ahol x-szel vízszintesen mozgunk. Az integrálást szétbontva kapjuk, hogy

$$U = \int_{1.}^{2.} \frac{\eta}{\varepsilon}dx + \int_{2.}^{3.} \frac{\eta}{2\varepsilon}dx = \frac{3}{2}\frac{\eta}{\varepsilon}d \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\eta \cdot A}{\frac{3}{2}\frac{\eta}{\varepsilon}d} = \frac{2}{3}\frac{A\varepsilon}{d}.$$

A 3-as lemezt gondolatban "szétbonta"' 2 fegyverzetté (fele töltéssel), a 4-es fegyverzetet feljebb víve és elforgatva kapom a következő kapcsolást:



Kiszámolva ennek a kapcitását, megkapjuk a $C_{er} = 2C/3$ értéket, ahol C a d távolságú, A felületű fegyverzettel rendelkező síkkondenzátor kapacitása. Most vizsgáljuk meg az erőket! Mivel 3-as lemezt ekvipotenciális felülettel vettem körül, triviálsi, hogy rá 0 erő hat. Az 1-es 2-es fegverzet között $E = \frac{\eta}{\varepsilon}$ térerősség van. korábbi ismereteinkből tudjuk, hogy ennek felét az 1-es fegyverzet adja, vagyis a rá ható erő nagysága:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= Q_1 \cdot E_{1\text{esre}} = \eta A \frac{\eta}{2\varepsilon} \\ C &= \frac{Q}{U} = \frac{2}{3}\frac{A\varepsilon}{d} \Rightarrow \frac{Q}{A} = \frac{2}{3}\frac{U\varepsilon}{d} \end{aligned}\right\} F_1 = \frac{2}{9}\frac{U^2}{d^2}\varepsilon A,$$

iránya pedig a többi kondenzátor felé mutat. Most vegyük a 4-es fegyverzetet! Vegyük azt körbe egészen egy zárt felülettel! Láthatjuk, hogy azon feleannyi fluxus "'megy be"', mint amennyi jön ki a 3-as fegyverzeten, vagyis a rajta lévő felületi töltéssűrűéség $\eta/2$. Korábban már kiszámoltuk, hogy a 3-as és 4-es fegyverzet között a térerősség nagysága $\frac{\eta}{2\varepsilon}$, ebből $\frac{\eta/2}{2\varepsilon}$ származik a 4-es fegverzettől, vagyis a rá ható erő nagysága :

$$F_4 = Q_4 E_{4\text{esre}} = \frac{\eta}{2} A \frac{\eta/2}{2\varepsilon} \Rightarrow F_4 = \frac{1}{18}\frac{U^2}{d^2}\varepsilon A,$$

iránya pedig a többi kondenzátor felé mutat. Erre a rendszerre is teljesülnek a Newton törvények, melyekből következik, hogy zárt rendszerben az erők összege 0. Vagyis a 2-es kondenzátorra ható erőt ezekből könnyedén megkaphatjuk. Tehát a 2-es fegyverzetre ható erő nagysága

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_2 \Rightarrow F_2 = \frac{3}{18}\frac{U^2}{d^2}\varepsilon A,$$

és iránya 1-es fegyverzet irányú.