Elektromágnesség 2.versenyfeladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:

   Nekünk, most a Q töltés $\mathbf{E(r)}$ elektromos terének(Ez egy vektortér) kell a $\int_F \mathbf{E}\, d\mathbf{A}$ felületi integrálját kiszámítanunk, egy F felületre. most egy $a \times b$ téglalapra. ez az integrál definíció szerint az F felületen áthaladó elektromos fluxust adja meg. Ezt a következőképpen kell kiszámítani: Ha a

   $\mathbf{E} : \mathbf{r} \to \mathbf{E(r)}, \quad \mathbf{r} \in D \subset R^3$

   folytonos, és az F folytonosan differenciálható, mérhető korlátos irányítható felület egy $\mathbf{r}(u, v)$ paraméterezése:

   $F = \{\mathbf{r} \,|\, \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v),\, (u, v) \in T\}$

   Akkor:

$$\int_F \mathbf{E}\, d\mathbf{A} = \int \int_T \mathbf{E}(\mathbf{r}(u, v))(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\, du\, dv$$

   Most nézzük a mi esetünket.Tegyük a Q töltést az origóba.

   Ekkor az $\mathbf{E(r)}$ függvény (Most csak a függvény kapcsolatot adom meg most):

   $\mathbf{E} : \mathbf{r} \to \dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}^3}$

   Most paraméterezzük a téglalapot. Vegyünk, fel egy ortonormált bázist, amelynek három egységvektora rendre $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Legyen a téglalap síkjára merőleges, a középpontja felé mutató egységvektor $\mathbf{k}$. Legyen az a oldallal párhuzamos a $\mathbf{j}$ és a b oldallal párhuzamos az $\mathbf{i}$ vektor. A feladat szerint a téglalap középpontja x távolságra van a Q töltéstől, így a középpontjába mutató vektor : $x \cdot \mathbf{k}$. Így a téglalap síkja így adható meg:

$$\mathbf{r} = \frac{b}{2}u \cdot \mathbf{i} + \frac{a}{2}v \cdot \mathbf{j} + x \cdot \mathbf{k}$$

   Na de a téglalapnak vannak 'határai' így kell u és v csak bizonyos értékeket vehetnek fel. Az $\mathbf{i}$ vektor abszolútértéke nem lehet nagyobb $\frac{b}{2}$-nél, és hasonlóan a $\mathbf{j}$ vektor abszolút értéke nem lehet nagyobb $\frac{a}{2}$-nél. Ez a következő megszorítást adja (u, v)-re:

$$-1 \leq u \leq 1 \quad , -1 \leq v \leq 1$$

   Ezekkel:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(u, v)) = \frac{\frac{b}{2}u \cdot \mathbf{i} + \frac{a}{2}v \cdot \mathbf{j} + x \cdot \mathbf{k}}{\left(\frac{b^2}{4}u^2 + \frac{a^2}{4}v^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

   az $\mathbf{r}$ vektor szükséges parciális deriváltjai:

$$r'_u = \frac{b}{2} \cdot \mathbf{i} \quad r'_v = \frac{a}{2} \cdot \mathbf{j}$$

Az integrandus ezek vegyes szorzata. Azaz:

$$(\mathbf{E}(\mathbf{r}(u,v)),\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v) = \frac{1}{\left(\frac{b^2}{4}u^2+\frac{a^2}{4}v^2+x^2\right)^{3/2}}\begin{vmatrix} \frac{b}{2}u & \frac{a}{2}v & x \\ \frac{b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{abx}{4}\frac{1}{\left(\frac{b^2}{4}u^2+\frac{a^2}{4}v^2+x^2\right)^{3/2}}$$

Tehát az általunk kiszámítandó integrál, ami megadja az $a\times b$ téglalapon átmenő elektromos fluxust:

$$\Psi_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{abx}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(\frac{b^2}{4}u^2+\frac{a^2}{4}v^2+x^2\right)^{3/2}}du\,dv$$

Egy kicsit alakítsuk át az integrált:

$$\Psi_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ax}{b^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(u^2+\frac{a^2}{b^2}v^2+\frac{4x^2}{b^2}\right)^{3/2}}du\,dv$$

Most már könnyen elvégezhetjük az u szerinti integrálást(egyből a határokat is beírva):

$$\Psi_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4ax}{b^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2}v^2+\frac{4x^2}{b^2}\right)\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}v^2+\frac{4x^2}{b^2}}}dv$$

Ismét átrendezve egy kicsit:

$$\Psi_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4bx}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(v^2+\frac{4x^2}{a^2}\right)\sqrt{v^2+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}}}dv$$

Ez az integrál már egy kicsit trükkösebb. Egy ilyen típúsú integrált kell kiszámítanunk(itt most x csak egy másik változó, nem a távolság):

$$\int\frac{1}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+p^2}}dx$$

Használjuk a következő helyettesítést. Legyen $\frac{x}{p} = \operatorname{sh} t$. Ekkor :$dx = p\cdot\operatorname{ch} t\ dt$. A hiperbolikus függvényekre ismert a $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ összefüggés. Tehát az integrál:

$$\frac{1}{pk^2}\int\frac{1}{\left(\frac{x^2}{k^2}+1\right)\underbrace{\sqrt{\frac{x^2}{p^2}+1}}_{\operatorname{ch} t}}dx = \frac{1}{pk^2}\int\frac{p\cdot\operatorname{ch} t}{\left(\frac{p^2}{k^2}\operatorname{sh}^2 t+1\right)\operatorname{ch} t}dt = \frac{1}{k^2}\int\frac{1}{\frac{p^2}{k^2}\operatorname{sh}^2 t+1}dt$$

Most trükközünk, egy kicsit. Írjuk át az 1-t a $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ összefüggéssel:

$$\frac{1}{k^2}\int \frac{1}{\frac{p^2}{k^2}\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}dt = \frac{1}{k^2}\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t\left(\frac{p^2}{k^2}\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} - \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} + 1\right)}dt =$$

$$= \frac{1}{k^2}\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t\left(\left(\frac{p^2}{k^2} - 1\right)\operatorname{th}^2 t + 1\right)}dt$$

Most legyen $y = \operatorname{th} t\sqrt{\frac{p^2}{k^2} - 1}$. ekkor $dt = \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\sqrt{\frac{p^2}{k^2} - 1}}dy$.

így az integrál:

$$\frac{1}{k^2\sqrt{\frac{p^2}{k^2} - 1}}\int \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t\left(\left(\frac{p^2}{k^2} - 1\right)\operatorname{th}^2 t + 1\right)}dy = \frac{1}{k\sqrt{p^2 - k^2}}\int \frac{1}{y^2 + 1}dy$$

Ezt pedig már egy alap integrál, tehát könnyen megadhatjuk:

$$\frac{1}{k\sqrt{p^2 - k^2}}\int \frac{1}{y^2 + 1}dy = \frac{1}{k\sqrt{p^2 - k^2}}\operatorname{arctg} y + C$$

Visszatérve az eredeti x változóra.

Felhasználjuk, hogy: $\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}}$:

$$\frac{1}{k\sqrt{p^2 - k^2}}\operatorname{arctg} y = \frac{1}{k\sqrt{p^2 - k^2}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th} t\sqrt{\frac{p^2}{k^2} - 1}\right) = \frac{1}{k\sqrt{p^2 - k^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{p^2 - k^2}}{k}\frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}}\right)$$

$$= \frac{1}{k\sqrt{p^2 - k^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{p^2 - k^2}}{k}\frac{\frac{x}{p}}{\sqrt{\frac{x^2}{p^2} + 1}}\right) = \frac{1}{k\sqrt{p^2 - k^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{p^2 - k^2}}{k}\frac{x}{\sqrt{x^2 + p^2}}\right)$$

Tehát az integrálunk:

$$\int \frac{1}{(x^2 + k^2)\sqrt{x^2 + p^2}}dx = \frac{1}{k\sqrt{p^2 - k^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{p^2 - k^2}}{k}\frac{x}{\sqrt{x^2 + p^2}}\right) + C$$

Most visszatérve az eredeti feladatra(x most már a távolság, nem változó):

A mi esetünkben a változó a v az állandók pedig: $k = \frac{2x}{a}$ és $p = \sqrt{\frac{4x^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}}$

Tehát:

$$\Psi_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4bx}{a^2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(v^2 + \frac{4x^2}{a^2}\right)\sqrt{v^2 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}}}dv = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4bx}{a^2}\frac{1}{\frac{2x}{a}\frac{b}{a}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{b}{a}}{\frac{2x}{a}}\frac{v}{\sqrt{v^2 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}}}\right)\right]_{-1}^{1}$$

A műveleteket elvégezve, a következőt kapjuk:

$$\Psi_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} 4 \,\mathrm{arctg}\left(\frac{b}{2x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}}}\right)$$

Ezt átalakítva egy kicsit, az $a \times b$ téglalapon átmenő fluxus:

$$\Psi_{ab} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0} \mathrm{arctg}\left(\frac{ab}{2x\sqrt{a^2+b^2+4x^2}}\right)$$

Ez alapján kitudjuk, számolni az $a \times b \times c$ téglatest középpontjába tett Q töltésnek a téglatest teljes felületére vett fluxusát.

A téglatestnek összesen 6 oldala van. 2 $a \times b$, 2 $b \times c$ és 2 $a \times c$.

Tehát a teljes fluxus:

$$\Psi = 2 \cdot (\Psi_{ab} + \Psi_{bc} + \Psi_{ac})$$

Az $a \times b$ oldalra kiszámolt fluxus képletében, most az x éppen a $\frac{c}{2}$ mivel a Q töltés a téglatest középpontjában van. Hasonlóan $b \times c$-nél az x éppen $\frac{a}{2}$ és $a \times c$-nél, $\frac{b}{2}$.

Ezeket a képletbe helyettesítve a teljes fluxus:

$$\Psi = \frac{2Q}{\pi\varepsilon_0}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{bc}{a\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{ac}{b\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)\right]$$

Ezt tovább tudjuk alakítani, az arctg függvény összeadási szabályát használva. Ismert a tg függvény addíciós képlete:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$$

Legyen: $u = \mathrm{tg}\,\alpha$ és $v = \mathrm{tg}\,\beta$. Ekkor a fenti képlet:

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,u + \mathrm{arctg}\,v) = \frac{u+v}{1-u\cdot v}$$

Ahonnan:

$$\mathrm{arctg}\,u + \mathrm{arctg}\,v = \mathrm{arctg}\left(\frac{u+v}{1-u\cdot v}\right)$$

Most ha van még egy tag, akkor az összeg:

$$\mathrm{arctg}\,u + \mathrm{arctg}\,v + \mathrm{arctg}\,w = \mathrm{arctg}\left(\frac{u+v}{1-u\cdot v}\right) + \mathrm{arctg}\,w = \mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{u+v}{1-u\cdot v}+w}{1-\frac{u+v}{1-u\cdot v}\cdot w}\right)$$

Rendezve a következőt kapjuk:

$$\mathrm{arctg}\,u + \mathrm{arctg}\,v + \mathrm{arctg}\,w = \mathrm{arctg}\left(\frac{u+v+w-uvw}{1-(uv+vw+uw)}\right)$$

A mi esetünkben, $u = \dfrac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $v = \dfrac{bc}{a\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ és $w = \dfrac{ac}{b\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
Nézzük, meg az $uv + vw + uw$ összeg eredményét ezekre:

$$uv + vw + uw = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$$

Vagyis,Láthatjuk hogy ebben az esetben $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{u+v+w-uvw}{1-(uv+vw+uw)}\right)$ argumentuma $\to \infty$. és ismert, hogy, $\lim\limits_{t\to\infty}(\operatorname{arctg} t) = \dfrac{\pi}{2}$.
Tehát ezek alapján:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{bc}{a\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{ac}{b\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ezt visszaírva a Teljes fluxus képletbe:

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Tehát láthatóan teljesül Maxwell I. törvénye.

2. Feladat:

A feladat megoldásában a tükörtöltések módszerét fogjuk használni. A nagy kiterjedésű földelt vezető síklap, 'helyettesíthető' egy virtuális $-q$ töltéssel, amely ugyanolyan d távolságra van a síklaptól mint a q csak annak a 'szemközti' oldalától számítva. Ennek bizonyítását vettük a gyakorlaton, így most nem írom le. Legyen a q töltés pillanatnyi távolsága a síklaptól r. Ekkor a fentiek alapján úgy írhatjuk, le a mozgását, mintha a $-q$ töltés vonzaná őt. Nyílván a virtuális töltés helye is időről időre változik, hiszen mindig ugyanolyan távolságra lesz a síklaptól mint maga a q töltés. Tehát a q és tükörtöltésének pillanatnyi 'távolsága' $2r$.

(a) a mozgásegyenlete a q töltésnek:

$$m\ddot{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2r)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Nekünk, most csak a sebesség-hely azaz a $v(r)$ kell. Ezért írjuk át $\ddot{r}$ -t az alábbi módon:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r} = \frac{v\,dv}{dr}$$

Azaz a mozgásegyenlet:

$$v\,dv = -\frac{q^2}{16m\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr$$

Integrálva mindkét oldalt:

$$\int_0^v v\,dv = -\frac{q^2}{16m\pi\varepsilon_0}\int_d^r \frac{1}{r^2}dr$$

Elvégezve az integrálást a következőt kapjuk a $v(r)$ sebesség-hely függvényre:

$$v(r) = \sqrt{\frac{q^2}{8m\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right)}$$

A feladat szerint nekünk az $r = \frac{d}{2}$ helyen kell a sebesség. Ez pedig a fenti képlet alapján:

$$v(d/2) = \sqrt{\frac{q^2}{8md\pi\varepsilon_0}}$$

A $v(r)$ függvényt másképp is megkaphatjuk. Használjuk ki, hogy teljesül most az energiamegmaradás. Azaz:

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2d} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2r} + 2\cdot\frac{1}{2}mv^2$$

A mozgási energiát, azért kell megszoroznunk kettővel, mert mi csak a virtuális és igazi töltés kölcsönhatását írtuk le, tehát az igazi töltés is vonzza a virtuális töltést, és így annak is lesz sebessége, és így mozgási energiája.

A fenti energiaegyenletből, a következőt kapjuk a sebességre:

$$v(r) = \sqrt{\frac{q^2}{8m\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right)}$$

Ez pont ugyanaz mint amit az előző módszerrel kaptunk.

(b) Most az $t(r)$ függvényt kell meghatároznunk. Láthatóan a mozgásegyenlet megoldása nem túl egyszerű, ezért próbáljuk másképp meghatározni. Mint az (a) részben már felhasználtuk, hogy az energia megmarad most is használjuk ezt ki.
Azaz az energiamegmaradás:

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2d} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2r} + 2\cdot\frac{1}{2}m(\dot{r})^2$$

Átrendezve(a félreértés elkerülése végett, a következő pár lépésben a d távolságot l-lel fogom jelölni.):

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{q^2}{8m\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)}$$

Azért van a baloldalnak negatív előjele, mert r csökkenésével nő a sebesség.
Ez nem más mint egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Szétválasztva a változókat, és kicsit rendezve a következőt kapjuk:

$$\sqrt{\frac{r}{l-r}}\,dr = -\sqrt{\frac{q^2}{8ml\pi\varepsilon_0}}\,dt$$

Integrálva mindkét oldalt:

$$\int_l^r \sqrt{\frac{r}{l-r}}\,dr = -\sqrt{\frac{q^2}{8ml\pi\varepsilon_0}}\int_0^t dt$$

Azaz:

$$t = -\sqrt{\frac{8ml\pi\varepsilon_0}{q^2}}\int_l^r \sqrt{\frac{r}{l-r}}\,dr$$

Tehát most a következő típúsú integrált kell kiszámítanunk:

$$\int \sqrt{\frac{x}{p-x}}\,dx$$

Használjuk a következő helyettesítést. legyen: $\dfrac{x}{p} = \sin^2 y$. (Ezt most megtehetjük, hiszen $x \geq 0$ és $p > 0$). Ekkor: $dx = 2p\sin y\cos y\,dy$
Ezt beírva a fenti integrálba:

$$\int \sqrt{\frac{x}{p-x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{\frac{p\sin^2 y}{1-\sin^2 y}}2p\sin y\cos y\,dy = 2p\int \sin^2 y\,dy$$

És ezt az integrálást már könnyen elvégezhetjük:

$$2p\int \sin^2 y\,dy = 2p\int \frac{1-\cos 2y}{2}\,dy = 2p\left(\frac{y}{2}-\frac{\sin 2y}{4}\right)+C$$

Visszatérve az eredeti változókra, az integrálunk:

$$\int \sqrt{\frac{x}{p-x}}\,dx = p\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{p}} - \sqrt{\frac{x}{p}\left(1-\frac{x}{p}\right)}\right)+C$$

Visszatérve a feladat eredeti jelöléseire: $x = r$ és $p = l$, Az időre ezt kapjuk:

$$t = -\sqrt{\frac{8ml\pi\varepsilon_0}{q^2}} \int_l^r \sqrt{\frac{r}{l-r}}\, dr = t = -\sqrt{\frac{8ml\pi\varepsilon_0}{q^2}} \left[l \left(\arcsin\sqrt{\frac{r}{l}} - \sqrt{\frac{r}{l}\left(1-\frac{r}{l}\right)} \right) \right]_l^r$$

Innen a behelyettesítés után (most már vissza térünk a feladat eredeti jelöléséhez azaz $l = d$)

$$t(r) = \sqrt{\frac{8md^3\pi\varepsilon_0}{q^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{r}{d}} + \sqrt{\frac{r}{d}\left(1-\frac{r}{d}\right)} \right]$$

A feladat szerint nekünk, csak a $t(d/2) = T$ idő kell, azaz mennyi idő alatt jutott a kezdeti helyétől $\frac{d}{2}$-ig. Ez a fenti képlet alapján:

$$T = \frac{\pi+2}{2} \sqrt{\frac{2md^3\pi\varepsilon_0}{q^2}}$$

Láthatóan a fenti megoldás nagyon 'brute-force'-os. De hát mi művelt fizikusok vagyunk, és tudunk ennél 'szebbet' is mutatni.
Amikor ránézünk a mozgásegyenletre, az nagyon hasonlít (nem véletlenül..) a gravitációs erőtérben való mozgás egyenletéhez, sőt az ugyanolyan $\frac{1}{r^2}$-es. Azt tudjuk, hogy gravitációs erőtérben a testek kúpszelet pályán mozognak. A mi esetünkben is tekinthetjük, úgy mintha a q töltés kúpszelet pályán mozogna, méghozzá egy nagyon elfajult ellipszisen(azaz egyenesen). Ennek az ellipszisnek a fókusza éppen a síklapon van, ott ahol a töltés pályája azt metszi. Az ellipszis félnagytengelye éppen $a = \frac{d}{2}$ és félkistengelye legyen b erről tudjuk, hogy $b \to 0$.
Az az idő ami alatt a töltés elérne a síklaphoz, éppen az elfajult ellipszisen való mozgás T_f félperiódusideje lenne. Kepler III. törvénye alapján a teljes periódus időt ki is számolhatjuk. A gravitációs mozgás esetén a t_g periódus idő:

$$t_g = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma(m_1+m_2)}}$$

A mi esetünkben $\gamma(m_1 + m_2)$ megfelel $\frac{q^2}{16m\pi\varepsilon_0}$-nek,és a megfelel $\frac{d}{2}$-nek. tehát a félperiódus idő:

$$T_f = \pi \sqrt{\frac{d^3}{8} \frac{16m\pi\varepsilon_0}{q^2}} = \pi \sqrt{\frac{2md^3\pi\varepsilon_0}{q^2}}$$

Láthatóan(természetesen), hogyha az előző számolás során kapott $t(r)$ összefüggésben a megfelelő $r = 0$-t írjuk, akkor ugyanezt visszakapjuk.
Azonban ismerjük, még Kepler II. törvényét is. Azaz a rádiuszvektor egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol (a rádiuszvektor itt most éppen a síklaptól azaz a fókuszból a q töltés pillanatnyi helyzetéhez irányuló vektor).
Ismerjük az ellipszis területét: $ab\pi$, és a félperiódus alatt éppen az ellipszis területének a felét súrolja a rádiuszvektor, azaz $\frac{ab\pi}{2}$-t.
Nekünk az kell, hogy mekkora T idő alatt jut el a töltés $\frac{d}{2}$-ig. Eddig a rádiuszvektor egy $\frac{ab\pi}{4}$ területű negyedellipszist, és még egy $\frac{ab}{2}$ területű háromszöget súrolt. Azaz összesen: $\frac{ab\pi}{4} + \frac{ab}{2}$ területet.

Tehát Kepler II. törvénye alapján:

$$\frac{\frac{ab\pi}{2}}{T_f} = \frac{\frac{ab\pi}{4} + \frac{ab}{2}}{T}$$

Ahonnan, elvégezve az egyszerűsítéseket:

$$T = \frac{\pi + 2}{2\pi} \cdot T_f = \frac{\pi + 2}{2\pi} \cdot \pi \sqrt{\frac{2md^3\pi\varepsilon_0}{q^2}}$$

Tehát az idő ami alatt a q töltés d-ből $\frac{d}{2}$-be jut:

$$T = \frac{\pi + 2}{2} \sqrt{\frac{2md^3\pi\varepsilon_0}{q^2}}$$

Láthatóan ugyanezt az eredményt kaptuk, a másik módszerrel is.

3. Feladat:
A megoldáshoz a tükörtöltések módszerét fogjuk használni.
Az R sugarú gömb középpontjától d_0 távolságra lévő Q töltés tükörtölése: $q = -Q\dfrac{R}{d_0}$, és távolsága a gömb középpontjától: $d_0' = \dfrac{R^2}{d_0}$.
Most térjünk rá a feladatunkra. Térítsük ki a fonalat egy kicsiny φ szöggel. Ekkor a d_1 távolsága a Q töltésnek a gömb középpontjától, a cosinus tétel alapján:

$$d_1 = \sqrt{(R+d+l)^2 + l^2 - 2(R+d+l)l\cos\varphi}$$

itt d a töltés távolsága a gömb felszínétől a nyugalmi helyzetben, l a fonál hossza, R a gömb sugara. Ekkor a tükörtöltés nagysága: $q_1 = -Q\dfrac{R}{d_1}$, távolsága a gömb középpontjától: $d_1' = \dfrac{R^2}{d_1}$.
legyen a Q töltést és a gömb középpontját összekötő szakasznak a függőleges bezárt szöge: α. Ennek a szögnek a szögfüggvényei a geometria alapján:

$$\cos\alpha = \frac{R+d+l(1-\cos\varphi)}{d_1} \qquad \sin\alpha = \frac{l\sin\varphi}{d_1}$$

Most vizsgáljuk meg az erőket. A fonállal párhuzamosan a töltés nem mozdul el, hiszen a fonál kényszerereje ezt, megakadályozza és ezáltal ez a fonálerő körpályán tartja a töltést. a töltésre érintő irányban a tükörtöltés vonzásából adodó elektrosztatikus erőnek az ilyen irányú komponense hat.
Tehát a Q töltés érintő irányú mozgásegyenlete, a geometria alapján:

$$ml\ddot{\varphi} = k\frac{Q\cdot q_1}{(d_1 - d_1')^2}\cdot\sin(\alpha+\varphi)$$

Először számoljuk ki $\sin(\alpha+\varphi)$, az α szögre korábban kapott összefüggésekből:

$$\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha\cdot\cos\varphi + \sin\varphi\cdot\cos\alpha = \frac{(R+d+l)}{d_1}\sin\varphi$$

Ezt és a d_1-re, d_1'-re valamint q_1-re ismert összefüggéseket visszaírva a mozgásegyenletbe, és azt egy kicsit rendezve:

$$ml\ddot{\varphi} = -kQ^2\frac{R(R+d+l)}{((R+d+l)^2 + l^2 - 2(R+d+l)l\cos\varphi - R^2)^2}\sin\varphi$$

De mivel φ csak kicsiny, ezért: $\sin\varphi \approx \varphi$ és $\cos\varphi \approx 1$. Ezeket is beírva a mozgásegyenletbe a következőt kapjuk:

$$\ddot{\varphi} + \frac{kQ^2}{m}\frac{R(R+d+l)}{ld^2(2R+d)^2}\cdot\varphi = 0$$

Ez nem más mint egy harmonikus rezgés egyenlete, tehát a kis rezgések körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{kQ^2}{m}\frac{R(R+d+l)}{ld^2(2R+d)^2}}$$

4. Feladat:
Az U potenciálon tartott lemezek feltöltődnek. A 3. lemezen lesznek a pozitív töltésű, és az 1. lemez negatív töltésű lesz. Az is nyílvánvaló, a két lemezen ugyanannyi töltés van.
Ezek a töltések megosztást hoznak létre a 2. és 4. fémlemezen, és kialakulnak a terek, az egyes lemezek közt. Ez az ábrán látható módon fog kialakulni.

Legyen az elektromos térerősség abszolút értékei, az 1. és 2., 2. és 3. valamint a 3. és 4. lemezek közt rendre: E_1, E_2 és E_3.
A 2. és 4. lemezek össze vannak kötve egy fémhuzallal, és így ekvipotenciálisak. Azt is tudjuk, hogy ez a két lemez ugyanakkor d távolságra van a 3. lemeztől. Ez azt jelenti, hogy a 'potenciálesés' a 3. lemeztől, a 2. és 4. lemezig ugyanakkora. Ez pedig a fentiek alapján nem mást jelent mint, hogy az elektromos térerősségnek is ugyanakkorának kell lennie, a 2. és 3. valamint 3. és 4. lemezek közt.
Azaz:

$$E_2 = E_3$$

.

Az elején már megtárgyaltuk, hogy az 1. és 3. lemezeknek ugyanannyi az össztöltése. Ez azt jelenti, hogy a 3. lemezből 'kijövő' összfluxusnak megkell egyeznie, az 1. lemezbe bemenő össz fluxussal.
Azaz:

$$(E_2 + E_3) \cdot A = E_1 \cdot A$$

felhasználva az előbb kapott összefüggést:

$$E_1 = 2E_2$$

Most már csak meg kéne ezeket a tereket, az ismert U feszültésg függvényében adni.
Ehhez használjuk fel Maxwell II. törvényét az ábrán látható 'körútra'. Eszerint:

$$E_2 \cdot d + E_1 \cdot d - U = 0$$

Ide beírva az előző összefüggést a következőt kapjuk E_1-re:

$$E_1 = \frac{2}{3}\frac{U}{d}$$

innen E_2 és E_3:

$$E_2 = E_3 = \frac{1}{3}\frac{U}{d}$$

(Mégegyszer ezek csupán az elektromos térerősségek abszolutértékei.)

Ahhoz, hogy a lemezekre ható erőket meghatározzuk, ismernünk kell a töltésüket.
két párhuzamos egymástól d távolságra lévő A területű lemez rendszere síkkondenzátornak tekinthető.
Az 1. lemez és a 2. lemez bal felülete, a 2. lemez jobb felülete és a 3. lemez bal felülete, valamint a 3. lemez jobb felülete és a 4. lemez, mind mind egy síkkondenzátornak tekinthető. Ezeknek a kondenzátoroknak a kapcitása pedig:

$$C = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d}$$

Tehát az egyes lemezeken lévő töltéseket, ebből és a korábban nyert összefüggésekből meghatározhatjuk.
Az 1. lemezen és a 2. lemez bal felületén lévő töltés abszolútértéke:

$$Q_1 = \frac{2}{3}\frac{A\varepsilon_0}{d}U$$

A 2. lemez jobb felületén a 3. lemez egy-egy felületén valamint a 4. lemezen lévő töltések abszolútértéke:

$$Q_2 = Q_3 = \frac{1}{3}\frac{A\varepsilon_0}{d}U$$

Ezekből a lemezekre ható erőket meghatározhatjuk.
Az 1. lemezre a 2. lemez bal felületén levő töltések fejtenek ki vonzóerőt. A többi töltés nem, mivel ezek tere, nem tud áthaladni a fémlemezeken, mivel a fémek belsejében nincs térerősség.
Tehát ezen erő abszolútértéke(Az iránya nyilvánvaló, a 2. lemez felé mutató vonzóerő):

$$F_1 = \frac{1}{2}E_1Q_1 = \frac{2}{9}\frac{A\varepsilon_0}{d^2}U^2$$

A 2. lemez bal felületére egyszer kifejt ugyanekkora F_1 nagyságú, de azzal ellentétes irányú vonzóerőt az 1. lemez, valamint a jobb felületére, pedig a 3. lemez bal felületén levő töltések fejtenek ki vonzóerőt.
Tehát a 2. lemezre ható erő abszolútértéke(iránya balra az 1. lemez felé mutat):

$$F_2 = F_1 - \frac{1}{2}E_2Q_2 = \frac{3}{18}\frac{A\varepsilon_0}{d^2}U^2$$

A 3. lemezre, vonzóerőt fejtenek ki a 2. lemez jobb felületén lévő töltések valamint a 4. lemezen levő töltések. Mint a fentiekben már megtárgyaltuk, az elektromos térerősség a két irányban ugyanakkora, és láttuk, hogy a 4. lemezen és a 2. lemez jobb felületén is ugyanannyi töltés van. Tehát a 3. lemezre ugyanakkora de egymással ellentétes irányú vonzóerőt fejtenek ki, és ezért ezek eredője 0. így a 3. lemezre ható erők eredője 0.

$$F_3 = 0$$

A 4. lemezre már csak a 3. lemez jobb felületén levő töltések fejtenek ki vonzóerőt.
Ennek abszolútértéke pedig, hasonlóan az eddigiekhez (Az iránya a 3. lemez felé mutat):

$$F_4 = \frac{1}{2}E_3Q_3 = \frac{1}{18}\frac{A\varepsilon_0}{d^2}U^2$$

Most már csak a teljes rendszer kapacitását kell meghatároznunk a telep csatlakoztatási pontjai között.
Ezt könnyen megtehetjük, ha kicsit 'átrajsoljuk' az elrendezést, egy a jelenlegivel ekvivalens kapcsolásra.
A 2. lemez két felületén töltések vannak. A lemezben pedig nincs semmilyen tér, hiszen az egy fém, tehát az egész lemez belseje ekvipotenciális. hasonlóan a 3. lemez belseje is ekvipotenciális.

Ezek miatt megtehetjük azt, hogy a 2. és 3. lemez két-két felületét 'szétválasztjuk' az ábrán látható módon:

Ez pedig átrajzolható az alábbi tisztábban látható kapcsolásra:

Láthatóan ez nem más mintha két párhuzamosan kötött kondenzátorral sorosan kötnénk egy harmadikat.
Tehát az eredő kapacitás:

$$C_e = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C+C}} = \frac{2}{3}C = \frac{2}{3}\frac{A\varepsilon_0}{d}$$