

Elektromágnesség 1.versenyfeladatsor

Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:

Akkor alakulhat ki egyenletes körmozgás, hogyha egy állandó nagyságú erő hat a q töltésre, és ez az erő biztosítja a körmozgáshoz szükséges centripetális erőt. Ez akkor alakulhat ki, ha a töltés ekvipotenciális felületen mozog, hiszen ezen mindenhol ugyanolyan nagyságú erő hat rá. A mostani Q, Q töltésrendszernek egy ekvipotenciális felülete van, még pedig az őket összekötő egyenes felezőmerőleges síkja. Tehát a töltésnek ebben két Q töltés közötti síkban kell mozognia, ahhoz hogy egyenletes körpályán haladjon.

Tehát a \mathbf{v} sebesség az AB szakaszt felező merőleges egyenesre merőleges kell legyen. Nagyságát pedig az egyenletes körmozgás feltételéből könnyen kiszámolhatjuk. A q töltést a két Q töltés által kifejtett vonzóerőknek az AB szakaszra merőleges komponensei tartják körpályán. Ahhoz, hogy ez megtörténjen a körpálya sugara h kell legyen, és a kör középpontja, az AB szakasz felezőpontja kell legyen. Ha nem ez lenne, akkor nem alakulhatna ki egyenletes körmozgás, hiszen a vonzóerők nagysága folyamatosan változna, és ezáltal a q sebességének nagysága is változna.

(a) Vagyis a geometria alapján:

$$2k \frac{qQ}{h^2 + \frac{l^2}{4}} \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}} = m \frac{v^2}{h}$$

Innen a \mathbf{v} sebesség nagysága:

$$v = \sqrt{\frac{2kqQ}{m} \frac{h^2}{(h^2 + \frac{l^2}{4})^{3/2}}}$$

(b) Mivel a körmozgás egyenletes ezért a T periódusidőt könnyen kifejezhetjük a következőképpen:

$$T = \frac{2h\pi}{v}$$

Azaz:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2kqQ} \left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}$$

(c) Az előbb már megállapítottuk a $v(h)$ függvényt. A sebesség akkor lesz maximális ha a $v(h)$ függvények szélsőértéke van. Ez pedig akkor lesz ha:

$$\frac{dv}{dh} = 0$$

Nekünk elég csak a $v(h)$ "hasában" lévő: $\frac{h^2}{(h^2 + \frac{l^2}{4})^{3/2}}$ kifejezést deriválnunk, hiszen ez is pontosan akkor lesz nulla mikor a $v(h)$ deriváltja is nulla. Tehát:

$$\frac{d}{dh} \frac{h^2}{(h^2 + \frac{l^2}{4})^{3/2}} = \frac{2h \left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2} - 3h^3 \left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}}{\left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^3} = 0$$

Ez láthatóan akkor teljesül, ha a számláló nulla, azaz:

$$h = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Tehát ekkora h esetén lesz a legnagyobb a q töltés v sebessége.

(d) A kis töltés kis perturbációit kétféle kis kitérésből rakhatjuk össze. Az egyik az amikor az AB egyenes felezőmerőlegesével párhuzamosan, a másik amikor a felezőmerőlegesre merőlegesen térítjük ki. Az összes többi kis perturbáció ezekből összerakható. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a felezőmerőlegessel párhuzamosan térítjük ki: Akkor lesz stabil ez a perturbáció, hogy ha az effektív potenciális energia második deriváltja pozitív.

Legyen a pillanatnyi távolsága AB középpontjától r .

Az impulzusmomentum megmarad, hiszen a kistöltésre ható eredő erő "centrális".

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} = mvh$$

Tehát az effektív potenciális energia:

$$\Phi_{eff}(x) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - 2kqQ \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

Felhasználva a v -re kapott összefüggést és az impulzusmomentum megmaradásból adódót:

$$\Phi_{eff}(x) = kqQ \frac{h^4}{r^2 \left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} - 2kqQ \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

Ennek r szerinti második deriváltja az egyensúlyi, azaz $r = h$ helyen:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_{r=h} = 2kqQ \frac{h^2 + l^2}{\left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}} > 0$$

Lathatóan ez mindig pozitív lesz, tehát a mozgás stabil lesz.

Most nézzük a másik esetet, amikor a felezőmerőlegesre merőlegesen térítjük ki:

Amikor ezt megtettük, akkor a töltés kikerült az ekvipotenciális felületről, tehát a két Q töltés különböző nagyságú erőkkel fogja őt vonzani. Akkor lesz stabil mégis ez a kis perturbáció, hogyha ezen erőknek az AB -vel párhuzamos komponenseinek eredője a felezőmerőleges felé mutat, hiszen ekkor a kis töltés vissza megy eredeti helyzetére.

Térítsük ki a q töltést egy kicsiny x -szel jobbra. Ekkor a fenti feltételnek megfelelően az AB -vel párhuzamos erőkomponensekre a következőnek kell teljesülnie:

$$kqQ \frac{\frac{l}{2} + x}{\left(\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 + h^2\right)^{3/2}} > kqQ \frac{\frac{l}{2} - x}{\left(\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

Most Használjuk ki, hogy az x kitérés csak kicsiny, azaz hanyagoljuk el az x^2 -es tagokat:

$$\frac{\frac{l}{2} + x}{\left(\frac{l^2}{4} + lx + h^2\right)^{3/2}} > \frac{\frac{l}{2} - x}{\left(\frac{l^2}{4} - lx + h^2\right)^{3/2}}$$

Most fejtsük sorba az egyes oldalakat $x = 0$ körül elsőrendig, hiszen az x^2 -es tagokat már elhanyagolhatjuk. Ezt elvégezve a következőt kapjuk (a technikai részleteket nem írom le, csak sorfejtés eredményét, és azt egy kicsit rendezve):

$$\left(\frac{2}{\left(\frac{l^2}{4} + h^2\right)^{3/2}} - \frac{3l^2}{4\left(\frac{l^2}{4} + h^2\right)^{5/2}} \right) x > \left(\frac{3l^2}{4\left(\frac{l^2}{4} + h^2\right)^{5/2}} - \frac{2}{\left(\frac{l^2}{4} + h^2\right)^{3/2}} \right) x$$

Ahonnán:

$$\left(\frac{2h^2 - l^2}{\left(\frac{l^2}{4} + h^2\right)^{5/2}} \right) x > 0$$

Ez pedig akkor teljesül, ha $2h^2 - l^2 > 0$, azaz:

$$h > \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Tehát ilyen h esetén az vizsgált kis perturbációk stabilisak lesznek.

2. Feladat:

- (a) Mikor az elektronok odaérnek a dróthálókhoz, akkor a dróthálók közti feszültség hatására az elektron gyorsulni fog. Miután átér a másik oldalra, azaz kijön a dróthálók közül, akkor a sebességének nagysága legyen: v_1 . A dróthálók közt az elektronra csak függőleges irányú gyorsító erő hat, tehát az elektron vízszintes irányú sebessége nem változik meg.

Kezdetben v sebességgel éri el a dróthálókat. Ennek a vízszintes irányú komponense:

$$v_v = v \cdot \sin \alpha$$

Az áthaladás utáni sebességet az energiamegmaradással könnyen kiszámolhatjuk:

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ue = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Innen:

$$v_1 = \sqrt{v^2 + \frac{2Ue}{m}}$$

Ennek a vízszintes komponense:

$$v_{v1} = \sqrt{v^2 + \frac{2Ue}{m}} \sin \beta$$

Mivel a sebesség vízszintes komponense nem változik meg az áthaladás során ezért:

$$v_v = v_{v1}$$

Azaz:

$$v \cdot \sin \alpha = \sqrt{v^2 + \frac{2Ue}{m}} \sin \beta$$

Ahonnán:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{1 + \frac{2Ue}{mv^2}}$$

Ebben a jobboldalon álló kifejezés ismert állandókat tartalmaz. Tehát valóban teljesül a Snellius-Descartes törvény az α és β szögekre.

- (b) A törésmutató definíció szerint a két közegbeli sebesség aránya. Az előbbi osztva az utóbbival. Tehát ebben az esetben:

$$n = \frac{v_1}{v} = \sqrt{1 + \frac{2Ue}{mv^2}} \approx 1,4$$

De ez itt most egy érdekes kérdés, hiszen az optikában az optikailag sűrűbb közegben kisebb a sebessége a fénynek. Ha ezt az optikai analógiát tekintjük, akkor most az első közegnek (ahonnán érkezik) kéne optikailag sűrűbb lennie, hiszen a dróthálók közti elektromos tér, felgyorsítja az elektronokat, tehát a másik közegben (ahova érkezik) nagyobb lesz a sebességük, mint az elsőben. Igen ám, de amikor az optikában optikailag sűrűbből megy kevésbé sűrűbbe, akkor a fény, törési szöge nagyobb lesz a beesési szögnél, nyilván, a Snellius Descartes törvény alapján. De a mi esetünkben viszont az előzőek szerint optikailag sűrűbb közegből megy kevésbé sűrűbbe, viszont a törési szöge az elektronoknak kisebb mint a beesési szöge. Tehát ezek alapján nem találunk direkt analógiát a kettő között, hanem inkább egy "fordított analógiát". Így a törésmutatót másképpen kell értenünk mint az optikában.

3. Feladat:

Először határozzuk meg, hogy egy Q egyenletesen elosztott töltéssel ellátott gyűrű, síkjára merőleges szimmetriatengelyén elhelyezett kis q töltésre mekkora erő hat. Legyen q távolsága a gyűrű középpontjától x . Vegyük a gyűrűnek egy kicsiny $dl = R d\varphi$ hosszúságú darabkáját, amit már pontszerűnek tekinthetünk. Ennek a töltése $dQ = \sigma dl = \sigma R d\varphi$. Ez a kis darabka a szimmetriatengelyen lévő q töltésre erőt fejt ki. De ha az egész gyűrűt tekintjük, a kicsiny darabkák által kifejtett erők, szimmetriatengelyre merőleges komponensei kioltják egymást. Tehát csak a tengellyel párhuzamos erőkomponensekkel kell számolnunk.

Az erőnek a tengellyel párhuzamos komponense amit a kis "szakasz" kifejt q -ra tehát:

$$dF_x = \frac{kqdQ}{x^2 + R^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = kq \frac{x\sigma R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} d\varphi$$

Tehát az egész gyűrű által kifejtett erő:

$$F_{gy} = \int dF_x = \int_0^{2\pi} kq \frac{x\sigma R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} d\varphi = kq \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \underbrace{\sigma R 2\pi}_Q = kqQ \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

(a) A feladatban kezdetben a q töltés a $z = a$ síkban fekvő gyűrű középpontjában található. Ebben a helyzetben ez a gyűrű nem fejt ki rá erőt. A $z = -a$ síkban levő gyűrű viszont fejt ki rá erőt. És ezt az erőt úgy számolhatjuk ki, hogy ha az előbb kapott kifejezésbe, a q töltés távolságát a gyűrű középpontjától, azaz $x = 2a$ -t írunk:

$$F = kqQ \frac{2a}{(4a^2 + R^2)^{3/2}}$$

Akkor fog maximális gyorsulással startolni a q töltés ha ez a rá ható erő maximális, azaz ha a szerinti első deriváltja nulla:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{(4a^2 + R^2)^{3/2} - 12a^2(4a^2 + R^2)^{1/2}}{(4a^2 + R^2)^3} = 0$$

Azaz:

$$(4a^2 + R^2)^{3/2} - 12a^2(4a^2 + R^2)^{1/2} = 0$$

Ahonnán:

$$a = \frac{R}{\sqrt{8}}$$

Tehát ekkora a esetén fog maximális gyorsulással startolni a q töltés.

(b) írjuk fel a mozgásegyenletét a q töltésnek a két gyűrű között:

$$m\ddot{z} = kqQ \frac{a - z}{((a - z)^2 + R^2)^{3/2}} - kqQ \frac{a + z}{((a + z)^2 + R^2)^{3/2}}$$

A feladat szerint nekünk viszont csak a $v(z)$ függvény kell, és nem a $v(t)$. Ezért írjuk \ddot{z} -t a következőképpen:

$$\ddot{z} = \frac{dz}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{d\dot{z}}{dz} \dot{z} = v \frac{dv}{dz}$$

Ezzel a mozgásegyenletünk:

$$mv \frac{dv}{dz} = kqQ \frac{a - z}{((a - z)^2 + R^2)^{3/2}} - kqQ \frac{a + z}{((a + z)^2 + R^2)^{3/2}}$$

Ez egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, azaz:

$$mv dv = kqQ \left(\frac{a - z}{((a - z)^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{a + z}{((a + z)^2 + R^2)^{3/2}} \right) dz$$

Kezdetben, $z = a$, és ekkor $v(z = a) = 0$. Tehát integrálva mindkét oldalt:

$$m \int_0^v v dv = kqQ \int_a^z \left(\frac{a - z}{((a - z)^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{a + z}{((a + z)^2 + R^2)^{3/2}} \right) dz$$

Elvégezve az integrálást:

$$\frac{mv^2}{2} = kqQ \left[\frac{1}{\sqrt{(a-z)^2 + R^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a+z)^2 + R^2}} \right]_a^z$$

Beírva a határokat, a következőt kapjuk a sebességre:

$$v(z) = \sqrt{\frac{2kqQ}{m} \left(\frac{1}{\sqrt{(a-z)^2 + R^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a+z)^2 + R^2}} - \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{4a^2 + R^2}} \right)}$$

De nekünk, csak a két gyűrű között félúton kell a sebesség, azaz $v(z=0)$, ez pedig, az előző képlet alapján:

$$v(z=0) = \sqrt{\frac{2kqQ}{m} \left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + R^2}} - \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{4a^2 + R^2}} \right)}$$

Az is adott a feladatban, hogy ezt a sebességet $a = \frac{R}{\sqrt{8}}$ esetén kell megadni. Ekkor pedig a sebesség:

$$v_f = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}} - 1 \right) \frac{2kqQ}{mR}}$$

Tehát ekkora lesz a q töltés sebessége a gyűrűk között félúton.

4. Feladat:

Először tehát keressük meg az egyensúlyi helyzetet. Legyen a Q_1 és Q_2 töltések egy AB szakasz végpontjaiban. Legyen AB felezéspontja F . Legyen a q töltés pillanatnyi P helyzetét F -vel összekötő sugár és az AB által bezárt szög α . A kerületi középponti szögek tétele szerint ekkor:

$$PAB\angle = \frac{1}{2}PFB\angle = \frac{\alpha}{2}$$

. Ezzel kitudjuk fejezni az AP valamint BP távolságokat:

$$AP = 2R \cos \frac{\alpha}{2} \quad BP = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

Az egyensúlyi helyzetben legyen $\alpha = \varphi_0$. A kis q töltés a félkör mentén tud mozogni és sugárirányban nem, tehát a másik két töltés által a rá kifejtett erőknek az érintőirányú komponensei kompenzálniuk kell egymást ahhoz, hogy a q töltés egyensúlyban legyen. Azaz:

$$\frac{kqQ_1}{\left(2R \cos \frac{\varphi_0}{2}\right)^2} \sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{kqQ_2}{\left(2R \sin \frac{\varphi_0}{2}\right)^2} \cos \frac{\varphi_0}{2}$$

Innen:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} = \sqrt[3]{\frac{Q_2}{Q_1}}$$

Tehát ekkor lesz egyensúlyi helyzet.

Ezt megtudjuk másképp is határozni. Használjuk ki azt, hogy az potenciálnak az egyensúlyi helyzetben minimuma van.

A potenciál most:

$$\Phi = \frac{kQ_1}{2R \cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{kQ_2}{2R \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Ennek akkor lesz minimuma ha α szerinti első deriváltja valamilyen φ_0 helyen nulla:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\varphi_0} = \frac{kQ_1}{4R} \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2}} - \frac{kQ_2}{4R} \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}} = 0$$

Ahonnán ugyanazt kapjuk mint az előbb:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} = \sqrt[3]{\frac{Q_2}{Q_1}}$$

Most vizsgáljuk a kis q töltés mozgását ha kicsiny φ szöggel kitérítjük a φ_0 egyensúlyi helyzete körül.

Ha A felé térítjük ki, akkor $\alpha = \varphi + \varphi_0$ tehát, az előzőek alapján ekkor a mozgásegyenlete:

$$mR\ddot{\varphi} = -\frac{kqQ_1}{4R^2 \cos^2 \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2} + \frac{kqQ_2}{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}$$

Mivel φ kicsiny szög ezért mondhatjuk, hogy: $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$ és $\cos \frac{\varphi}{2} \approx 1$.

Ezeket felhasználva:

$$\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2} \approx \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}$$

$$\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} = \cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} \approx \cos \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

Ezeket most írjuk vissza a mozgásegyenletbe, de mivel φ olyan kicsi, ezért a φ^2 -es tagokat elhanyagolhatjuk, így azokat ki sem íróm. (a mozgásegyenletet kicsit átrendezem):

$$\frac{4mR^3}{kq}\ddot{\varphi} = -Q_1 \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \varphi \cos \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}} + Q_2 \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \varphi \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}}$$

Most csak az egyenlet jobb oldalát alakítgatjuk. Kicsit átrendezve:

$$\begin{aligned} & Q_1 \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}} \frac{1}{\varphi - \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}}} + Q_2 \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}} \frac{1}{\varphi + \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}} = \\ & = Q_1 \left(\frac{1}{\cos \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{\varphi}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2}} \right) \frac{1}{\varphi - \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}}} + Q_2 \left(\frac{1}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - \frac{\varphi}{2 \cos \frac{\varphi_0}{2}} \right) \frac{1}{\varphi + \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}} \end{aligned}$$

Most használjuk fel a következő Taylor-sors közelítést : $\frac{1}{x+a} \approx \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$ A mi esetünkre ez:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi - \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}}} & \approx -\frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}} - \varphi \frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2}} \\ \frac{1}{\varphi + \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}} & \approx \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - \varphi \frac{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}} \end{aligned}$$

Ezeket visszaírva, elvégezve a beszorzást, és a φ^2 -es tagokat elhanyagolva, a következőt kapjuk:

$$\overbrace{\frac{Q_2 \cos^3 \frac{\varphi_0}{2} - Q_1 \sin^3 \frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}}^{=0} - \varphi \left(Q_1 \frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\cos^3 \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{Q_1}{2 \cos \frac{\varphi_0}{2}} + Q_2 \frac{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\sin^3 \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{Q_2}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2}} \right) =$$

(Felhasználva az egyensúlyi feltételt: $Q_1 \sin^3 \frac{\varphi_0}{2} = Q_2 \cos^3 \frac{\varphi_0}{2}$, ez az alábbi alakra hozható):

$$= -\varphi \frac{3}{2} \left(\frac{Q_1}{\cos \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{Q_2}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \right)$$

Ezt most az eredeti mozgásegyenletbe "vissztéve":

$$\frac{4mR^3}{kq}\ddot{\varphi} = -\frac{3}{2} \left(\frac{Q_1}{\cos \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{Q_2}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \right) \varphi$$

Ahonnán átrendezéssel:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3kq}{8mR^3} \left(\frac{Q_1}{\cos \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{Q_2}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \right) \varphi = 0$$

Ez láthatóan egy harmonikus rezgés mozgásegyenlete. Tehát a kis rezgések körfrekvenciája innen:

$$\omega = \sqrt{\frac{3kq}{8mR^3} \left(\frac{Q_1}{\cos \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{Q_2}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \right)}$$