Elektromágnesség 1.versenyfeladatsor
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. Feladat:

Akkor alakulhat ki egyenletes körmozgás, hogyha egy állandó nagyságú erő hat a q töltésre, és ez az erő biztosítja a körmozgáshoz szükséges centripetális erőt. Ez akkor alakulhat ki, ha a töltés ekvipotenciális felületen mozog, hiszen ezen mindenhol ugyanolyan nagyságú erő hat rá. A mostani Q, Q töltésrendszernek egy ekvipotenciális felülete van, még pedig az őket összekötő egyenes felezőmerőleges síkja. Tehát a töltésnek ebben két Q töltés közötti síkban kell mozognia, ahhoz hogy egyenletes körpályán haladjon.

Tehát a $\mathbf{v}$ sebesség az AB szakaszt felező merőleges egyenesre merőleges kell legyen. Nagyságát pedig az egyenletes körmozgás feltételéből könnyen kiszámolhatjuk. A q töltést a két Q töltés által kifejtett vonzóerőnek az AB szakaszra merőleges komponensei tartják körpályán. Ahhoz, hogy ez megtörténjen a körpálya sugara h kell legyen, és a kör középponja, az AB szakasz felezőpontja kell legyen. Ha nem ez lenne, akkor nem alakulhatna ki egyenletes körmozgás, hiszen a vonzóerők nagysága folyamatosan változna, és ezáltal a q sebességének nagysága is változna.

(a) Vagyis a geometria alapján:

$$2k\frac{qQ}{h^2+\frac{l^2}{4}}\frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{l^2}{4}}}=m\frac{v^2}{h}$$

Innen a $\mathbf{v}$ sebesség nagysága:

$$v=\sqrt{\frac{2kqQ}{m}\frac{h^2}{\left(h^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}}$$

(b) Mivel a körmozgás egyenletes ezért a T periódusidőt könnyen kifejezhetjük a következőképpen:

$$T=\frac{2h\pi}{v}$$

Azaz:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2kqQ}\left(h^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}$$

(c) Az előbb már megállapítottuk a $v(h)$ függvényt. A sebesség akkor lesz maximális ha a $v(h)$ függvények szélsőértéke van. Ez pedig akkor lesz ha:

$$\frac{dv}{dh}=0$$

Nekünk elég csak a $v(h)$ "hasában" lévő: $\frac{h^2}{\left(h^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}$ kifejezést deriválnunk, hiszen ez is pontosan akkor lesz nulla mikor a $v(h)$ deriváltja is nulla. Tehát:

$$\frac{d}{dh}\frac{h^2}{\left(h^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}=\frac{2h\left(h^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}-3h^3\left(h^2+\frac{l^2}{4}\right)^{1/2}}{\left(h^2+\frac{l^2}{4}\right)^3}=0$$

Ez láthatóan akkor teljesül, ha a számláló nulla, azaz:

$$h = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Tehát ekkora h esetén lesz a legnagyobb a q töltés v sebessége.

(d) A kis töltés kis perturbációit kétféle kis kitérésből rakhatjuk össze. Az egyik az amikor az AB egyenes felezőmerőlegesével párhuzamosan, a másik amikor a felezőmerőlegesre merőlegesen térítjük ki. Az összes többi kis perturbáció ezekből összerakható. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a felezőmerőlegessel párhuzamosan térítjük ki: Akkor lesz stabil ez a perturbáció, hogy ha az effektív potenciális energia második deriváltja pozitív.

Legyen a pillanatnyi távolsága AB középpontjától r.

Az impulzusmomentum megmarad, hiszen a kistöltésre ható eredő erő "centrális".

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} = mvh$$

Tehát az effektív potenciális energia:

$$\Phi_{eff}(x) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - 2kqQ\frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

Felhasználva a v-re kapott összefüggést és az impulzusmomentum megmaradásból adódót:

$$\Phi_{eff}(x) = kqQ\frac{h^4}{r^2\left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} - 2kqQ\frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

Ennek r szerinti második deriváltja az egyensúlyi, azaz $r = h$ helyen:

$$\left.\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r=h} = 2kqQ\frac{h^2 + l^2}{\left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}} > 0$$

Lathatóan ez mindig pozitív lesz, tehát a mozgás stabil lesz.

Most nézzük a másik esetet, amikor a felezőmerőlegesre merőlegesen térítjük ki:

Amikor ezt megtettük, akkor a töltés kikerült az ekvipotenciális felületről, tehát a két Q töltés különböző nagyságú erőkkel fogja őt vonzani. Akkor lesz stabil mégis ez a kis perturbáció, hogyha ezen erőknek az AB-vel párhuzamos komponenseinek eredője a felezőmerőleges felé mutat, hiszen ekkor a kis töltés vissza megy eredeti helyzetére.

Térítsük ki a q töltést egy kicsiny x-szel jobbra. Ekkor a fenti feltételnek megfelelően az AB-vel párhuzamos erőkomponensekre a következőnek kell teljesülnie:

$$kqQ\frac{\frac{l}{2} + x}{\left(\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 + h^2\right)^{3/2}} > kqQ\frac{\frac{l}{2} - x}{\left(\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

Most Használjuk ki, hogy az x kitérés csak kicsiny, azaz hanyagoljuk el az x^2-es tagokat:

$$\frac{\frac{l}{2} + x}{\left(\frac{l^2}{4} + lx + h^2\right)^{3/2}} > \frac{\frac{l}{2} - x}{\left(\frac{l^2}{4} - lx + h^2\right)^{3/2}}$$

Most fejtsük sorba az egyes oldalakat $x = 0$ körül elsőrendig, hiszen az x^2-es tagokat már elhanyagolhatjuk. Ezt elvégezve a következőt kapjuk(a technikai részleteket nem írom le, csak sorfejtés eredményét, és azt egy kicsit rendezve):

$$\left(\frac{2}{\left(\frac{l^2}{4}+h^2\right)^{3/2}}-\frac{3l^2}{4\left(\frac{l^2}{4}+h^2\right)^{5/2}}\right)x>\left(\frac{3l^2}{4\left(\frac{l^2}{4}+h^2\right)^{5/2}}-\frac{2}{\left(\frac{l^2}{4}+h^2\right)^{3/2}}\right)x$$

Ahonnan:

$$\left(\frac{2h^2-l^2}{\left(\frac{l^2}{4}+h^2\right)^{5/2}}\right)x>0$$

Ez pedig akkor teljesül, ha $2h^2-l^2>0$, azaz:

$$h>\frac{l}{\sqrt{2}}$$

Tehát ilyen h esetén az vizsgált kis perturbációk stabilisak lesznek.

2. Feladat:

(a) Mikor az elektronok odaérnek a dróthálókhoz, akkor a dróthálók közti feszültség hatására az elektron gyorsulni fog. Miután átér a másik oldalra, azaz kijön a dróthálók közül, akkor a sebességének nagysága legyen: v_1. A dróthálók közt az elektronra csak függőleges irányú gyorsító erő hat, tehát az elektron vízszintes irányú sebessége nem változik meg.
Kezdetben v sebességgel éri el a dróthálókat. Ennek a vízszintes irányú komponense:

$$v_v = v \cdot \sin\alpha$$

Az áthaladás utáni sebességet az energiamegmaradással könnyen kiszámolhatjuk:

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ue = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Innen:

$$v_1 = \sqrt{v^2 + \frac{2Ue}{m}}$$

Ennek a vízszintes komponense:

$$v_{v1} = \sqrt{v^2 + \frac{2Ue}{m}} \sin\beta$$

Mivel a sebesség vízszintes komponense nem változik meg az áthaladás során ezért:

$$v_v = v_{v1}$$

Azaz:

$$v \cdot \sin\alpha = \sqrt{v^2 + \frac{2Ue}{m}} \sin\beta$$

Ahonnan:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{1 + \frac{2Ue}{mv^2}}$$

Ebben a jobboldalon álló kifejezés ismert állandókat tartalmaz. Tehát valóban teljesül a Snellius-Descartes törvény az α és β szögekre.

(b) A törésmutató definíció szerint a két közegbeli sebesség aránya. Az előbbi osztva az utóbbival. Tehát ebben az esetben:

$$n = \frac{v_1}{v} = \sqrt{1 + \frac{2Ue}{mv^2}} \approx 1,4$$

De ez itt most egy érdekes kérdés, hiszen az optikában az optikailag sűrűbb közegben kisebb a sebessége a fénynek. Ha ezt az optikai analógiát tekintjük, akkor most az első közegnek (ahonnan érkezik) kéne optikailag sűrűbb lennie, hiszen a dróthálók közti elektromos tér, felgyorsítja az elektronokat, tehát a másik közegben (ahova érkezik) nagyobb lesz a sebességük, mint az elsőben. Igen ám, de amikor az optikában optikailag sűrűbből megy kevésbé sűrűbbe, akkor a fény, törési szöge nagyobb lesz a beesési szögnél, nyílván, a Snellius Descarte törvény alapján. De a mi esetünkben viszont az előzőek szerint optikailag sűrűbb közegből megy kevésbé sűrűbbe, viszont a törési szöge az elektronoknak kisebb mint a beesési szöge. Tehát ezek alapján nem találunk direkt analógiát a kettő között, hanem inkább egy ”fordított analógiát”. Így a törésmutatót másképpen kell értenünk mint az optikában.

3. Feladat:

Először határozzuk meg, hogy egy Q egyenletesen elosztott töltéssel ellátott gyűrű, síkjára merőleges szimmetriatengelyén elhelyezett kis q töltésre mekkora erő hat. Legyen q távolsága a gyűrű középpontjától x. Vegyük a gyűrűnek egy kicsiny $dl = Rd\varphi$ hosszúságú darabkáját, amit már pontszerűnek tekinthetünk. Ennek a töltése $dQ = \sigma dl = \sigma Rd\varphi$. Ez a kis darabka a szimmetriatengelyen lévő q töltésre erőt fejt ki. De ha az egész gyűrűt tekintjük, a kicsiny darabkák által kifejtett erők, szimmetriatengelyre merőleges komponensei kioltják egymást. Tehát csak a tengellyel párhuzamos erőkomponensekkel kell számolnunk.

Az erőnek a tengellyel párhuzamos komponense amit a kis "szakasz"' kifejt q-ra tehát:

$$dF_x = \frac{kqdQ}{x^2+R^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = kq\frac{x\sigma R}{(x^2+R^2)^{3/2}}d\varphi$$

Tehát az egész gyűrű által kifejtett erő:

$$F_{gy} = \int dF_x = \int_0^{2\pi} kq\frac{x\sigma R}{(x^2+R^2)^{3/2}}d\varphi = kq\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\underbrace{\sigma R 2\pi}_{Q} = kqQ\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

(a) A feladatban kezdetben a q töltés a $z = a$ síkban fekvő gyűrű középpontjában található. Ebben a helyzetben ez a gyűrű nem fejt ki rá erőt. A $z = -a$ síkban levő gyűrű viszont fejt ki rá erőt. És ezt az erőt úgy számolhatjuk ki, hogy ha az előbb kapott kifejezébe, a q töltés távolságát a gyűrű középpontjától, azaz $x = 2a$-t írunk:

$$F = kqQ\frac{2a}{(4a^2+R^2)^{3/2}}$$

Akkor fog maximális gyorsulással startolni a q töltés ha ez a rá ható erő maximális, azaz ha a szerinti első deriváltja nulla:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{(4a^2+R^2)^{3/2} - 12a^2(4a^2+R^2)^{1/2}}{(4a^2+R^2)^3} = 0$$

Azaz:

$$(4a^2+R^2)^{3/2} - 12a^2(4a^2+R^2)^{1/2} = 0$$

Ahonnan:

$$a = \frac{R}{\sqrt{8}}$$

Tehát ekkora a esetén fog maximális gyorsulással startolni a q töltés.

(b) írjuk fel a mozgásegyenletét a q töltésnek a két gyűrű között:

$$m\ddot{z} = kqQ\frac{a-z}{((a-z)^2+R^2)^{3/2}} - kqQ\frac{a+z}{((a+z)^2+R^2)^{3/2}}$$

A feladat szerint nekünk viszont csak a $v(z)$ függvény kell, és nem a $v(t)$. Ezért írjuk $\ddot{z}$-t a következőképpen:

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{d\dot{z}}{dz}\dot{z} = v\frac{dv}{dz}$$

Ezzel a mozgásegyenletünk:

$$mv\frac{dv}{dz} = kqQ\frac{a-z}{((a-z)^2+R^2)^{3/2}} - kqQ\frac{a+z}{((a+z)^2+R^2)^{3/2}}$$

Ez egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, azaz:

$$mv\,dv = kqQ\left(\frac{a-z}{((a-z)^2+R^2)^{3/2}} - \frac{a+z}{((a+z)^2+R^2)^{3/2}}\right)dz$$

Kezdetben, $z = a$, és ekkor $v(z = a) = 0$. Tehát integrálva mindkét oldalt:

$$m\int_0^v v\,dv = kqQ\int_a^z \left(\frac{a-z}{((a-z)^2+R^2)^{3/2}} - \frac{a+z}{((a+z)^2+R^2)^{3/2}}\right)dz$$

Elvégezve az integrálást:

$$\frac{mv^2}{2} = kqQ\left[\frac{1}{\sqrt{(a-z)^2+R^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a+z)^2+R^2}}\right]_a^z$$

Beírva a határokat, a következőt kapjuk a sebességre:

$$v(z) = \sqrt{\frac{2kqQ}{m}\left(\frac{1}{\sqrt{(a-z)^2+R^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a+z)^2+R^2}} - \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{4a^2+R^2}}\right)}$$

De nekünk, csak a két gyűrű között félúton kell a sebesség, azaz $v(z = 0)$, ez pedig, az előző képlet alapján:

$$v(z=0) = \sqrt{\frac{2kqQ}{m}\left(\frac{2}{\sqrt{a^2+R^2}} - \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{4a^2+R^2}}\right)}$$

Az is adott a feladatban, hogy ezt a sebességet $a = \frac{R}{\sqrt{8}}$ esetén kell megadni. Ekkor pedig a sebesség:

$$v_f = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}} - 1\right)\frac{2kqQ}{mR}}$$

Tehát ekkora lesz a q töltés sebessége a gyűrűk között félúton.

4. Feladat:

Először tehát keressük meg az egyensúlyi helyzetet. Legyen a Q_1 és Q_2 töltések egy AB szakasz végpontjaiban. Legyen AB felezéspontja F. Legyen a q töltés pillanatnyi P helyzetét F-fel összekötő sugár és az AB által bezárt szög α. A kerületi középponti szögek tétele szerint ekkor:

$$PAB\angle = \frac{1}{2}PFB\angle = \frac{\alpha}{2}$$

. Ezzel kitudjuk fejezni az AP valamint BP távolságokat:

$$AP = 2R\cos\frac{\alpha}{2} \quad BP = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$$

Az egyensúlyi helyzetben legyen $\alpha = \varphi_0$. A kis q töltés a félkör mentén tud mozogni és sugárirányban nem, tehát a másik két töltés által a rá kifejtett erőknek az érintőirányú komponensei kompenzálniuk kell egymást ahhoz, hogy a q töltés egyensúlyban legyen. Azaz:

$$\frac{kqQ_1}{\left(2R\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2}\sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{kqQ_2}{\left(2R\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)^2}\cos\frac{\varphi_0}{2}$$

Innen:

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi_0}{2} = \sqrt[3]{\frac{Q_2}{Q_1}}$$

Tehát ekkor lesz egyensúlyi helyzet.

Ezt megtudjuk másképp is határozni. Használjuk ki azt, hogy az potenciálnak az egyensúlyi helyzetben minimuma van.

A potenciál most:

$$\Phi = \frac{kQ_1}{2R\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{kQ_2}{2R\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Ennek akkor lesz minimuma ha α szerinti első deriváltja valamilyen φ_0 helyen nulla:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\varphi_0} = \frac{kQ_1}{4R}\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}} - \frac{kQ_2}{4R}\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}} = 0$$

Ahonnan ugyanazt kapjuk mint az előbb:

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi_0}{2} = \sqrt[3]{\frac{Q_2}{Q_1}}$$

Most vizsgáljuk a kis q töltés mozgását ha kicsiny φ szöggel kitérítjuk a φ_0 egyensúlyi helyzete körül.

Ha A felé térítjük ki, akkor $\alpha = \varphi + \varphi_0$ tehát, az előzőek alapján ekkor a mozgásegyenlete:

$$mR\ddot{\varphi} = -\frac{kqQ_1}{4R^2\cos^2\frac{\varphi+\varphi_0}{2}}\sin\frac{\varphi+\varphi_0}{2} + \frac{kqQ_2}{4R^2\sin^2\frac{\varphi+\varphi_0}{2}}\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}$$

Mivel φ kicsiny szög ezért mondhatjuk,hogy : $\sin\frac{\varphi}{2}\approx\frac{\varphi}{2}$ és $\cos\frac{\varphi}{2}\approx 1$.

Ezeket felhasználva:

$$\sin\frac{\varphi+\varphi_0}{2}=\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}\approx\sin\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}$$

$$\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}=\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}\approx\cos\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}$$

Ezeket most írjuk vissza a mozgásegyenletbe, de mivel φ olyan kicsi, ezért a φ^2-es tagokat elhanyagolhatjuk, így azokat ki sem írom. (a mozgásegyenletet kicsit átrendezem):

$$\frac{4mR^3}{kq}\ddot{\varphi}=-Q_1\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-\varphi\cos\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}}+Q_2\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}+\varphi\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}$$

Most csak az egyenlet jobb oldalát alakítgatjuk. Kicsit átrendezve:

$$Q_1\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}\frac{1}{\varphi-\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}}+Q_2\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}\frac{1}{\varphi+\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}}=$$

$$=Q_1\left(\frac{1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}+\frac{\varphi}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)\frac{1}{\varphi-\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}}+Q_2\left(\frac{1}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}-\frac{\varphi}{2\cos\frac{\varphi_0}{2}}\right)\frac{1}{\varphi+\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}}$$

Most használjuk fel a következő Taylor-sors közelítést : $\frac{1}{x+a}\approx\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}$ A mi esetünkre ez:

$$\frac{1}{\varphi-\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}}\approx-\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}-\varphi\frac{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}$$

$$\frac{1}{\varphi+\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}}\approx\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}-\varphi\frac{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}$$

Ezeket visszaírva, elvégezve a beszorzást, és a φ^2-es tagokat elhanyagolva, a következőt kapjuk:

$$\frac{\overbrace{Q_2\cos^3\frac{\varphi_0}{2}-Q_1\sin^3\frac{\varphi_0}{2}}^{=0}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}-\varphi\left(Q_1\frac{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{\cos^3\frac{\varphi_0}{2}}+\frac{Q_1}{2\cos\frac{\varphi_0}{2}}+Q_2\frac{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}{\sin^3\frac{\varphi_0}{2}}+\frac{Q_2}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)=$$

(Felhasználva az egyensúlyi feltételt: $Q_1\sin^3\frac{\varphi_0}{2}=Q_2\cos^3\frac{\varphi_0}{2}$, ez az alábbi alakra hozható:)

$$=-\varphi\frac{3}{2}\left(\frac{Q_1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}+\frac{Q_2}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)$$

Ezt most az eredeti mozgásegyenletbe "'vissztéve"':

$$\frac{4mR^3}{kq}\ddot{\varphi} = -\frac{3}{2}\left(\frac{Q_1}{\cos\dfrac{\varphi_0}{2}} + \frac{Q_2}{\sin\dfrac{\varphi_0}{2}}\right)\varphi$$

Ahonnan átrendezéssel:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3kq}{8mR^3}\left(\frac{Q_1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{Q_2}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)\varphi = 0$$

Ez láthatóan egy harmonikus rezgés mozgásegyenlete. Tehát a kis rezgések körfrekvenciája innen:

$$\omega = \sqrt{\frac{3kq}{8mR^3}\left(\frac{Q_1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{Q_2}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)}$$