1. Elektrosztatika

1. Alapképletek

   (a) $\oint E\, da = \frac{Q_{össz}}{\epsilon_0}$ (Gauss-törvény), ebből következik, hogy $\rho_{össz} = \epsilon_0 \cdot div\ E$ (Gauss-Osztrogradszkij-tételből)

   (b) $D = \epsilon_0 E + P$, $P = \frac{p}{V}$, ez spec. esetben $P = \chi\epsilon_0 E$. Tehát $D = \epsilon_0 E + \chi\epsilon_0 E = \underbrace{(1+\chi)}_{\epsilon_r}\epsilon_0 E = \epsilon_r\epsilon_0 E$

   (c) $\oint D\, da = Q_{szabad}$ (Maxwell), ezért $div\ D = \rho_{szabad}$

   (d) $D_{n2} - D_{n1} = \eta_{szabad}$

   (e) $E_{t2} - E_{t1} = 0$ (mivel $rot\ E = 0$)

   (f) $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\int_{x_1}^{x_2} E(x)\, dx}$

   (g) $\underline{E}_{dipol} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3(\underline{p}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2 \cdot \underline{p}}{r^5}$

   (h) Közeghatáron $\underline{E}$ tangenciális, $\underline{D}$ normális komponense nem ugrik

2. Levezetett képletek

   (a) Ponttöltéstől r távolságra a térerősség: $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\underline{r}}{r^3}$

   (b) Ponttöltéstől r távolságra a potenciál: $U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$

   (c) Homogén, végtelen, σ töltéssűrűségű fonaltól r távolságra a térerősség: $E(r) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$

   (d) Homogén, végtelen, σ töltéssűrűségű fonaltól r távolságra a potenciál: $U(r) = \frac{-\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln r$

   (e) Homogén, Q töltéssel rendelkező körgyűrűtől a gyűrű merőleges tengelye mentén z magasságban a térerősség: $E(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$

   (f) Homogén, végtelen vezető síklaptól d távolságra van Q töltés. Az így létrejövő $\eta(\rho)$ töltéseloszlás (ahol ρ a középponttól való távolság): $\eta(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{Qd}{(d^2+\rho^2)^{3/2}}$

   (g) Gömbi inverzió: földelt fémgomb esetén a helyettesítő Q' töltés és ennek távolsága (d') a középponttól: $Q' = -\frac{R}{d} \cdot Q$ és $d' = \frac{R^2}{d}$

   (h) Fémgömbnél a létrejövő η töltéseloszlás a fémgömb felületén a φ függvényében:

$$\eta(\varphi) = -\epsilon_0 \frac{d\phi}{dx}\bigg|_{x=R} = -\frac{Q}{4\pi} \cdot \left(\frac{(d - R\cos\varphi)\left(\frac{d}{R}+1\right)}{(R^2+d^2-2Rd\cos\varphi)^{3/2}} \right) = -\frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \left(\frac{R}{d}\right) \cdot \left(\frac{1 - \frac{R^2}{d^2}}{\left(1 + \frac{R^2}{d^2} - 2\frac{R}{d}\cos\varphi\right)^{3/2}} \right)$$

   (i) ρ térfogati töltéseloszlású, ϵ dielektrikummal töltött gömb térerőssége:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0\epsilon} \cdot r & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} & r > R \end{cases}$$

(j) Q töltés ϵ_1 és ϵ_2 közeghatáron gömbszimmetrikus teret kelt, ennek nagysága: $E(r) = \frac{kQ}{\bar{\epsilon} r^2}$, ahol $\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$

(k) párhuzamos dipólok között ható erő: $\underline{F} = \frac{3\underline{p}_1 \underline{p}_2}{2\pi\epsilon_0 r^4}$

(l) semleges gömb homogén térbe helyezve azt úgy torzítja, mintha benne egy dipól lenne, melynek nagysága: $\underline{p} = 4\pi R^3 \epsilon_0 \underline{E}_0$

(m) Alapkondenzátorok térerőssége és kapacitása:

$$E_{sik} = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0 A} \quad C_{sik} = \epsilon\epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad C_{gömb} = \epsilon\epsilon_0 4\pi \cdot \frac{Rr}{R-r} \quad C_{henger} = 2\pi l \epsilon\epsilon_0 \cdot \frac{1}{\ln\frac{R}{r}}$$

3. Levezetések

(a) szappanbuborék : a külső és belső nyomás megegyezik, a görbületi nyomás húzza össze, a rajta lévő töltések taszítják egymást→egyensúly. A buborék energiája:$W(Q, R, etc) = \frac{Q \cdot U}{2} + 2 \cdot A \cdot \gamma$(mert buborék gömbkondenzátor, és két oldala van). A felület mentén potenciál(Gauss miatt):$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$ Ez az energia fog a minimumra törekedni, tehát a megfelelő változó szerint deriválva 0-t kell adnia.

másik megoldás - virtuális munka elve alapján→kis dV-vel megnövelve térfogatát:
$dW = \underbrace{-1/2 \cdot \epsilon_{kinti} \cdot E^2}_{energias\tilde{u}r\tilde{u}s\acute{e}g} dV + p_k dV = 0$ (Gauss miatt: $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_{kinti} r^2}$)

(b) fémgömb, melynek középpontja d távolságra van egy Q töltéstől, amit D direkciós erejű rugó rögzít a falhoz. Amikor a fémgömb szigetelt, akkor két virtuális töltés: $-Q' = \frac{R}{d}Q$ az $y' = \frac{R^2}{d}$ helyen és Q' a középpontban. Amikor leföldeljük, akkor ez a középső "szűnik meg", tehát a töltés a középpont felé mozdul el, és a δ elmozdulása: $\delta = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 d^2 D}$

(c) Síkszimmetrikus, ϵ_1 és ϵ_2 dielektrikummal töltött hengerkondenzátor kapacitása

$$\oint D\, da = Q \implies \epsilon_1\epsilon_0 E r' \pi L + \epsilon_2 \epsilon_0 E r' \pi L = Q \implies E = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) l} \frac{1}{r'}$$

$$U = \int_r^R E(r') dr' = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \ln\frac{R}{r} \implies C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) l}{\ln\frac{R}{r}}$$

(d) körszimmetrikus (r, r_1, R sugarakkal), ϵ_1 és ϵ_2 dielektrikummal töltött hengerkondenzátor kapacitása

$$r_1 = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$$

$$\epsilon_1 \epsilon_0 E r_1' 2 r_1' \pi L = Q \implies E(r_1') = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 l} \frac{1}{r_1'}$$

$$U = \int_r^{r_1} \frac{Q}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 l} \cdot \frac{1}{r_1'} \cdot dr_1' + \int_{r_1}^R \frac{Q}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 l} \cdot \frac{1}{r_1'} \cdot dr_1'$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1 \ln\left(\frac{2R^2}{R^2 + r^2}\right) \epsilon_2 \ln\left(\frac{R^2 + r^2}{2r^2}\right)}$$

(e) axiálisan (tengely mentén) kettéosztott hengerkondenzátor kapacitása

Olyan, mint két párhuzamosan töltött hengerkondenzátor. Ebből ugyanakkora kapacitás adódik, mint a síkszimmetrikus esetben.

(f) síkkondenzátor a síkra merőleges síkkal elválasztva

$$\epsilon_1\epsilon_0 E A_1 + \epsilon_2\epsilon_0 E A_2 = Q \implies C = \frac{Q}{Ed} = \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2)}{d}$$

(g) úszó kondenzátor energiája a folyadék magasságának függvényében:

$$W(h) = \underbrace{\frac{1}{2}CU^2}_{kondenzátorenergiája} + \underbrace{\rho h\frac{(R^2-r^2)\pi}{2}gh}_{folyadék\ emelkedése} - \underbrace{\int UIdt}_{telep\ energiája=U\cdot Q}$$

$$C = \frac{Q}{{}^R_r \int E(r')dr'} = \frac{Q}{(\frac{1}{\epsilon_0(l/2-h)} + \frac{1}{\epsilon_1(l/2+h)})\frac{Q}{2\pi}ln(\frac{R}{r})}$$

Ez az energia törekszik minimumra, tehát: $\frac{dW}{dh} = 0$

2. Mágnesség

1. Alapképletek

   (a) $\oint \underline{B}\, d\underline{s} = \mu_0 I$ és $\oint \underline{B}\, d\underline{f} = 0$

   (b) $B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dr' \times (r - r')}{|r - r'|^3}$ vagy: $dB = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right) \cdot \left(\frac{I \cdot ds}{r^2}\right) \times \underline{e}$

   (c) $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left(\frac{3(\underline{m} \cdot \underline{r})r - \underline{m}r^2}{r^5}\right)$, ahol $\underline{m} = I \cdot \underline{A}$ (mágneses momentum): dipól és hurok tere.

   (d) $\underline{F} = grad(\underline{m} \cdot \underline{B})$ és $W = -\underline{m} \cdot \underline{B}$: dipólra ható erő és dipól mágneses energiája.

   (e) $\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}$ és $\underline{M} = \frac{\partial W_m}{\partial \vartheta}$ (ahol ϑ az m és B által bezárt szög)

   (f) $w = \frac{1}{2} \cdot (\underline{H} \cdot \underline{B})$ és $W = \int w\, dV$ (energiasűrűség és energia)

   (g) $F_L = Q(\underline{v} \times \underline{B}) = I(\underline{l} \times \underline{B})$: Lorentz-erő (mozgó töltésre / áramjárta vezetőre)

   (h) $U = \underline{l} \cdot (\underline{v} \times \underline{B})$: Neumann-törvény (l hosszúságú vezető $\underline{v}$ sebességgel $\underline{B}$ térben mozog)

   (i) $\Phi = \oint \underline{B} \cdot d\underline{f}$: mágneses fluxus

   (j) $U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$: Faraday-törvény

   (k) Közeghatáron $\underline{B}$ normális, és $\underline{H}$ tangenciális komponense nem ugrik

2. Levezetett képletek

   (a) Hosszú, egyenes szakasz mágneses tere r távolságban, ha I áram folyik benne

   $$B = \frac{\mu_0 I}{2r\pi}$$

   (b) Szakasz tere

   $$B = \frac{\mu_0 I}{4r\pi} \cdot (\sin\alpha - \sin\beta)$$

   (c) R sugarú körvezető tere a középpontjában, a tengelye mentén z távolságra (csak z irányú lesz!) és köráram tere nagy távolságban:

   $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ $\qquad B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$ $\qquad B = \frac{\mu_0 I R}{2d^2}$

   (d) Két hosszú vezeték között ható erő:

   $$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r} \cdot l$$

   (e) csillag-delta és delta-csillag átalakítás:

   $$R_d = R_1 + R_2 + R_3 \qquad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_{cs}}$$

   $$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_d} \quad r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_d} \quad r_3 = \frac{R_1 R_2}{R_d}$$

   $$R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_{cs}} \quad R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_{cs}} \quad R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_{cs}}$$

(f) Toroid (téglalap alakú) és szolenoid (azaz ha $a << R$, L: hossz, A: keresztmetszet) önindukciós együtthatója:

$$L_t = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} N^2 b \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \qquad L_{sz} = \frac{\mu\mu_0 N^2 A}{L}$$

(g) eredő ellenállás számolásánál kétféle szimmetria: bemeneteket öszekötő egyenesre szimmetrikusak ekvipotenciálisak, a bemeneteket összekötő egyenesre merőleges egyenesre szimmetrikusak ellentétesek, amik pedig rajta vannak, azok ekvipotenciálisak

3. Feladatok megoldásai

(a) Toroid kitöltve μ_1 és μ_2 izével meg ilyesmi.

- felül-alul kitöltve

$$\oint H dr = I_{ossz} \quad \longrightarrow \quad H = \frac{NI}{2\pi x}$$

1 menet fluxusa ($R = r + b$):

$$\Phi_1 = \oint B df = \int_r^R \frac{\mu_1 NI}{2\pi x} \cdot \frac{a}{2} dx + \int_r^R \frac{\mu_2 NI}{2\pi x} \cdot \frac{a}{2} dx \quad \longrightarrow \quad \Phi_1 = (\mu_1 + \mu_2) \frac{NIa}{4\pi} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

$$L = \frac{\Phi_{ossz}}{I} = (\mu_1 + \mu_2) \frac{N^2 a}{4\pi} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

- jobbra-balra kitöltve

$$B(x) = \begin{cases} \mu_1 H & r < x < r + \frac{b}{2} \\ \\ \mu_2 H & r + \frac{b}{2} < x < R \end{cases}$$

$$\Phi_1 = \int_r^{r+b/2} \frac{\mu_1 NIa}{2\pi x} dx + \int_{r+b/2}^R \frac{\mu_2 NIa}{2\pi x} dx = \left(\frac{NIa}{2\pi}\right) \cdot \left(\mu_1 \ln\left(\frac{r + \frac{b}{2}}{r}\right) + \mu_2 \ln\left(\frac{R}{r + \frac{b}{2}}\right)\right)$$

$$L = \left(\frac{N^2 a}{2\pi}\right) \cdot \left(\mu_1 \ln\left(\frac{r + \frac{b}{2}}{r}\right) + \mu_2 \ln\left(\frac{R}{r + \frac{b}{2}}\right)\right)$$

(b) A koaxiális kábeles cucc (elmfiz 6.18)

$$H(x) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r^2} x & 0 < x < r \\ \\ \frac{I}{2\pi x} & r < x < R \\ \\ \frac{I}{2\pi x} \cdot \frac{(R+d)^2 - r^2}{(R+d)^2 - R^2} \approx \frac{I}{2\pi x} \cdot \left(1 - \frac{x - R}{d}\right) & R < x < R + d \\ \\ 0 & x > R + d \end{cases}$$

Az energiasűrűség és az energia: A megoldás (az elmfizből, közelítés nélkül!):

$$w = \frac{1}{2}HB \quad W = \frac{1}{2}LI^2 = \int w dV = \int \frac{1}{2}\mu_0 H^2 2\pi x l dx$$

$$L = \frac{\mu_0 (R+d)^2}{2((R+d)^2 - R^2)} \left[\frac{(R+d)^2}{(R+d)^2 - R^2} \ln \frac{(R+d)}{R} - \frac{1}{2} \right] + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$$

(c) patkómágnes mekkora erőt tud kifejteni

$$\oint H ds = I_{ossz} \quad \longrightarrow \quad H(x) = \frac{2NI}{(r+x)(\pi+2)+2l}$$

Kicsit széthúzzuk (dh-val); a keletkezett új közeg és a vasmag határán minden szép. A munkavégzés:

$$F \cdot \cancel{d}h = 2 \int_0^a \underbrace{\frac{1}{2} H_2(x) B_2(x)}_{w} \cdot a dx \, \cancel{d}h \quad \longrightarrow \quad F = \frac{a}{\mu_0} \int_0^a (\mu H(x))^2 \, dx$$

(d) Roget-spirál

A rendszer energiája:

$$W(x) = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}L(x)I^2(x) \qquad L_{szolenoid}(x) = \frac{\mu_0 N^2 A}{l+x}$$

Oda áll be a rugó, ahol az energiája minimális; nekünk az kell, hogy $x = \Delta l$-nél legyen a munka deriváltja 0.

Innen meg szépen kijön valami.

(e) forgó korong egyenletes töltéseloszlással. Térerősség a középpontban.

$$dQ = \frac{2\pi x Q}{\pi(R^2 - r^2)} dx \qquad dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\omega x Q}{\pi(R^2 - r^2)} dx \qquad dH = \frac{dI}{2x} \qquad \longrightarrow H = \frac{\omega Q}{2\pi(R+r)}$$

A rendszer ekvivalens egy mágneses momentummal, ennek nagysága:

$$dm = dIA = dIx^2\pi \qquad \longrightarrow m = \frac{1}{4}\omega Q(R^2 + r^2)$$

(f) a oldalú szabályos háromszög és köré írt hatszög tere és a oldalú négyzet és köré írt kör tere:

$$H_{3sz} = \frac{9I}{2\pi a} \qquad H_{6sz} = \frac{\sqrt{27}I}{2\pi a} \qquad H_{negyzet} = \frac{I}{\pi a \sqrt{2}} \qquad H_{kor} = \frac{I}{a}$$

(g) hogy lőjük be a részecskét, hogy körpályán menjen, mekkora a periódusidő és az emelkedés (ez sem biztos :)

$$F = q(v \times B) \quad v_z = v \sin\alpha \quad v_\phi = v \cos\alpha \quad \frac{m v_\phi^2}{r} = q v_\phi B \sin\alpha \qquad \longrightarrow \tan\alpha = \frac{mv}{qrB}$$

$$T = \frac{2r\pi}{v_\phi} = \frac{2r\pi q r B}{v\sqrt{q^2 r^2 B^2 + m^2 v^2}}$$

$$d = T v_z = 2\pi \frac{mv}{qB}$$

(h) vezetőkeret kis rezgéseket végez

$$\Theta_{ossz}\ddot{\varphi} = -|M| = m \times B = mB\sin\varphi \qquad \longrightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{Ia^2\mu_0 I_0 \sin\varphi}{2\pi r(\frac{1}{6}+2)Ma^2} \cong -\frac{3II_0\mu_0}{13\pi rM}\varphi \qquad \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3II_0\mu_0}{13\pi rM}\varphi}$$

(i) kör alakú hurkot forgatunk y irányú B_0 mágneses térben(2006/4/2/2)

Benne feszültség indukálódik, mert a B irányú felülete változik$\Rightarrow$ a fluxus is változik, és a Faraday-törvény szerint: $U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

$A(t) = r^2 \cdot \pi \cdot sin(\omega t)$, mert ez egy vetítés, és $t = 0$-ban A-nak is nullának kell lennie.

A fluxus definíciója szerint: $\int BdA = \Phi$, mivel $B = B_0$ állandó, ezért $\Phi = B_0 \int dA$, vagyis:

$\Phi = B_0 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot sin(\omega t)$

Faraday-tv: $U_i = -\frac{d}{dt}B_0 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot sin(\omega t)$

$U_i = -B_0 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot cos(\omega t)$

$I(t) = -\frac{r^2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot cos(\omega t)}{R}$

Az indukálódó áram mindig olyan irányú lesz, hogy az általa keltett mágneses tér csökkentse B_0-t, vagyis y irányú koordinátája mindig negatív lesz, a z irányú pedig 0.

$$B_{1,x} = -\mu\frac{\frac{r^2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot cos(\omega t)}{R}}{2r} \cdot cos(\omega t) \qquad B_{1,y} = -\mu\frac{\frac{r^2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot cos(\omega t)}{R}}{2r} \cdot sin(\omega t)$$

(j) Q össztöltésű, állandó ρ töltéseloszlású forgó krumpli mágneses momentuma: egy $\underline{r}$ helyvektorú pontjának sebessége $\omega r_\perp$, ahol $r_\perp$ a tengelyre merőleges komponense r-nek, tehát itt az áramsűrűség: $\underline{j} = \rho v$. Definíció szerint: $dI = jdA = \rho\omega r_\perp dA$, a súrolt terület pedig $dT = \frac{1}{2}r_\perp ds$, vagyis ennek a darabnak a mágneses momentuma: $dm = dI \cdot dT = \frac{1}{2}\rho\omega r_\perp^2 \cdot dAds$. Mivel $dAds = dV$, ezért a teljes krumpli momentuma:

$|\underline{m}| = \int \frac{1}{2}\rho\omega r_\perp^2 dV$

Érdekesség, hogy ha a tehetetlenségi nyomatékot nézzük, akkor az abban szereplő ρ sűrűséget helyettesítve $\frac{1}{2}\rho\omega$-val, ahol ρ a töltéseloszlás megkapjuk a mágneses momentumot.