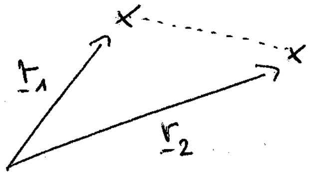
1. Elektrosztatika alapegyenletei

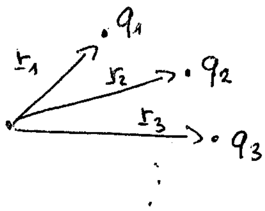
• Coulomb-tv.:



$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 \cdot q_2}{R^2}\cdot\frac{\underline{R}}{R} \qquad \underline{R} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

vonzó/taszító

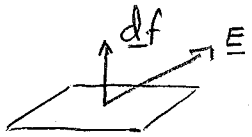
több töltésre → szuperpozíció



$$\underline{F}_i = \sum_{\substack{j \\ \underline{\underline{j \neq i}}}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_i \cdot q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|^3}\,(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = q_i \underbrace{\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|^3}\,(\underline{r}_i - \underline{r}_j)}_{\underline{E}(\underline{r}_i)\text{ : térerősség}}$$

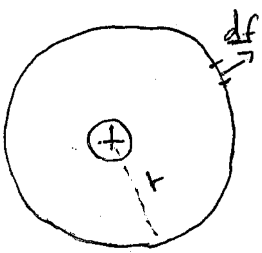
$$\underline{F}_i = q_i\,\underline{E}(\underline{r}_i)$$

• Térelméleti leírás / Gauss-tv.:

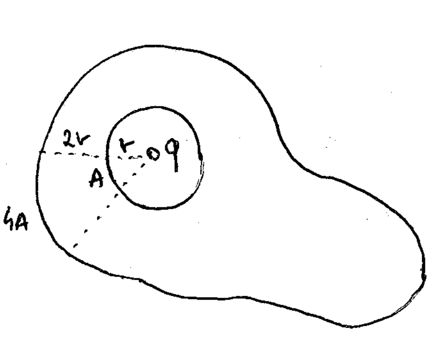


Ψ: elektromos fluxus

$$\Psi = \int_A \underline{E}\,\underline{df} = \int E \cdot df \cdot \cos\alpha$$



$$\oint \underline{E}\,\underline{df} = \frac{1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}}\,\frac{q}{\cancel{r^2}}\,\cancel{4\pi r^2}\cdot\underbrace{\cos\alpha}_{1} = \frac{q_{bezárt}}{\varepsilon_0}$$



krumplit gömbhéjakkal helyettesítem

$A \to r^2$

$4A \to 4r^2$

- Elektromos tér vonalintegrálja

  → konzervatív

  → $\oint \underline{F}\, d\underline{r} = 0$

  $$q \oint \underline{E}\, d\underline{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \underline{E}\, d\underline{r} = 0$$

- töltéssűrűség: $\rho = \frac{q}{V} \Rightarrow q_{bezárt} = \int \rho(\underline{r})\, d^3\underline{r}$ $\qquad$ (ponttöltésre: $\rho(\underline{r}) = q \cdot \delta(\underline{r})$)

$$\oint \underline{E}\, d\underline{f} \xrightarrow[\text{Gauss-tétel}]{} \int \underline{\nabla}\underline{E}\, d^3\underline{r} = \frac{q_{bezárt}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\underline{r})\, d^3\underline{r}$$

$$\underline{\nabla}\underline{E} = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \underline{E}\, d\underline{r} \xrightarrow[\text{Stokes-tétel}]{} \int \underline{\nabla} \times \underline{E}\, d\underline{f} = 0$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$$

<u>Alapegyenletek:</u>

$$\oint \underline{E}\, d\underline{f} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \qquad \mathrm{div}\, \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\oint \underline{E}\, d\underline{r} = 0 \qquad \qquad \mathrm{rot}\, \underline{E} = 0$$

- Erővonalak

  1, minden töltésből a töltéssel arányos számú erővonal lép ki

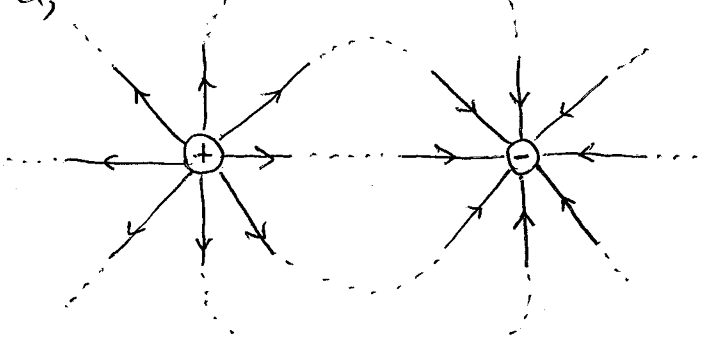
  2, erővonalak folytonosak, $\oplus \to \ominus$

  3, nem képeznek hurkokat ($\oint \underline{E}\, d\underline{r} = 0$)

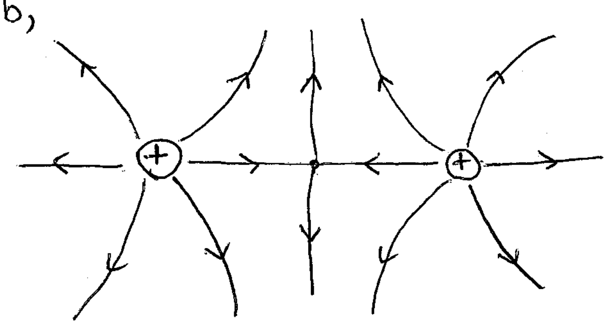
  4, erővonal iránya → $\underline{E}$

  erővonal sűrűség → $|\underline{E}|$

a)



b)

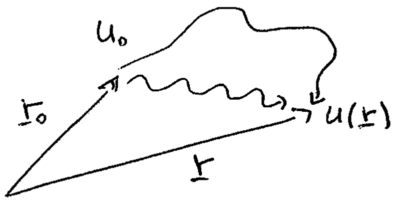


2. Elektrosztatikus potenciál

- konzervatív erőtér → értelmezhető potenciál

  mechanika $\underline{F} = -\,\mathrm{grad}\,U$

  elektrosztatika $\underline{E} = -\,\mathrm{grad}\,U$



$$-\int_{\underline{r}_0}^{r} \underline{E}(\underline{r})\,d\underline{r} = -\int_{\underline{r}_0}^{r} -\nabla U(\underline{r})\,d\underline{r} = U(\underline{r}) - U_0$$

$$\int_{\underline{r}_0}^{r} \underline{E}(\underline{r})\,d\underline{r} = U_0 - U(\underline{r})$$

- Poisson-egyenlet

$$\underline{\nabla}\,\underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \underline{\nabla}\,\underline{\nabla}\,U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- $$(\mathrm{rot}\,E)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} =$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_j} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_j} = 0$$

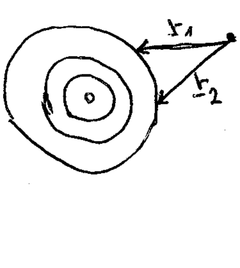
↑ összegző indexet átnevezem

↑ $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$

$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\underline{E} = 0$ ✓

- ekvipotenciális felületek $U(\underline{r}) = 0$

  szintvonalakkal:



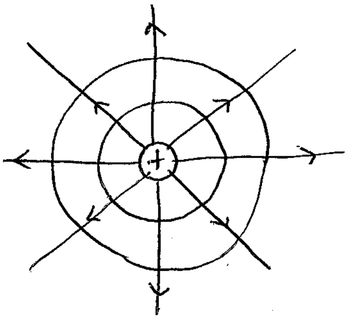
$U(\underline{r}_1) = U(\underline{r}_2)$ az ekvipotenciális felületen

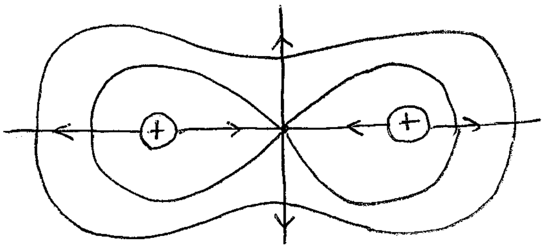
$U(\underline{r}) = U(\underline{r} + d\underline{r})$ picit elmozdulva

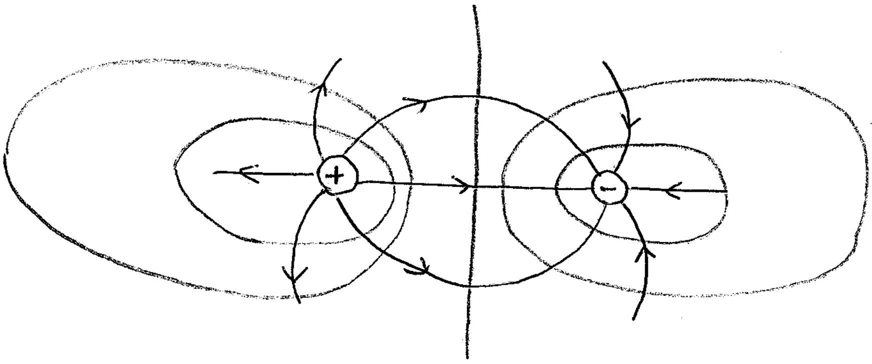
$$\cancel{U(\underline{r})} = \cancel{U(\underline{r})} + \frac{\partial U}{\partial r}\,d\underline{r}$$

$\underline{E}\,d\underline{r} = 0 \Rightarrow$ ezekre a felületekre merőleges $\underline{E}$!

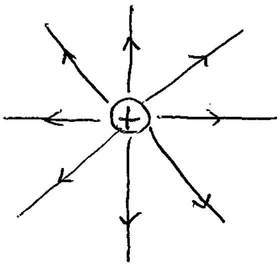
$\cos 90° = 0$







- ponttöltés:



$$\oint \underline{E}\, d\underline{f} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$|\underline{E}|\, 4r^2\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\hat{\underline{r}}$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\operatorname{grad} u(\underline{r})$$

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$\operatorname{div} \underline{E} = ?$

$\rightarrow \operatorname{div} \underline{r} = 3 \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$

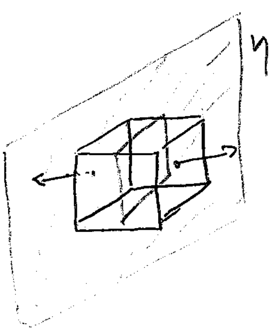
$\rightarrow \operatorname{grad} r = \frac{\underline{r}}{r} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$

$$\operatorname{div} \underline{E} = \frac{3r^3 - \underline{r}\, 3r^2 \frac{\underline{r}}{r}}{r^6}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(r^3-r^3)}{r^6} = 0$$

$\uparrow$

$\left(\frac{r}{q}\right)$

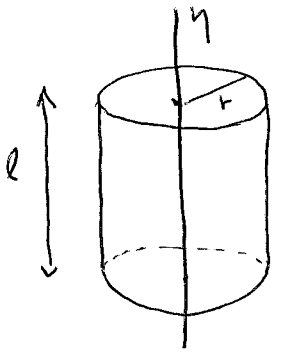
- felületi töltés:



Gauss $\quad 2EA = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\eta A}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{\eta}{2\varepsilon_0}$$

• Vonaltöltés:



$$\underbrace{\iint \underline{E}\, d\underline{A}}_{\text{palást}} + \underbrace{\iint \underline{E}\, d\underline{A}}_{\text{alaplapok}} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\eta l}{\varepsilon_0}$$

$$\underline{E} \perp d\underline{A} \Rightarrow \emptyset$$

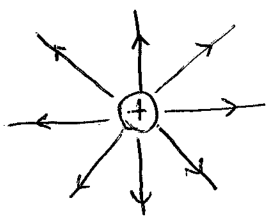
$$E\, 2\pi r \cancel{l} = \frac{\eta \cancel{l}}{\varepsilon_0}$$

$$\underline{E} = \frac{\eta}{2\pi r \varepsilon_0}\hat{\underline{r}} \xrightarrow{\underline{E} = -\underline{\nabla} u} u = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

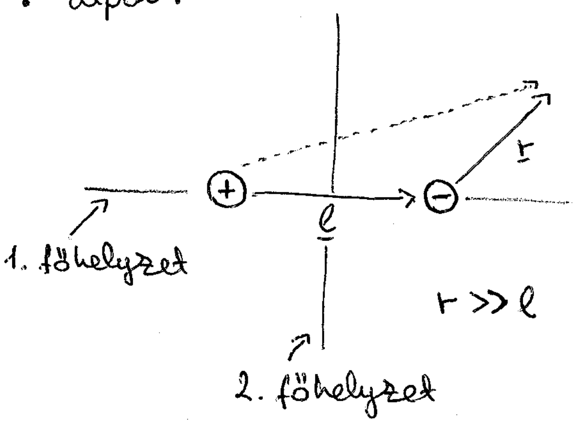
• monopol:

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\cdot \underline{r}$$



• dipól:



$r >> l$

$$u = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\underline{r}+\underline{l}|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} =$$

$$\rightarrow \frac{1}{|\underline{x}+\underline{a}|} = \frac{1}{x} + \underline{a}\,\underline{\nabla}\left(\frac{1}{x}\right) + \dots$$

$$= \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\underline{l}\underline{r}}{r^3} - \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q\underline{l})\underline{r}}{r^3}$$

$\Downarrow$

$$|\underline{E}_1| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3} \quad \underline{r} \parallel \underline{p}$$

$$|\underline{E}_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} \quad \underline{r} \perp \underline{p}$$

$\rightarrow$ $\underline{p} = q\underline{l}$ dipolmomentum

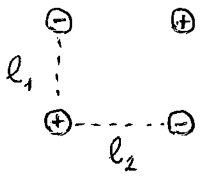
$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}r^3 - (\underline{p}\underline{r})3r^2\frac{\underline{r}}{r}}{r^6} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}r^2 - 3(\underline{p}\underline{r})\underline{r}}{r^5}$$

$\uparrow$ $\left(\frac{f}{g}\right)'$

$$\Rightarrow u \sim \frac{1}{r^2} \qquad E \sim \frac{1}{r^3}$$

• kvadrupól:

→ hasonlóan összegzünk mint dipólra



• dipólra ható erő és forgatónyomaték:

→ $\underline{F} = q\,\underline{E}(\underline{r}+\underline{\ell}) - q\,\underline{E}(\underline{r})$

$$F_i = q\,E_i(\underline{r}+\underline{\ell}) - q\,E_i(\underline{r}) = \cancel{q\,E_i(\underline{r})} + q\,\frac{\partial E_i}{\partial r_j}\,\ell_j - \cancel{q\,E_i(\underline{r})}$$

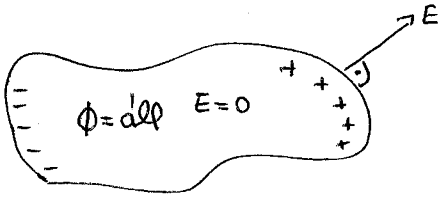
$$F_i = \frac{\partial E_i}{\partial r_j}\,q\,\ell_j = \frac{\partial E_i}{\partial r_j}\,p_j$$

→ $\underline{M} = \sum_{1,2} \underline{r} \times \underline{F} = q\left[\underline{r}_1 \times \underline{E}(\underline{r}_1) - \underline{r}_2 \times \underline{E}(\underline{r}_2)\right] = q\,(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \times \underline{E}(\underline{r}) = \underline{p} \times \underline{E}$

$\underline{r}_1 \approx \underline{r}_2 \rightarrow \underline{E}_1 \approx \underline{E}_2$

3. Vezetők elektromos térben, kondenzátorok

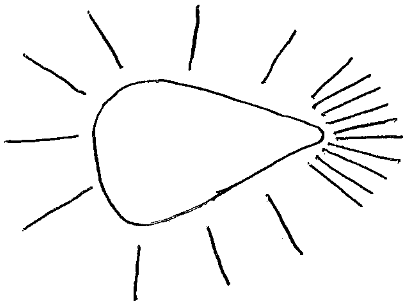
- térerősség és pot. vezetőknél:



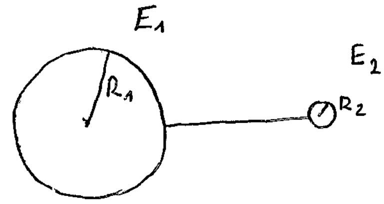
→ ekvipotenciális

→ erővonal ⊥ a felületre

- σ töltéssűrűség függ a vezető alakjától! → csúcshatás



$\Rightarrow$



$$U_1 = U_2$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

$$A \sim R^2$$

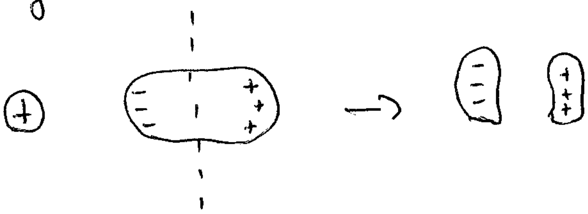
$$„\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2"$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1^2} \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2^2}$$

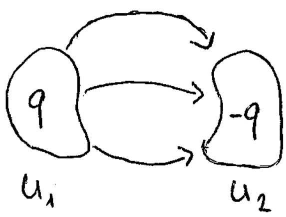
$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1}{R_1^2}\cdot\frac{R_2^2}{q_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$E_1 \cdot R_1 = E_2 R_2$$

- megosztás:



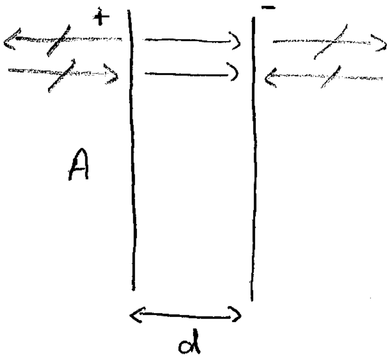
- kapacitás



$$q = C(U_2 - U_1)$$

$$q = C \cdot U \qquad [C] = \frac{C}{V} = F$$

- síkkondenzátor



$$\oint\!\!\oint \underline{E}\, d\underline{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

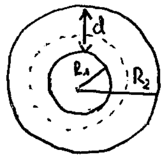
$$E = \frac{q}{2A\varepsilon_0}$$

mivel homogén a tér $U = E \cdot d$

$$U = \frac{d}{A\varepsilon_0} q \rightarrow q = \frac{\varepsilon_0 A}{d} U$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

- gömbkondenzátor



$$\oint\!\!\oint \underline{E}\, dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{R}\right)_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$q = \underbrace{\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}}_{C} U$$

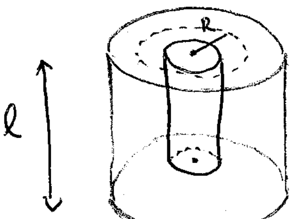
$\rightarrow$ ha $R_1 \approx R_2$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{d} \sim \text{síkkondenzátor}$$

$\rightarrow$ ha $R_2 \rightarrow \infty$ Föld

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R_d$$

- hengerkondenzátor



$$\oint\!\!\oint \underline{E}\, d\underline{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(\underline{r}) \cdot 2R\pi l = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{Q}{2R\pi l \varepsilon_0}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon_0} \left[\ln R\right]_{R_1}^{R_2} \Rightarrow C = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

• elektrosztatikus tér energiája:

$$\text{Energia} \stackrel{!}{=} \int_0^q U\,dq' = \int_0^q \frac{q'}{C}\,dq' = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} C U^2$$

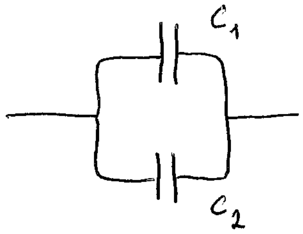
$$\text{Energia} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2 A d = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V$$

$$\cdot \frac{d}{d}$$

$$w = \frac{\text{Energia}}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad \text{energia sűrűség}$$

• kondenzátorok kapcsolása:

a,

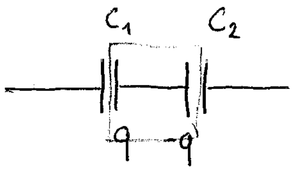


$$q_1 = C_1 U$$

$$q_2 = C_2 U$$

$$(q_1 + q_2) = (C_1 + C_2) U$$

b,



$$q = C_1 U_1$$

$$q = C_2 U_2$$

$$U = U_1 + U_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$q = \frac{U}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

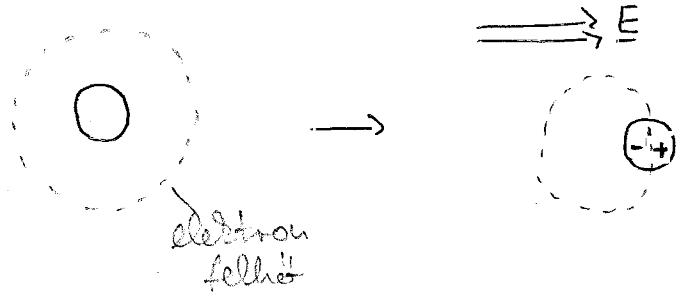
4. Dielektrikumok

Szigetelők ⟷ vezetők

- töltések nem mozdulnak (csak molekulán belül)
- töltések elmozdulnak

1, eredő polarizációval nem rendelkezők

a, apoláris anyagok

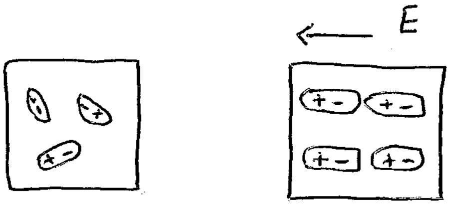


kezdetben a negatív és pozitív töltések „súlypontja" egybeesik

bekapcsolt $\underline{E}$ hatására a súlypontok eltolódnak -> poláros lesz

pl.: CH_4, CO_2

b, poláros molekulák



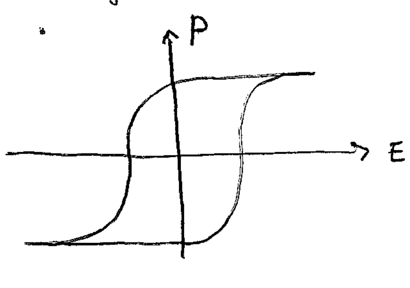
pl.: H_2O, NH_4

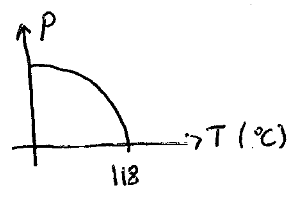
2, elektrétek (pl.: viasz) külső $\underline{E}$ hatására polarizálttá válik, ha kikapcsoljuk $\underline{E}$-t akkor is megőrzi

ferroelektromosság ($BaTiO_3$ - bárium-titanát) olyan a kristályszerkezetük, hogy alapból van polarizáltságuk

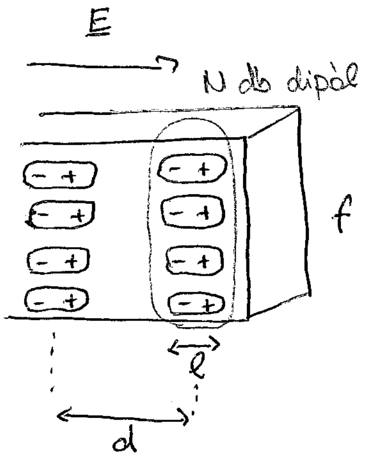
-> külső $\underline{E}$ hatására dipolmomentumuk könnyen változik

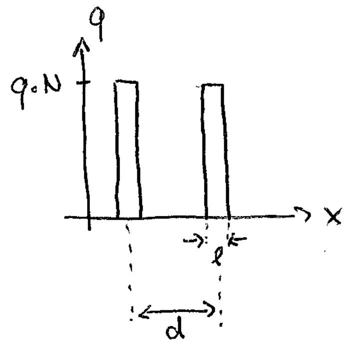
-> hő hatására elvesztik





- dipólmomentum (polarizációs) töltéssűrűség / az eltolási vektor



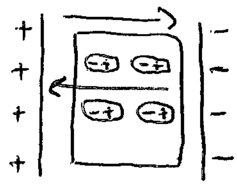


dipólmomentum sűrűség

$$\Rightarrow \bar{q} = q_1 \cdot N \cdot \frac{l \cdot f}{d \cdot f} = P \cdot f = -\oint\!\!\oint \underline{P}\, d\underline{f}$$

egységnyi térfogat

$\underline{P}$ és $d\underline{f}$ ellentétes irányúak



$$\oint\!\!\oint \underline{E}\, d\underline{f} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{q_{valódi}}{\varepsilon_0} + \frac{q_{polarizációs}}{\varepsilon_0} = \frac{q_v}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint\!\!\oint \underline{P}\, d\underline{f}$$

$$q_{valódi} = \oint\!\!\oint \underbrace{(\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P})}_{\underline{D}\text{ : eltolási vektor}} d\underline{f}$$

$$q_v + q_p = \oint\!\!\oint \underline{E}\, d\underline{f}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \oint\!\!\oint \underline{D}\, d\underline{A} &= q_{valódi} \\ \operatorname{div} \underline{D} &= \rho_{valódi} \end{aligned}}$$

- elektréteknél $\underline{P}$ állandó
- lineáris dielektrikumokban

$$\underline{P} = \chi \varepsilon_0 \underline{E} \rightarrow P \sim E$$

χ: elektromos szuszceptibilitás

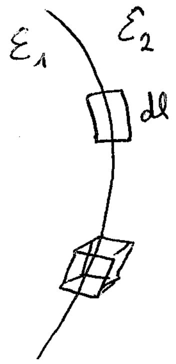
$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \chi \varepsilon_0 \underline{E}$$

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\varepsilon_r} \underline{E}$$

ε_r : relatív elektromos permittivitás / dielektromos együttható

$$[\varepsilon] = \frac{As}{Vm}$$

- határfelületek



$$\oint \underline{E}\, d\underline{l} = 0$$

$$E_{t_1} dl - E_{t_2} dl = 0$$

$$E_{t_1} = E_{t_2} \quad \rightarrow \quad \text{folytonos az átmenet}$$

$$\oiint \underline{D}\, d\underline{A} = Q$$

$$D_{n_2} dA - D_{n_2} dA = Q$$

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma = \frac{Q}{dA} \qquad \text{ha } Q = 0 \Rightarrow D_{n_1} = D_{n_2}$$

- fémeknél

fém

ε

$D_n = \sigma$

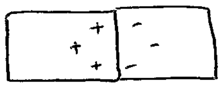
$\underline{D} = \underline{E} = 0$

- dörzselektromosság:

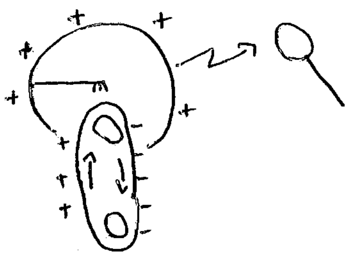
fém fém

→ le is vezetődik

szigetelők



pl.: van der Graaf



5. Mozgó töltések, áramok

• áram: töltés áramlás

$\rightarrow$ lokális töltésmegmaradás

$\rightarrow$ kontinuitás

$\rightarrow$ $[I] = A$ $\qquad I = \int \underline{j}\, d\underline{A}$ $\qquad \underline{j}$: áramsűrűség $\qquad j = \frac{I}{A}$

I[zárt felület] + $\frac{dQ}{dt}$ [felületen belül] = 0

$$\oint\!\!\oint \underline{j}\, d\underline{A} + \frac{d}{dt} \underbrace{\iiint \rho\, d^3r}_{Q} = 0$$

$$\iiint \operatorname{div} \underline{j}\, d^3r + \frac{d}{dt} \iiint \rho\, d^3r = 0$$

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0}$$

• szabad töltésre ható erő:

$m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \underline{F} = e\underline{E}$ $\quad \longrightarrow \quad$ $\cancel{m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}} = e\underline{E} - \frac{m\underline{v}}{\tau}$

mert örökké gyorsulna

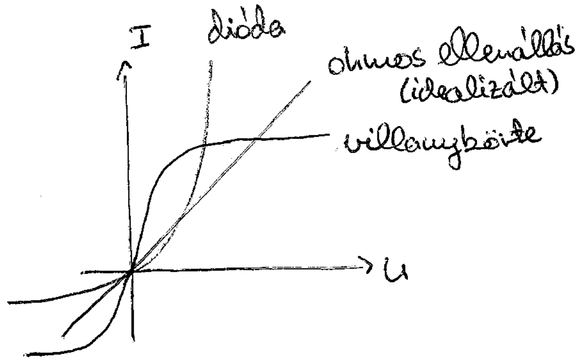
túlcsillapított rendszer

$e\underline{E} = \frac{m}{\tau} \underline{v}$ $\qquad \tau$: relaxációs idő

$\underline{j} = \rho \underline{v} = \rho \frac{e\tau}{m} \cdot \underline{E}$

σ: vezetőképesség

$R = \frac{U}{I}$



$\rightarrow$ differenciális Ohm-tv.

→ anyagok vezetési tulajdonságai:

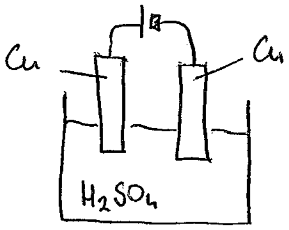
- fémek – Drude-modell → mechanikai leírás, elektronok ütközések
  „flipper-gép"

$$\underline{j} = \sigma \underline{E}$$

- szupravezetők – alacsony (20K alatt) olyan fémek amik szobahőmérsékleten rosszul vezetnek → jól fognak

  – 90-100K kerámia szupravezetők
  → törnek, drága

- elektrolit – ionokat tartalmazó folyadék
  – elektrolízis



$$H_2SO_4 = 2H^+ + SO_4^{2-}$$

$$H^+ + H_2O = H_3O^+$$

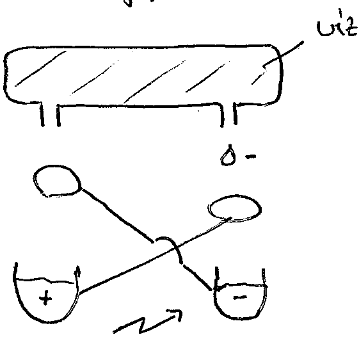
$$Cu = Cu^{2+} + 2e^-$$

- félvezetők (pl.: Si) → elektron/lyukvezetés
  → önmagukban nem, szennyezetten vezetnek
  T-nő R-csökken
  (az e^- kiszabadul → részt vesz a vezetésben)

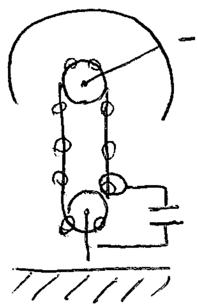
- szigetelők T↑↑ vezetnek
- gázok – nagyon gyengén, kevés ion van bennük
  – eltérő fénnyel
- vákuum → e^--k gyorsulnak, nem igaz Ohm-tv.

Áramforrások

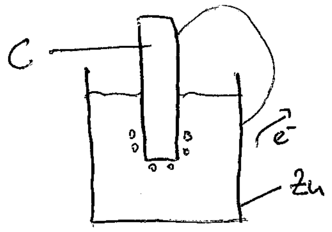
Thomson-gép



Pelletron



- akkumulátor / elem



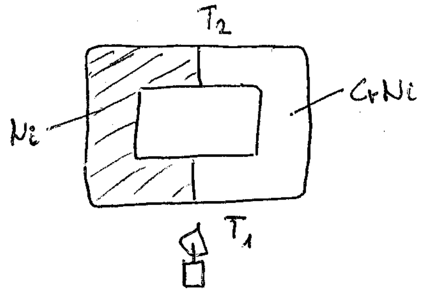
$$Zn = Zn^{++} + 2e^-$$

$$H_2O + NH_4OH \rightarrow NH_4OH = NH_4^+ + OH^-$$

$$2NH_4^+ + 2e^- = 2NH_3 + H_2$$

$\rightarrow$ Zn kilyukad

- termoelemek



$T_1 > T_2$

$U = \alpha(T_2 - T_1)$ α: Seeback-együttható

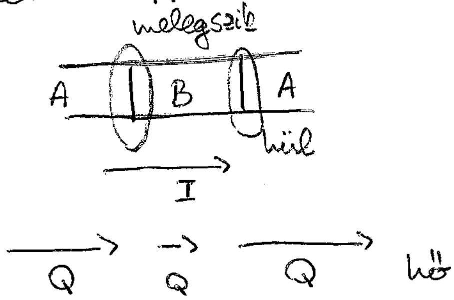
$\underline{E} = \alpha \operatorname{grad} T \rightarrow \oint \underline{E}\, d\underline{r} = \int + \int + \dots$

$\rightarrow$ hőmérséklet mérésére jó

ami jó áramvezető, az általában jó hővezető is :(

$\rightarrow$ nem használható erőműben

- Peltier-effektus



$$Q = \Pi_{AB} I$$

$$\Pi_{AB} = T\alpha_{AB}$$

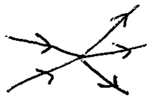
A, B eltérő vezető képességű

kontaktpotenciál: két eltérő hőmérsékletű fém közötti feszültség

6. Kirchhoff-törvények, bekapcsolási jelenségek

- Kirchhoff-tv.

$$\oint\!\!\oint \underline{j}\, d\underline{f} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_i I_i = 0$$

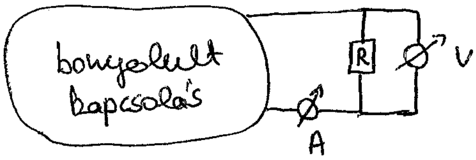


csomóponti

$$\oint \underline{E}\, d\underline{r} = 0 \qquad \sum_i U_i = 0$$

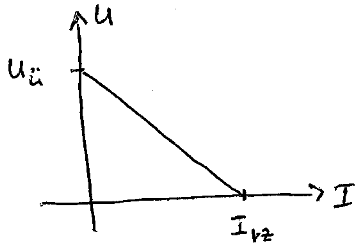
hurok

- Thevenin és Norton tétele



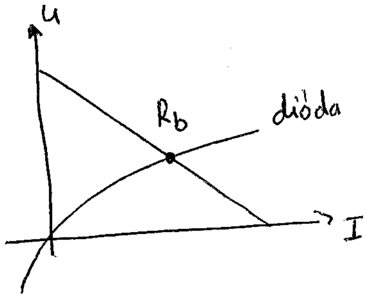
ideális műszerek!

R: ∞-ről csökkentem nulláig



Th: $U = U_ü - I R_b$ $\qquad R_b = \dfrac{U_ü}{I_{rz}}$

N: $I = I_{rz} - \dfrac{1}{R_b} U$



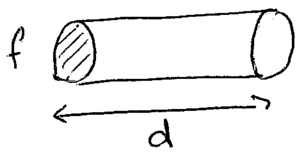
- áram teljesítménye

$W = U \cdot q \qquad P = \dfrac{W}{t} = UI \qquad P = I^2 R = \dfrac{U^2}{R}$

$Q = UIt$

$\uparrow$

Joule-hő



$P = U \cdot I = \underline{E} \cdot d \cdot \underline{j} \cdot f = \underline{E} \cdot \underline{j} \cdot V$

teljesítmény sűrűség: $p = \underline{E} \cdot \underline{j}$

• elektrolízis, Faraday-törvények

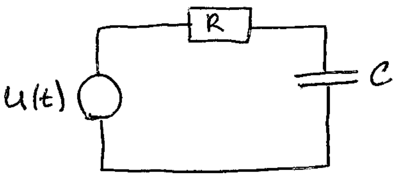
1. ugyan annyi töltés (~~ugyan annyi anyagból~~) ugyan annyi tömeget választ ki $m = k\cdot I\cdot t = k\cdot q$

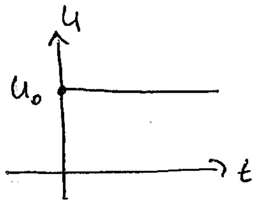
2. 1 mol 1 vegyértékű anyag kiválasztásához ugyan annyi töltés kell

$$F = 96500\ \frac{C}{mol} \qquad F = e\cdot N = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 6{,}01\cdot 10^{23}$$

$$M = \frac{Q}{F}$$

• bekapcsolási jelenségek





$$Q(t) = \int_0^t I(t)\,dt'$$

$$I(t)\cdot R + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt' = U_0 \qquad \Big/\frac{d}{dt}$$

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0$$

$$I = I_0 e^{-\lambda t}$$

$$-\lambda \cancel{I_0} R \cancel{e^{-\lambda t}} + \frac{1}{C}\cancel{I_0}\cancel{e^{-\lambda t}} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{RC} \Rightarrow \boxed{I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = RC}$$

$$\rightarrow I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot R + \frac{I_0}{C}\int_0^t e^{-\frac{t'}{\tau}}\,dt' = U_0$$

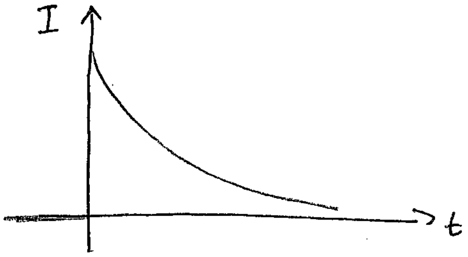
$$I_0 R\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{I_0}{C}\Big[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\Big]_0^t = U_0$$

$$\cancel{I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}}} - \cancel{I_0 \frac{\tau}{C} e^{-\frac{t}{\tau}}} + \frac{I_0 \tau}{C} = U_0$$

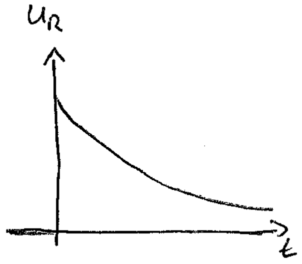
R

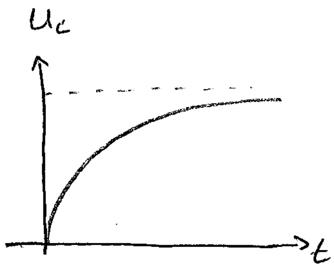
$$I_0 = \frac{U_0}{R} \Rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$\Rightarrow$



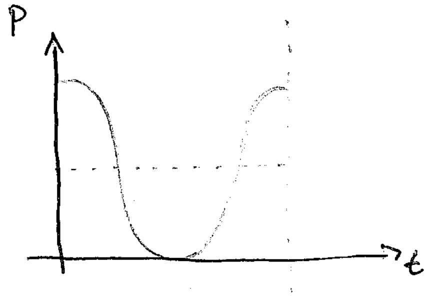


- váltakozó áram

$$U(t) = U_0 \cos \omega t \qquad \omega = 2\pi f = 314 \frac{1}{s}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cos \omega t \qquad f = 50\,\text{Hz}$$

$$P = U(t) \cdot I(t) = \frac{U_0^2}{R} \cos^2 \omega t$$



$$\bar{P} = \frac{U_0^2}{R} \overbrace{\overline{\cos^2 \omega t}}^{\text{átlag}} = \frac{U_0^2}{R} \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{U_{eff}^2}{R} \qquad U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

- kondenzátor váltakozó áramkörben

$$U(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} I(t')\,dt' = \frac{1}{C\omega} I_0 (\sin \omega t - \sin \omega t_0) = U_A + \frac{1}{\omega C} I_0 \sin \omega t$$

$$U_0 = \frac{1}{\omega C} I_0 \qquad Z = \frac{1}{\omega C}$$

$$P = U_0 \sin \omega t \, I_0 \cos \omega t = U_0 I_0 \frac{\sin 2\omega t}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{P} = 0$$

- lin. / nem lineáris hálózatok
  - ↳ attól nem lineáris ha R nem lineáris fv.-e I-nek
  - ↳ pl.: tranzisztort, tirisztort tartalmazó körök

7. mágneses alapjelenségek

- Lorentz-erő
  - pozitív töltésre $\underline{F} = q(\underline{v}\times\underline{B})$
  - jobbkéz-szabály
  - $[B] = T$ mágneses indukcióvektor

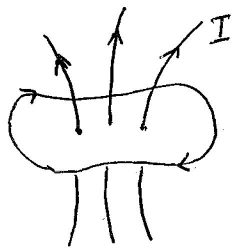
- mágneses tér
  - forrásmentes → nincs mágneses monopólus
  - örvényes → indukcióvonalak önmagukba záródnak

- alapegyenletek:

$$\oint\!\!\!\oint \underline{B}\,d\underline{f} = 0 \xrightarrow{\text{Gauss}} \mathrm{div}\,\underline{B} = 0$$

$$\oint \underline{B}\,d\underline{r} = \mu_0 \underbrace{\sum I}_{\iint \underline{j}\,d\underline{A}} \xrightarrow{\text{Stokes}} \mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0\,\underline{j}$$

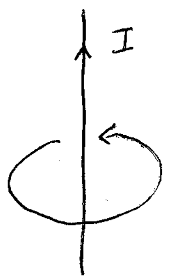
(Ampere / gerjesztési tv.)



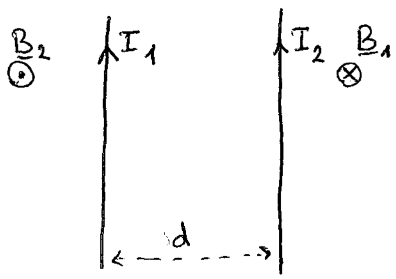
$\oint \underline{B}\,d\underline{r} = \mu_0 \sum I$

ha nem fog körbe áramot

→ $\oint \underline{B}\,d\underline{r} = 0$



$$|\underline{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}$$

$$F = N\cdot q v B = \underbrace{\underbrace{\frac{Nq}{f\ell}}_{\rho}\cdot v\cdot f}_{I}\cdot B\cdot \ell \Rightarrow \frac{\mu_0 I_1 I_2\,\ell}{2\pi d}$$

$$\frac{\ell}{\ell}\cdot\frac{f}{f}$$

- emlék:

$\mathrm{rot}\,\underline{E} = 0 \Rightarrow \exists\ u$ skalárpotenciál, hogy $\underline{E} = -\,\mathrm{grad}\,u$

mivel $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\Phi = 0$

$\Rightarrow$ mivel $\operatorname{div} \underline{B} = 0$ $\rightarrow \exists$ $\underline{A}$ vektorpotenciál, hogy $\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A}$

mert $\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{V} = 0$

skalárpotenciálra $u' = u + c$, ahol c konstans is megoldás volt

mert $\operatorname{grad} c = \emptyset$

vektorpotenciálra mi ez a „c"?

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}' = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$\underline{\nabla} \times (\underline{A}' - \underline{A}) = \emptyset$$

, ekkor $\underline{A}' - \underline{A}$ is egy vektortér

ami előállítható $\operatorname{grad} \chi = \underline{A}' - \underline{A}$

χ : skalártér

$$\Rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \operatorname{grad} \chi$$

ahogy megszabtuk, hogy u esetén ∞-ben $u = 0$

ahogy megszabtuk, hogy u esetén ∞-ben u = 0 itt azt az $\underline{A}$-t választjuk, amelyre igaz hogy $\boxed{\operatorname{div} \underline{A} = 0}$

$\Rightarrow$ itt azt az $\underline{A}$-t választjuk, amelyre igaz hogy $\boxed{\operatorname{div} \underline{A} = 0}$

Coulomb-mérték

$\operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{A} = \mu_0 \underline{j}$

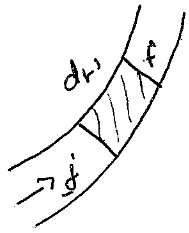
$$\underbrace{\varepsilon_{pqi} \varepsilon_{ijk}}_{\delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj}} \frac{\partial^2 A_k}{\partial r_q \partial r_j} = \frac{\partial^2 A_q}{\partial r_q \partial r_p} - \frac{\partial^2 A_p}{\partial r_j \partial r_j} =$$

$$= \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \underline{A}}_{0!} - \Delta \underline{A} = \mu_0 \underline{j}$$

$$\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$$

$\rightarrow$ megoldása: $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r'$

$$A(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d^3r'$$



$$d^3r' = f\,dr'$$

$$\underline{j}(\underline{r}')\,d^3r' = \underbrace{\underline{j}f}_{I}\,dr'$$

$$\Rightarrow \quad A(\underline{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

rotáció $\underline{r}$-szerint

rot $d\underline{r}' = 0$

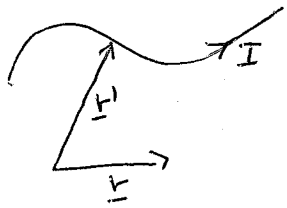
$$\text{rot}\,\lambda\underline{v} = \lambda\,\text{rot}\,\underline{v} + \text{grad}\,\lambda \times \underline{v}$$

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial r_j}(\lambda v_k) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial \lambda}{\partial r_j} v_k + \lambda\,\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial r_j} = 0$$

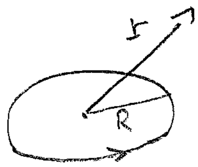
$$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot}\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\underline{r}'}{|\underline{r}'-\underline{r}'|}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \text{grad}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)\times d\underline{r}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\underline{r}'\times(\underline{r}-\underline{r}')}{(\underline{r}-\underline{r}')^3}$$

$$\text{grad}\,\frac{1}{\underline{r}} = \frac{-\underline{r}}{r^3}$$

Biot - Savart



• kis hurok tere



$r \gg R$

$r' \ll r$

$$\underline{r} = (x, y, z) = r(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

$$\underline{r}' = \begin{pmatrix} R\cdot\cos\varphi \\ R\cdot\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d\underline{r}' = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \qquad \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \approx \frac{1}{r^3} + \frac{\underline{r}'\underline{r}}{r^5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int\frac{d\underline{r}'\times\underline{r}}{r^3} - \int\frac{d\underline{r}'\times\underline{r}'}{r^3} + \int\frac{(d\underline{r}'\times\underline{r})3\underline{r}'\underline{r}}{r^5} - \cancel{\int\frac{d\underline{r}'\times\underline{r}'(3\underline{r}'\underline{r})}{r^5}}\right.$$

A B C

A, $\frac{1}{r^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

B, $-\frac{1}{r^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_z \left(-\frac{1}{r^3}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-R^2\sin^2\varphi - R^2\cos^2\varphi\right) = \underline{e}_z\, 2\pi \frac{R^2}{r^3}$

C, $\frac{1}{r^5} r r \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \cdot 3(R\cos\varphi\hat{x} + R\sin\varphi\hat{y}) =$

$$= \frac{3R^2}{r^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\hat{z} \\ \sin\varphi\,\hat{z} \\ -\sin\varphi\,\hat{y} - \cos\varphi\,\hat{x} \end{pmatrix} = \frac{3R^2\pi}{r^3} \begin{pmatrix} \hat{x}\hat{z} \\ \hat{y}\hat{z} \\ -\hat{y}^2 - \hat{x}^2 \end{pmatrix} =$$

$\int_0^{2\pi} \sin\cos = \emptyset$

$\int_0^{2\pi} \cos^2 = \pi$

$$= \frac{3R^2\pi}{r^3}\left[\hat{\underline{r}}(\hat{\underline{r}}\,\underline{e}_z) - \underline{e}_z(\hat{\underline{r}}^2)\right]$$

$(\hat{x}\hat{z}, \hat{y}\hat{z}, \hat{z}\hat{z}) - (0, 0, \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2)$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\left(2\pi\frac{R^2}{r^3}\underline{e}_z\right) + \frac{3R^2\pi}{r^3}\left[\hat{\underline{r}}(\hat{\underline{r}}\,\underline{e}_z) - \underline{e}_z\,\hat{\underline{r}}^2\right]\right]$$

$\underline{m} = R^2\pi I \cdot \underline{e}_z$ mágneses dipólmomentum

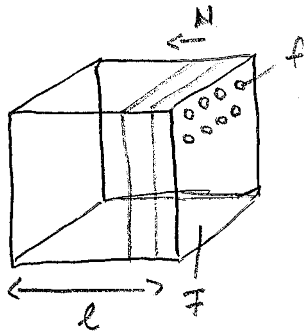
$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left(3\hat{\underline{r}}(\hat{\underline{r}}\underline{m}) - \underline{m}\right)$$

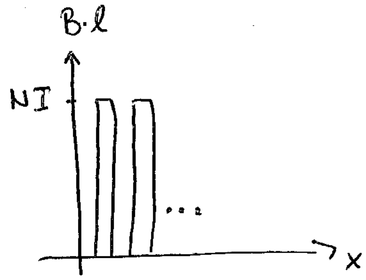
8. Mágneses anyagok

- mágnesesség oka: elektronok mozgása nem elhanyagolható
  - → kis köráramok → kis dipólmomentumok
  - → külső mágneses tér hatására rendeződnek

$\underline{m} = I \cdot \underline{f}$ mágneses dipólmomentum

$\underline{M} = \dfrac{\sum \underline{m}}{V}$ mágnesezettség (a teljes anyagra)





$$B = \frac{\mu_0 N I f}{F \cdot l} = \mu_0 \underline{M}$$

$$\oint \underline{B}\, d\underline{r} = \mu_0 \Big(I_{valódi} + \underbrace{\oint \underline{M}\, d\underline{r}}_{\text{mikro áramok}} \Big)$$

$$I_v = \oint \underbrace{\left(\frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M} \right)}_{\underline{H}\text{: mágneses térerősség}} d\underline{r}$$

$$\oint \underline{H}\, d\underline{r} = \underbrace{I_v}_{\int \underline{j}\, dA} \xrightarrow[\text{Stokes}]{} \operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j}$$

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\mu_r} \underline{H} \qquad \underline{M} = \chi \underline{H}$$

μ: mágneses permittivitás

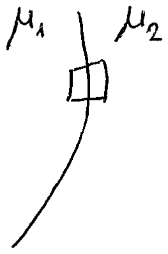
→ ferromágnes (vas) erősen mágneses $\mu_r >> 1$

paramágnes $\chi > 0$ $\mu_r > 1$

diamágnes $\chi < 0$ $\mu_r < 1$

szupravezető $\chi = -1$ → $\emptyset$ mágneses tér

- határfeltételek



$$\oint\!\!\oint \underline{B}\, d\underline{f} = 0$$

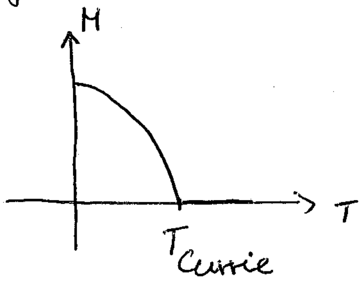
$$\rightarrow B_{n_1} = B_{n_2}$$

$$\oint \underline{H}\, d\underline{r} = I \qquad I = 0$$

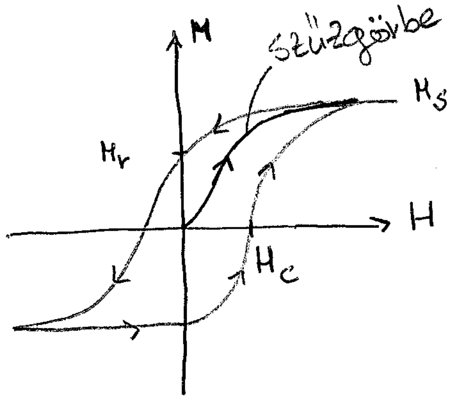
$$H_{t_1} dl - H_{t_2} dl = 0$$

$$H_{t_1} = H_{t_2}$$

- mágnesezettség hőfüggése



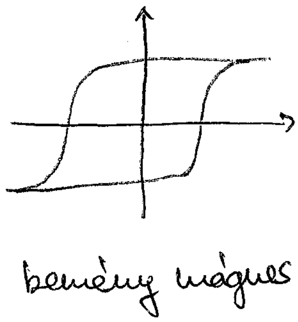
- hiszterézis görbe
  - a ferromágneses anyagnak kezdetben rendezetlen dipoljai vannak
  - ezután oda-vissza változtatjuk a külső teret



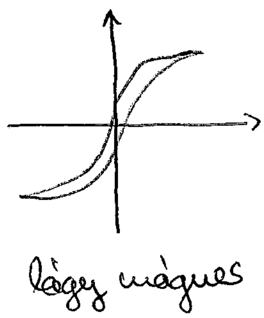
M_s : telítési (szaturációs) mágnesség

M_r : maradék (remanens) mágnesség

H_c : koercitív térerő



kemény mágnes

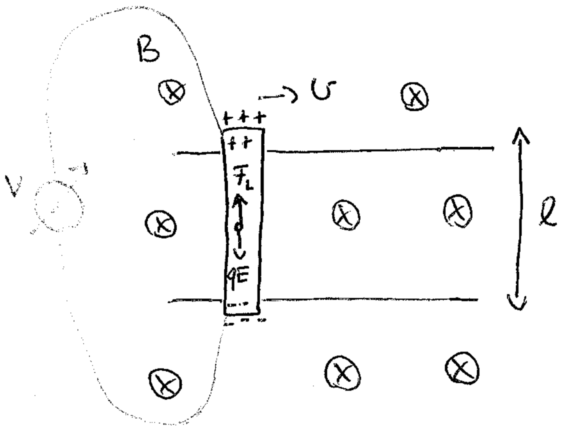


lágy mágnes

9. mágneses indukció

- indukció
  - → mozgási - vezető mozog
  - → nyugalmi
    - → kölcsönös
    - → ön

  } B változik (kölcsönös, ön)



$$F_L = q \cdot v \cdot B = q \cdot E \qquad / \cdot l$$

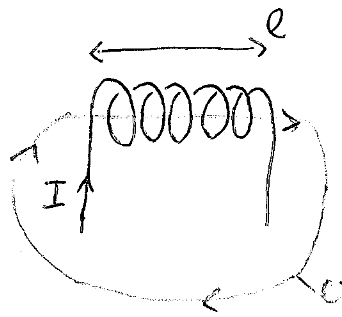
$$vBl = U_{ind} = \int \underline{E}\, d\underline{r} \qquad ; \underline{E} = \underline{v} \times \underline{B}$$

$$U_{ind} = \underbrace{-}_{\text{Lenz-tv.}} Blv = -\frac{d(Blx)}{dt} = -\frac{d(BA)}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \oint \underline{E}\, d\underline{r} = -\frac{d}{dt} \int \underline{B}\, d\underline{f} \xrightarrow{\text{Stokes}} \operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

- Lenz-törvény:
  az indukált áram mindig olyan irányú, hogy mágneses hatásával gyengítse az őt létrehozó hatást

- Szolenoid tekercs

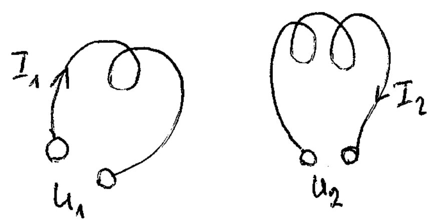


ezt az utat elhanyagoljuk, gyenge $\underline{B}$

$$\text{Amperé-tv.} \Rightarrow \quad B \cdot l = \mu_0 I N$$

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}$$

- kölcsönös indukció



$L_{21} = L_{12}$ szimmetrikus

az egyik hurokban változik az I → változik B → az egyik hurokban változik Φ ⇒ indukció → a másik hurokban változik Φ ⇒ indukció

tekercsre: $\Phi = B r^2 \pi \cdot N$

$$U = -r^2 \pi N_1 \frac{dB}{dt} = -\mu_0 \frac{r^2 \pi N_1 N_2}{l} \frac{dI}{dt}$$

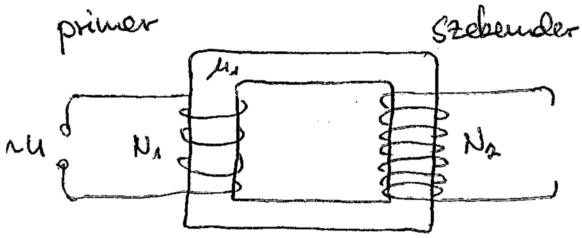
L : indukciós együttható $\quad [L] = H$

• önindukció – a hurok benne van saját mágneses terében is

$$\Phi = LI$$

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$$

• transzformátor (Déri, Bláthy, Zipernowsky)



$$L_{11} = \alpha \cdot N_1^2$$

$$L_{22} = \alpha \cdot N_2^2$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad L_{12} = L_{21} = \alpha N_1 N_2$$

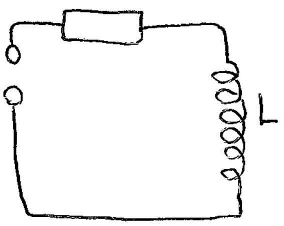
kölcsönös indukció elvén működik

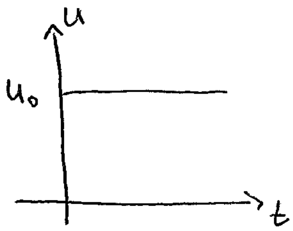
• mágneses tér energiája

$$u = L\frac{dI}{dt} \qquad L = \mu_0 \frac{AN^2}{l} \qquad \text{Energia} = \int_0^t u \cdot I\,dt' = \int_0^t L\frac{dI}{\cancel{dt'}}\cancel{dt'}\,I = \frac{1}{2}LI^2 = \cdot\frac{l}{l}$$

$$= \frac{\mu}{2}\left(\frac{NI}{l}\right)^2 Al = \frac{\mu}{2}H^2V = \frac{1}{2}BH$$

• bekapcsolási jelenség:





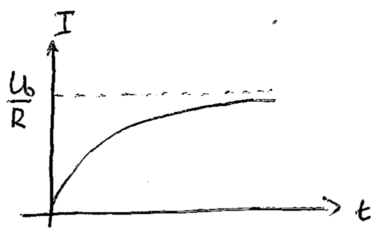
$$u_0(t) = IR + L\frac{dI}{dt}$$

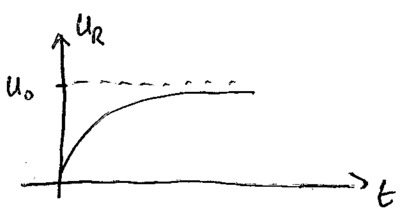
$$\frac{u_0 - IR}{L} = \frac{dI}{dt}$$

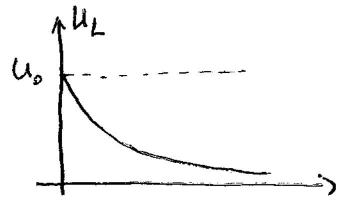
$$\int_0^t \frac{1}{L}dt = \int_0^I \frac{dI}{u_0 - IR}$$

$$\frac{t}{L} = -\frac{1}{R}\ln\frac{u_0 - RI}{u_0}$$

$$I(t) = \frac{u_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$







10. Elektromos energia előállítása és szállítása

$U = U_0 \sin \omega t$ $\qquad U_0 = 325\,V$ – csúcsfeszültség

$\omega = 314\ \frac{1}{s}$

$f = 50\,Hz$

- 3 fázisú váltakozó áram → villanymotoroknál használják

(R, S, T)

$$U_R = U_0 \sin \omega t$$

$$U_S = U_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

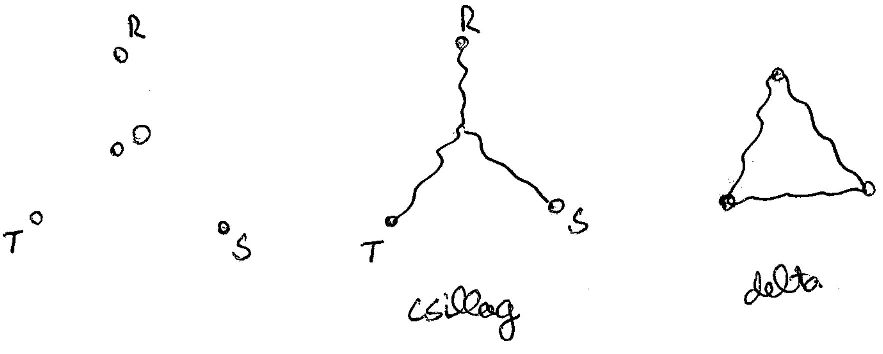
$$U_T = U_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

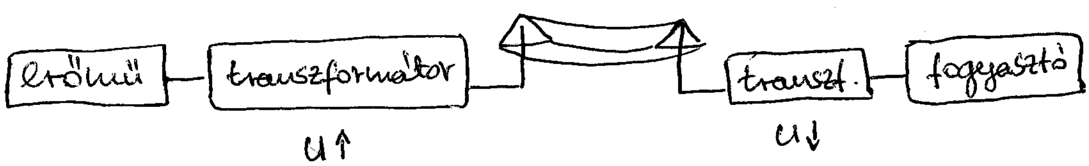
$$U_R + U_S + U_T = U_0 \Big(\sin \omega t + \overbrace{\cos \frac{2\pi}{3}}^{-\frac{1}{2}} \sin \omega t + \cancel{\sin \frac{2\pi}{3} \cos \omega t}$$

$$+ \overbrace{\cos \frac{2\pi}{3}}^{-\frac{1}{2}} \sin \omega t - \cancel{\sin \frac{2\pi}{3} \cos \omega t} \Big) = 0$$

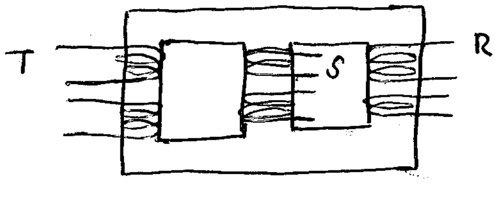
$$U_T - U_R = U_0 \left(\sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3} - \sin \omega t \right) = -U_0 \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$\sqrt{3} \cdot 230 \approx 400\,V$





transzformátor: 3 fázis × 2 tekercs (primer szekunder)



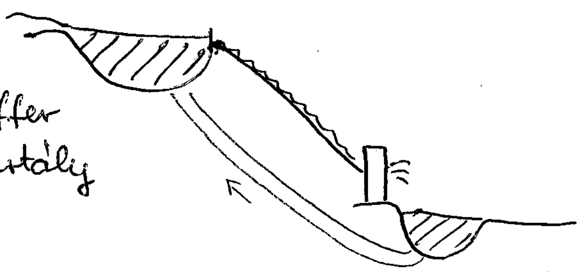
- fontos, hogy $U_R + U_S + U_T = 0 \rightarrow \Phi_R + \Phi_S + \Phi_T = 0$
- ha $\Phi_R + \Phi_S + \Phi_T \neq 0$ → zavarnák egymás terét

⇒ leromlana a hatásfok

- erőművek:
  - hőerőmű
    - szén → gőzturbina $\eta = 25\%$ (nem tiszta szén esetén egyéb anyagok → savaseső ☹)
    - földgáz (olaj) → gőzturbina (vizet melegít) / → gázturbina (levegőt melegít) ↳ gyorsabb } kombinált ciklusú $\eta = 75\%$ ⇓ „megfáradt" levegővel még vizet melegítenek
    - atomerőmű → gőzturbina
      → alacsony hatásfok
      kevesebb munkát végez, a hidegebb hőtartályt (folyók) jobban melegíti viszont
      → környezet ☹

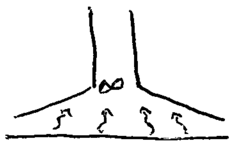
- alternatív források
  - vízenergia → sok víz kis esés (Duna, Tisza, Nílus)
    → kevés víz nagy esés (Alpok)

puffer tartály



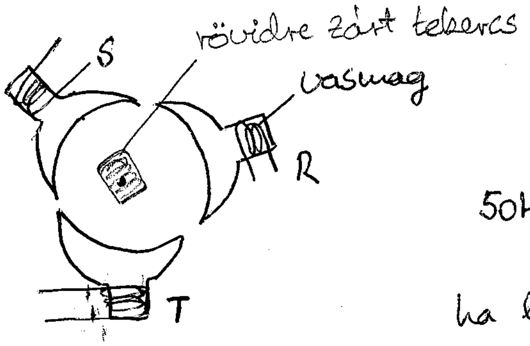
„akkumulátor"

  - napelemek, napelemek (alacsony hatásfok)
  - szélerőmű
  - sivatagokban



  - geotermikus erőmű (meleg vízből lehűlés után kicsapódnak az ásványok)
  - árapály / hullámerőmű
  - sókoncentráció

- villanymotorok:



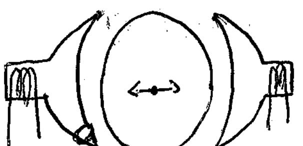
→ Lenz-tr. miatt utánafordul a forgó mágneses térnek

háromfázisú motor

50Hz → 3000 $\frac{1}{min}$

ha leterhelik 2950 $\frac{1}{min}$ 50 $\frac{1}{min}$ slip / csúszás

nagy teljesítményű gépeknél pl.: lift, esztergapad

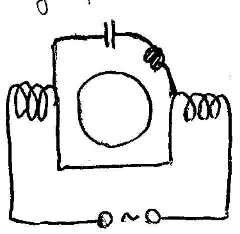


a, tojásmező → egymenetes rézdrót mivel kezdetben nem forogna, ez löki meg

egyfázisú motor

pl.: porszívó

b, segédfázis



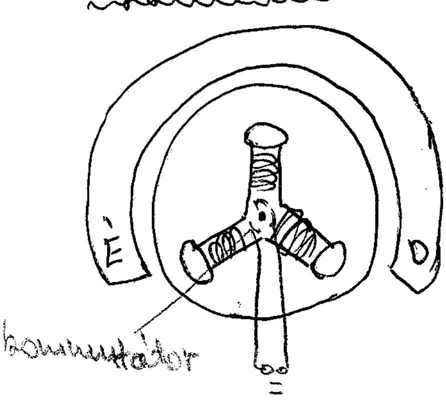
belökés után a segédfázist le lehet kapcsolni

→ de ennek a beltőnek alacsony az indítási nyomatéka

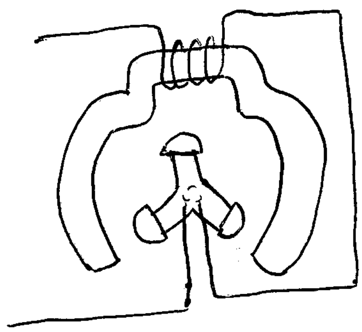
→ vonatoknál pl egy ilyen segédmotor mindig pörög (még ha áll is), ez hajt meg egy generátort ami meg egy 3 fázisú motort

→ ma viszont már egyenáramú motort használnak

egyenáramú motor



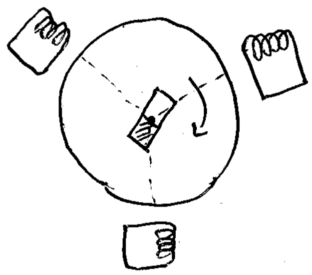
dinamó →



egyenáramú motornál: feszültség → tengely forog

dinamó: tengely forog → feszültség (ami végig nő)

generátor

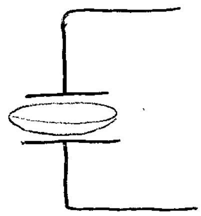


11. Elektromágneses hullámok

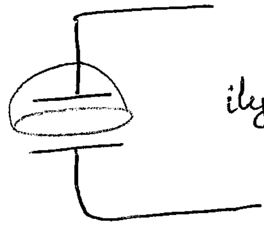
• *eltolási áram:*

$\rightarrow$ Honnan tudjuk, hogy $\oint \underline{H}\, d\underline{r} = I = \int \underline{j}\, d\underline{f}$ még nem teljesen jó?

a,



ilyen felületnél nincs áram



ilyen felületnél van áram

$\rightarrow$ pedig ugyan az a perem

$$\oint \underline{H}\, d\underline{r} \overset{!}{=} \oint \underline{H}\, d\underline{r}$$

b, $\quad \text{rot}\, \underline{H} = \underline{j}$

$\text{div rot}\, \underline{H} = 0 \qquad \text{div}\, \underline{j} \neq 0$

$\text{div}\, \underline{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ $\Rightarrow$ hogyan módosítsuk?

$$I = \frac{dQ_c}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} A \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$I = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} A = \underbrace{\frac{\partial D}{\partial t} A}_{\text{eltolási áram}}$$

$$I_{elt} = \frac{d}{dt} \int \underline{D}\, d\underline{f}$$

$$\Rightarrow I + \frac{d}{dt} \int \underline{D}\, d\underline{f} = \oint \underline{H}\, d\underline{r}$$

• *Maxwell-egyenletrendszer:*

$$\oint \underline{D}\, d\underline{f} = q \qquad \text{div}\, \underline{D} = \rho$$

$$\oint \underline{E}\, d\underline{r} = -\frac{d}{dt} \int \underline{B}\, d\underline{f} \qquad \text{rot}\, \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\oint \underline{H}\, d\underline{r} = I + \frac{d}{dt} \int \underline{D}\, d\underline{f} = \int \left[\underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}\right] d\underline{f} \qquad \text{rot}\, \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$\oint \underline{B}\, d\underline{f} = 0 \qquad \text{div}\, \underline{B} = 0$$

$$+ \quad \underline{D} = \varepsilon \underline{E} \qquad \underline{B} = \mu \underline{H}$$

$\underline{j} \overset{!}{=} 0 \quad \rho \overset{!}{=} 0$

$\mathrm{div}\, \underline{D} = 0 \quad \mathrm{div}\, \underline{B} = 0 \quad \mathrm{rot}\, \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \mathrm{rot}\, \underline{H} = \frac{\partial D}{\partial t}$ ha ε, μ is állandó

$\mathrm{div}\, \underline{E} = 0 \quad \mathrm{div}\, \underline{H} = 0 \quad \mathrm{rot}\, \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \quad \mathrm{rot}\, H = \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$

- Mivel láttuk hogy az elektromos-mágneses tér egymást gerjeszti, keressük a megoldást, mint z irányba terjedő hullám !

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\underline{H} = \underline{H}_0 \cos(\omega t - kz)$$

k: hullámszámvektor

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega t = kz$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{z}{t} = c$$

$$\omega = ck$$

$\rightarrow \quad \mathrm{div}\, \underline{E} = 0 \quad \underbrace{\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}}}_{0} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = k E_{0z} \sin(\omega t - kz) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{div}\, \underline{H} = 0$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = k H_{0z} \sin(\omega t - kz) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{H} = \begin{pmatrix} H_{0x} \\ H_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{E}, \underline{H} \perp k$ a terjedési irányra
$\rightarrow$ transzverzális
(nincs z komponens)

$\rightarrow$ most felveszem $\underline{E}$-t x irányba!

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega t - kz)$$

$$\mathrm{rot}\, \underline{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \qquad \underline{B} = \mu \underline{H}$

1, $k E_{ox} \cancel{\sin(\omega t - kz)} = \mu \omega H_{oy} \cancel{\sin(\omega t - kz)}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \qquad \underline{D} = \varepsilon \underline{E}$

2, $-k H_{oy} \cancel{\sin(\omega t - kz)} = -\varepsilon \omega \cancel{\sin(\omega t - kz)} \cdot E_{ox}$

1, + 2, $\Rightarrow \begin{pmatrix} k & -\mu\omega \\ \varepsilon\omega & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ox} \\ H_{oy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

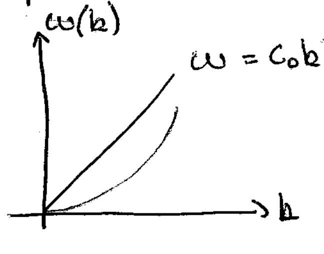
$\det = 0 \qquad -k^2 + \mu \varepsilon \omega^2 = 0$

a mátrix a vektort 0-ba viszi → nulla

$\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} k \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

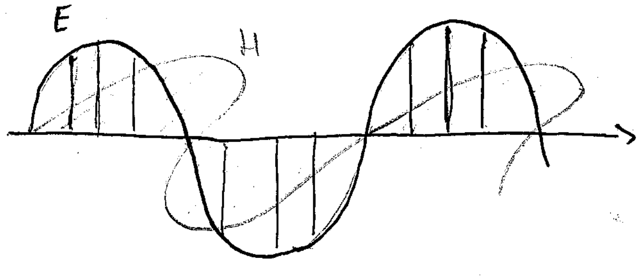
közegben $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{c_0}{n}$

- diszperziós reláció:

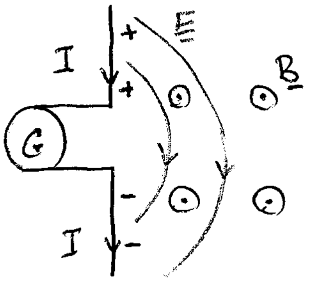


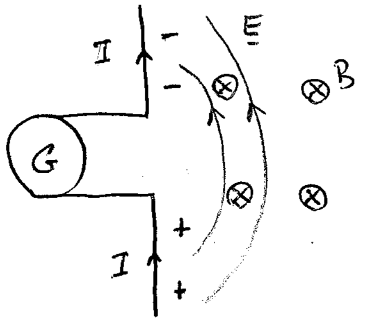
ha egyenes, nincs diszperzió

$\frac{H_{oy}}{E_{ox}} = \frac{\mu\omega}{k} = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$



- Herz-kísérlet → dipólantenna





⇒ vevő ||-os kell legyen az adóval

- hullámegyenlet

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad \to \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

$\underline{j} = 0$ $\quad \rho = 0$ $\quad \varepsilon, \mu =$ áll. esetén

$$\operatorname{div} \underline{E} = 0 \quad \operatorname{div} \underline{H} = 0 \quad \operatorname{rot} \underline{E} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \underline{H} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\to \underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot} \underline{E}} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} H$$

$$\cancel{\operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \underline{E}}_{0}} - \Delta \underline{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\cancel{\Delta E - \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0}$$

- 1D-ban (z irány)

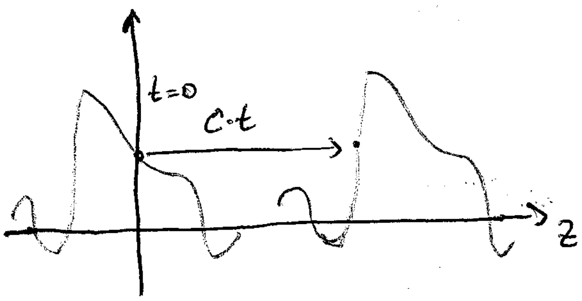
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t} = 0$$

$\phi = g(z+ct)$

$\forall\ \phi = f(z-ct)$, ahol f tetsz. fv. megoldás

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = f''(z-ct)\cdot 1 \cdot 1 \qquad \text{Áll. } \phi = f + g$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = f''(z-ct)\,c^2$$



$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} f(z-ct)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} E_0 \\ 0 \end{pmatrix} f(z-ct)$$

14. ea. 22:52

fv. alakja nem változik → $\forall f$ ua. sebbességgel terjed (nincs diszp.)

→ x, y-tól független → síkhullám

→ $\varepsilon, \mu =$ áll. → nincs diszperzió

- gömbhullám

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

Állítás: $\phi = \frac{f(r-ct)}{r}$ megoldás

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{f''(r-ct)}{r}$$

Δ = div grad

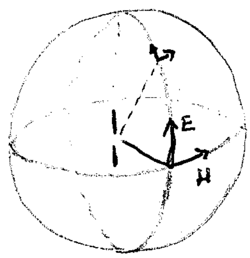
$$\mathrm{grad}\,\phi = \frac{f'(r-ct)\frac{\mathbf{r}}{r}r - f(r-ct)\frac{\mathbf{r}}{r}}{r^2} =$$

$$= \frac{f'(r-ct)r\mathbf{r} - f(r-ct)\mathbf{r}}{r^3} = \frac{f'(r-ct)\mathbf{r}}{r^2} - \frac{f(r-ct)\mathbf{r}}{r^3}$$

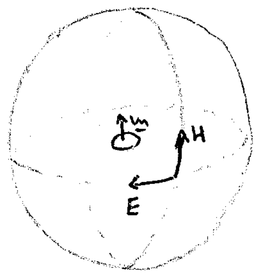
$$\mathrm{div\,grad}\,\phi = f''\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \cancel{f'\frac{3r^2 - \mathbf{r}2\mathbf{r}}{r^4}} - \cancel{f'\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\mathbf{r}}{r^3}} - \underbrace{f\,\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)}_{0} =$$

~ elektromos tér

$$= \frac{f''(r-ct)}{r}$$



elektromos dipól



mágneses dipól

- diszperzió $\varepsilon, \mu \neq$ áll $\rightarrow \varepsilon(\omega), \mu(\omega)$ $\quad n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$ $\quad \mu = 1$

$$n = \sqrt{\varepsilon(\omega)\cdot\mu(\omega)}$$

$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$

$-i\mathbf{k}\mathbf{E} = 0 \qquad -i\mathbf{k}\mathbf{H} = 0 \qquad -i(\mathbf{k}\times\mathbf{E}) = -i\mu\omega\mathbf{H} \qquad -i(\mathbf{k}\times\mathbf{H}) = i\varepsilon\omega\mathbf{E}$

$\mathbf{k}\mathbf{E} = 0 \qquad \mathbf{k}\mathbf{H} = 0 \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{E} = \mu\omega\mathbf{H} \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{H} = -\varepsilon\omega\mathbf{E}$

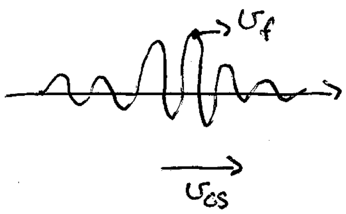
$\rightarrow \mathbf{k}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$ $\perp$-ek

$$\underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{E}) = \mu\omega (\underline{k} \times \underline{H}) = -\varepsilon\mu\omega^2 \underline{E}$$

$$\underbrace{\underline{k}(\cancel{\underline{k}\underline{E}})}_{0} - k^2 \underline{E} = -\varepsilon\mu\omega^2 \underline{E}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} k^2$$

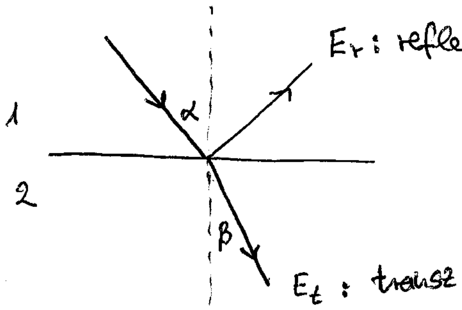
$$\omega = \omega(k)$$



$v_f = \frac{\omega}{k}$ fázissebesség

$v_{cs} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ csoportsebesség

- fénytörés



$\varepsilon_1 = n_1^2$

$\varepsilon_2 = n_2^2$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$\mu_1 = \mu_2$

$n_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}$

$n_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}$

$E_{t1} = E_{t2}$

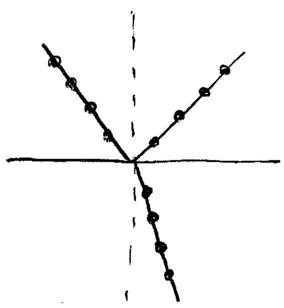
$D_{n1} = D_{n2}$

$H_{t1} = H_{t2}$

$B_{n1} = B_{n2}$

- polarizáció

↳ a, merőleges a beesés síkjára



Állítás: $\frac{E_r}{E} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\frac{E_t}{E} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

→ diszkusszió:

- azonos közeg

$\alpha = \beta \qquad E_r = 0 \qquad E_t = E$

- teljes visszaverődés

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \sin\beta = 1 \quad \cos\beta = 0$$

$$\frac{E_r}{E} = -\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1$$

- $\alpha, \beta \ll 1$ ⊥ beesés

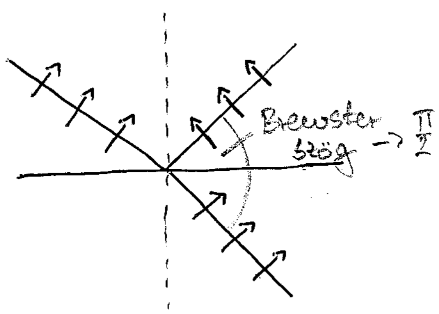
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \qquad \alpha = n\beta$$

$$\frac{E_r}{E} = -\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = -\frac{n\beta - \beta}{n\beta + \beta} = \frac{1-n}{1+n}$$

$$\frac{E_t}{E} = \frac{2\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{2n\beta}{n\beta + \beta} = \frac{2n}{1+n}$$

- opt. sűrűbb közeg $\alpha > \beta$ ellentétes fázis
  ritkább $\alpha < \beta$ azonos fázis

↳ b, ‖-os a beesés síkjára



$$\frac{E_r}{E} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{E_t}{E} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}$$

- azonos közeg $\alpha = \beta$

$$E_r = 0 \qquad E_t = E$$

- teljes visszaverődés $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{E_r}{E} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}-\alpha} = -1$$

- merőleges beesés $\alpha = n\beta$, $\alpha, \beta \ll 1$

$$\frac{E_r}{E} = -\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{1-n}{1+n}$$

$$\frac{E_t}{E} = \frac{2\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{2n}{1+n}$$

• Brewster-szög

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$E_r = -\frac{tg(\alpha-\beta)}{tg\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\frac{E_t}{E} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}\cos(\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)} = 1$$

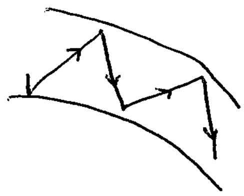
• sűrűbb $\alpha > \beta$ ellentétes fázis

ritkább $\alpha < \beta$ azonos fázis

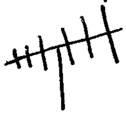
• elektromágneses spektrum:

hosszúhullám 300 kHz alatt Kossuth

rövidhullám 300 kHz – 3 MHz Szabad Eu.



VHF 30 – 300 MHz Yagi-antenna, TV



UHF 300 MHz – 3 GHz mikrohullám, mobil

infravörös (hőmérsékleti)

látható fény (nagyon szűk tartomány)

ultraibolya, röntgen, gamma → atommagon belülről

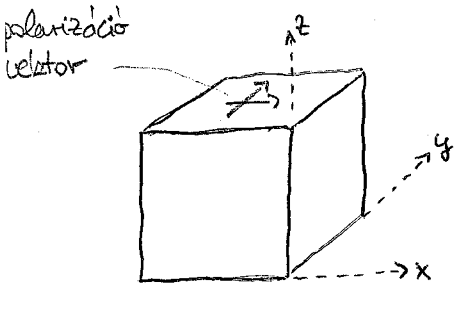
↳ elektronok pályaugrásai

• kettős törés (S-D. nem igaz)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$ kéttengelyű kettőstörés

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$ egytengelyű kettőstörés

főtengelyre transzformálva!



$$c_x = \frac{c}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}}$$

$$c_y = c_2 = \frac{c}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}}$$

Egyik irányba igaz S-D

másikban már nem!

→ ordinális / extraordinális sugár

→ egytengelyű mert ebbe az irányba azonos a terjedési sebesség (polarizáció)

12. elektromágnesség és relativitás-elmélet

$$\overset{1,}{\mathrm{div}\,\underline{B} = 0} \qquad \overset{2,}{\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}} \qquad \overset{3,}{\mathrm{div}\,\underline{D} = \rho} \qquad \overset{4,}{\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}}$$

$+ \quad \underline{D} = \varepsilon \underline{E}$

$\quad\ \ \underline{B} = \mu \underline{H}$

- Maxwell-egyenletek értelmezése potenciálokkal:

1, $\mathrm{div}\,\underline{B} = 0 \rightarrow \exists\, \underline{A}$ vektorpotenciál $\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$, mert $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{A} = 0$

2, $\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\underline{A} \Rightarrow \mathrm{rot}\left(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right) = 0$

mivel $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0$

$$\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \overset{!}{=} -\mathrm{grad}\,u$$

$$\boxed{\underline{E} = -\mathrm{grad}\,u - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}}$$

3, $\mathrm{div}\,\underline{D} = \rho$

$$\mathrm{div}\,\varepsilon\left(-\mathrm{grad}\,u - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right) = \rho$$

$$\Delta u + \mathrm{div}\,\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

4, $\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{A} = \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\left(-\mathrm{grad}\,u - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right)$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{A} - \Delta\underline{A} = \mu\underline{j} - \varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\underbrace{\Delta\underline{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}} - \mathrm{grad}\underbrace{\left(\mathrm{div}\,\underline{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial u}{\partial t}\right)} = -\mu\underline{j}}$$

__Lorentz feltétel:__

$$\mathrm{div}\,\underline{A} + \underbrace{\frac{1}{c^2}}_{\varepsilon\mu}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$\sim \quad \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \Delta\underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = -\mu\underline{j}$

Poisson

$\square$: D'Alembert-operátor

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \quad !$$

$$\Rightarrow \quad \square u = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad /\cdot \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \qquad \square \underline{A} = -\mu \underline{j} \quad /\cdot \frac{1}{\mu}\mathrm{div}$$

$$1, \quad \square \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad 2, \quad \square \frac{1}{\mu} \mathrm{div}\, \underline{A} = -\mathrm{div}\, \underline{j}$$

$$1,+2, \rightarrow \quad \square \frac{1}{\mu} \underbrace{\left(\mathrm{div}\, \underline{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \right)}_{=0 \text{ Lorentz feltétel}} = -\underbrace{\left(\mathrm{div}\, \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)}_{=0 \text{ kontinuitás egyenlet}}$$

$$\Delta u(\underline{r},t) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{megoldása} \quad u(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3\underline{r}'$$

$$\square u(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon} \quad \text{megoldása} \quad u(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3\underline{r}'$$

$\rightarrow$ retardált potenciál

$$\cancel{u(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho\left(\underline{r}', t + \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3\underline{r}'}$$

$\rightarrow$ avanzsált potenciál (értelmetlen)

- spec. relativitás elmélet alapja

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

$$\rightarrow \underline{r}^4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \qquad \underline{j}^4 = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \\ c\rho \end{pmatrix} \qquad \underline{A}^4 = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ \frac{u}{c} \end{pmatrix} \qquad \partial^4 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial ct} \end{pmatrix}$$

• Lorentz transzformáció: (levezetés nem kell)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

→ méterrúd rövidülése

$$x'_1 = 0 \qquad x'_2 = l \qquad t_1 = t_2$$

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0 \qquad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = l$$

$$l = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \quad l_{álló} = x_2 - x_1$$

$$l_{mért} = l \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

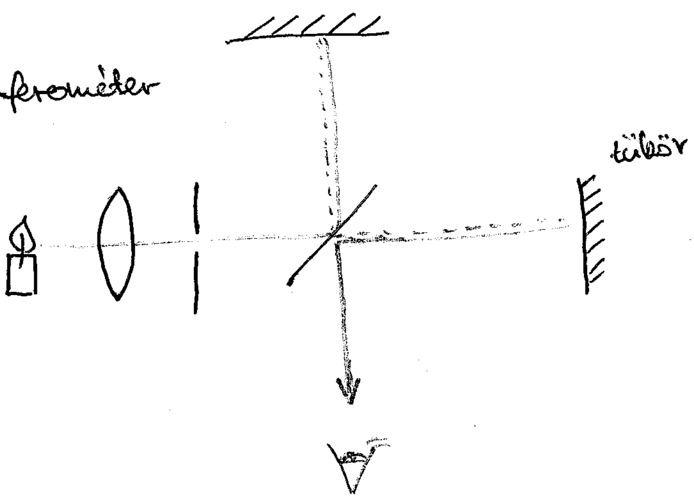
→ időrövidülés

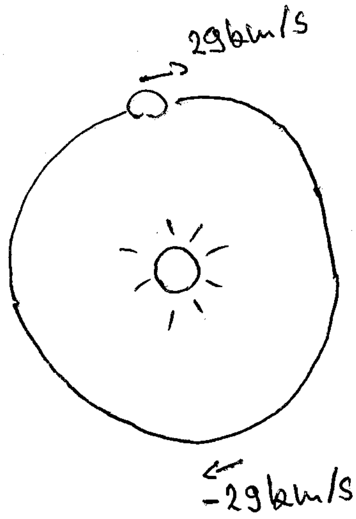
$$x' = 0 \qquad x = vt$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{v^2}{c^2}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

• Michelson-Morley kísérlet

interferométer





ugyan azt a képet látni fél év eltéréssel

13. Elektromágneses tér mint anyag

- elektromágneses tér energiája

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

energia sűrűség

$$\underline{F} = e\underline{E} + e(\underline{v}\times\underline{B}) \qquad /:V$$

$$\underline{f} = \rho\underline{E} + (\underline{j}\times\underline{B})$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j} + \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} \qquad \cdot\underline{v} \quad \underline{j} \,\hat{=}\, \underline{v}$$

$$-\underline{f}\underline{v} = -\rho\underline{E}\underline{v} = -\underline{j}\underline{E} = -\underline{E}\left(\mathrm{rot}\,\underline{H} - \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}\right) = \varepsilon E\frac{\partial E}{\partial t} - \underline{E}\,\mathrm{rot}\,\underline{H}$$

$$\mathrm{div}(\underline{E}\times\underline{H}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}E_jH_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}H_k + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial H_k}{\partial x_i}E_j = \underline{H}\,\mathrm{rot}\,\underline{E} - \underline{E}\,\mathrm{rot}\,\underline{H}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$$

$$\Rightarrow -\underline{f}\underline{v} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right) + \mathrm{div}(\underline{E}\times\underline{H}) - \underline{H}\,\mathrm{rot}\,\underline{E} = \mathrm{div}(\underline{E}\times\underline{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right)}_{\text{energia sűrűség}}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} = \mu\frac{\partial H}{\partial t}$$

a kontinuitás egyenlet

$$\underline{S} \stackrel{!}{=} \underline{E}\times\underline{H} : \text{Poynting vektor}$$

$$[\underline{S}] = \frac{\text{Watt}}{m^2}$$

energia áramlás vektora

- impulzus

$$\underline{f} = \rho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B} = \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\underline{D}\times\underline{B})}_{g} + \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}$$

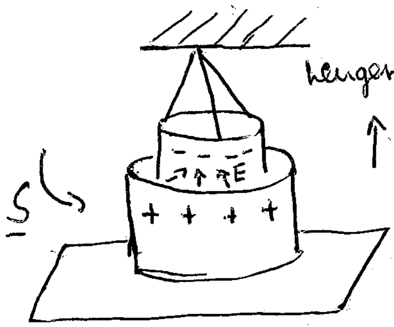
g: impulzus sűrűség

$$\rho = \mathrm{div}\,D$$

$$\underline{j} = \mathrm{rot}\,\underline{H} - \frac{\partial D}{\partial t} \quad \ldots$$

- impulzusmomentum

$$\underline{f}\times\underline{r}$$



henger kondenzátor → kisütés után a kondenzátor forgásba jön

$\uparrow \underline{H}$ $\quad \underline{S} = \underline{E}\times\underline{H}$

(a kisütő áramra erő hat)

• Einstein - de - Haas kísérlet

I. $\uparrow \underline{B}$

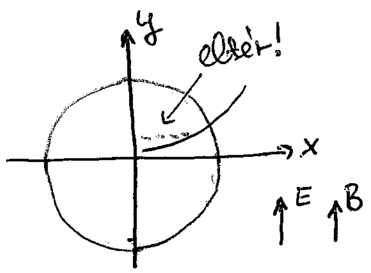
II. $\underline{B}\downarrow$

vas is átmágneseződik → forgásba jön

(elektronok spinjére következtetések)

14. Az elektromos töltés

- Thomson parabola



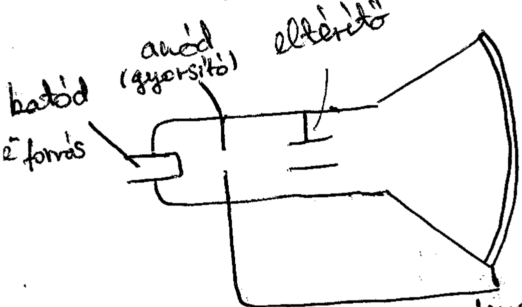
$$\left.\begin{array}{l} F = ma \\ s = \frac{a}{2}t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{eE}{2m}t^2 = \frac{eE}{2m}\frac{\ell^2}{v^2}$$

$$x = \frac{evB}{2m}t^2 = \frac{eB}{2m}\frac{\ell^2}{v}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{E2m}{eB^2\ell^2}x^2 \quad \text{parabola}$$

eltérés oka: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

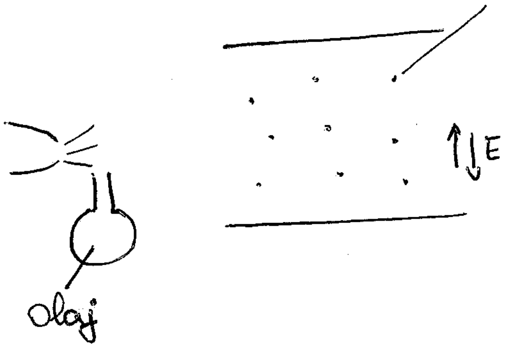
- katódsugárcső



összekötik → potenciál különbség nulla
(ne gyorsuljon tovább az e^-)

- Millikan-kísérlet

súrlódik a levegővel
→ feltöltődik



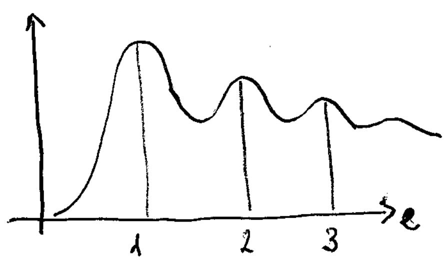
$$mg = F_{közeg} = \underbrace{6\pi\eta r}_{S} v_3 \qquad m = \frac{4}{3}r^3\pi\rho$$

$$eE + mg = Sv_1$$

$$-eE + mg = -Sv_2$$

v_1, v_2, v_3 megmérte

$$mg = Sv_3 \rightarrow r \rightarrow e$$



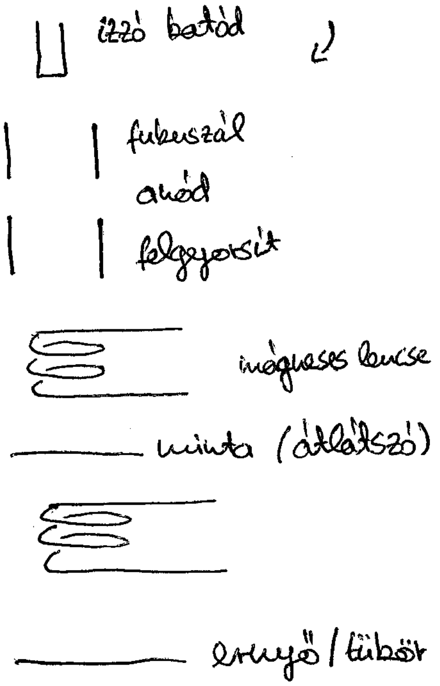
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

+ Faraday állandó

⇒ Avogadro szám

⇒ rács állandó

∘ elektronmikroszkóp (transzmissziós)

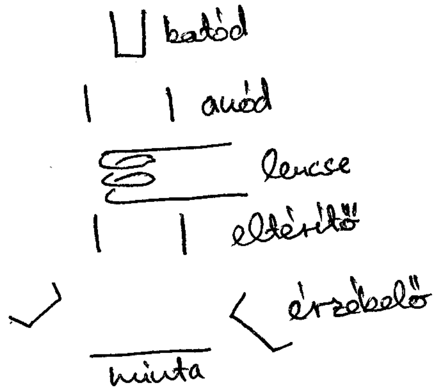


képalkotás

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}$$

ezt tudom állítgatni

pásztázó



∘ töltés mozgása elektromos és mágneses térben:

$$F_L = q(\underline{v} \times \underline{B})$$

a, $\underline{v} \perp \underline{B}$

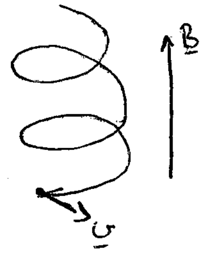
$$m a_{cp} = \frac{m v^2}{R} = q v B$$

fajlagos töltés

$$R = \frac{m v}{q B}$$

b, $\underline{v} \parallel \underline{B} \Rightarrow F_L = 0$

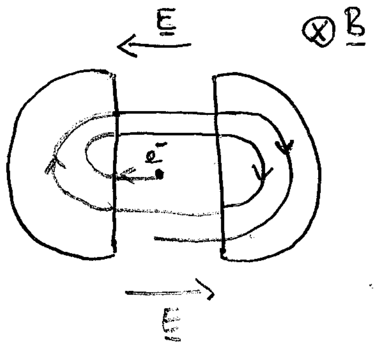
c, $\underline{v}, \underline{B}$ α szöget zár be



d, erre az egészre még rákapcsolok

$$\underline{F} = q\underline{E}$$

∘ ciklotron/gyorsítók

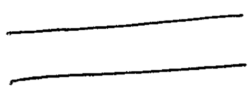


tömegnövekedés miatt → szinkron ciklotron

15. nagyfrekvenciás tér vezetőkben

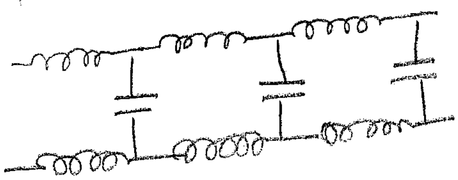
- tápvonalak: rádiófrekvenciás jel továbbítása
  probléma: áram szállítása közben a tér szétszóródik
  → energiaveszteség (frekvencia növelésével egyre jobban)

a, párhuzamos



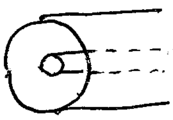
sodrott, sodortalan

tápvonal:



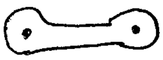
hullámellenállás:
$\sqrt{\frac{L}{C}}$

b, koaxiális



$R_1 < R_2$

c, szalagkábel



- skin-effektus (bőrhatás)
  lényeg: nagy frekvenciás tér nem tud behatolni az anyagba
  (nem árnyékolás!)

$$\text{rot}\,\underline{E} = -\mu \frac{d\underline{H}}{dt} \longrightarrow \text{rot}\,\text{rot}\,\underline{E} = -\mu \frac{d}{dt}\,\text{rot}\,\underline{H} = -\mu\sigma \frac{d\underline{E}}{dt}$$

$$\text{rot}\,\underline{H} = \underline{j} + \cancel{\frac{d\underline{D}}{dt}} = \sigma \underline{E}$$

$$\cancel{\text{grad}\,\underbrace{\text{div}\,\underline{E}}_{0}} - \Delta \underline{E} = -\mu\sigma \frac{d\underline{E}}{dt}$$

keressük a megoldásokat

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i\omega t}$$
$$\underline{E} = \underline{E}_1 e^{-\lambda t} \quad \text{alakokban}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 \cancel{\underline{E}_1} = i\mu\sigma\omega \cancel{\underline{E}_0}$$

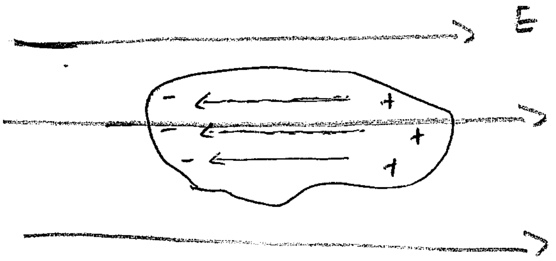
$$\lambda = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu\sigma\omega}$$

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_1 e^{-i\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}x} e^{-\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}x}$$

$$d = \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad \text{lecsengés hossza}$$

pl.: réz $f = 50\,Hz$ $d = 12\,mm$
$f = 5\,MHz$ $d = 40\,\mu m$
$f = 1{,}8\,GHz$ $d = 2\,\mu m$

◦ árnyékolás



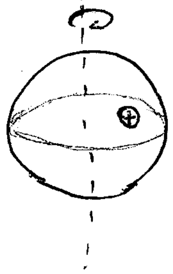
a megosztás miatt a fémtest belsejében lévő $\underline{E}$ és a külső $\underline{E}$ kiejtik egymást

→ pl.: Faraday-kalitka

16. Elektromágneses környezeti jelenségek

• Föld mágneses tere

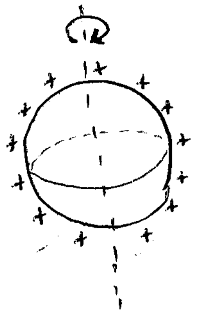
kezdetben pici inhomogenitás



$\longrightarrow$ forgás miatt köráram

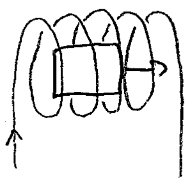
$\Downarrow$

$\underline{B}$



önerősítő folyamat

• dinamóhatás



kezdetben gyenge $\underline{B}$ → ebben mozgatunk egy vezetőt

⇒ feszültség / áram indukálódik

⇒ ezt rákapcsoljuk a tekercsre

⇒ B nő

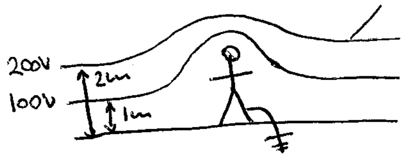
(öngerjesztés)

• sztatikus tér a felszínhez közel

$E = 100 \frac{V}{m}$

$j = 10 \frac{pA}{m^2}$

ekvipot vonalak



az ember jó vezető a levegőhöz képest

$I = j \cdot A = 10 \frac{pA}{m^2} \cdot 4\pi (6370\,km)^2 \approx 5000\,A$ mi okozza ezt?

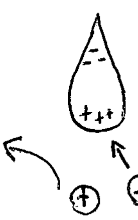
Franz Hess 1912. léggömbbel felmegy

→ felfelé egyre nagyobb

→ kozmikus sugárzás (Nobel-díj)

• villámok

esőcsepp ⇒ negatív lesz



$\downarrow \underline{v}$

⊕ ⊖ ionok

talaj

elővillám ionizál

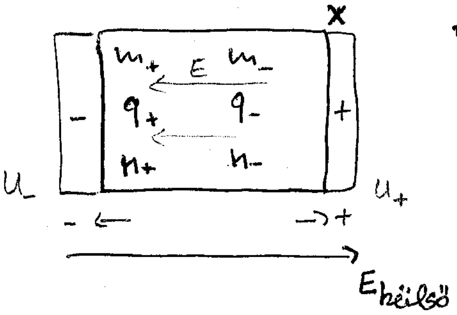
második lecsap

felmelegedett levegő tágul

→ dörgés

• Szent Elmo tüze (csúcshatás miatt)

- plazmák és rezgéseik



töltés tömege (m), töltése (q), sűrűsége (n) $[n] = \frac{db}{m^3}$

→ összességében semleges

$$n_+ q_+ + n_- q_- = 0$$

$$\oint \underline{D}\, d\underline{A} = Q \qquad DA = Q$$

$$D = enx$$

$$E = \frac{enx}{\varepsilon}$$

$$m\ddot{x} = -eE = -\frac{e^2 n x}{\varepsilon}$$

$$\ddot{x} = -\frac{e^2 n}{\varepsilon m} x \qquad \omega_{plazma} = \sqrt{\frac{e^2 n}{\varepsilon m}}$$

Ionoszféra – ritka plazma $f = 3-10\ MHz$

fém – sűrű plazma $f = 3 \cdot 10^{14}\ Hz$