

***Megjegyzés:

Ez egy rövid összefoglaló a 2017 tavaszában leadott anyagról, nem 100%-os, 1-2 apró rész hiányzik belőle, illetve jópár magyarázatot, és levezetést nem tartalmaz, valamint érdemes kiegészíteni a szükséges ábrákkal, rajzokkal. A fő képletek szerepelnek benne, de elírások, elgépelések, körintegrál helyett sima integrál, stb... előfordulhatnak, valamint megeshet, hogy másképpen lettek jelölve bizonyos mennyiségek. Csak ez az összefoglaló nem biztos, hogy elegendő egy sikeres vizsgához, és nem helyettesít egy teljes egyéni tételkidolgozást levezetésekkel, bizonyításokkal, elmélettel, ábrákkal, de remélem valamennyire nektek is hasznotokra lesz ez a PDF.

Képlettár a félév első feléhez:

E vákum	B vákum	E anyag	B anyag
$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{ \underline{r} }$	$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\underline{s} \times \underline{r}}{ \underline{r} ^3}$	$Q_p = \underline{P}f$	$\underline{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \underline{m}_i$
$\underline{E} = \frac{\underline{F}}{Q}$	$ \underline{B} = \frac{M_{\max}}{I f}$	$Q_{\text{polarizáció}} = \underline{P}f$	$I_m = \frac{\underline{M}l}{\underline{I}}$
$\oint \underline{E} d\underline{l} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$	$\oint \underline{B} d\underline{l} = 0$	$\underline{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \underline{P}$	$\underline{B}_m = \mu_0 \underline{M}$
$\oint \underline{E} d\underline{l} = 0$	$\oint \underline{B} d\underline{l} = \mu_0 \int \underline{j} d\underline{l}$	$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$	$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M}$
$\Phi(\underline{l}) = -\int_0^V \underline{E} d\underline{l}$	Mert nem konzervatív.	$\oint \underline{D} d\underline{l} = \int \rho_{sz} d\underline{l}$	$\oint \underline{H} d\underline{l} = \int \underline{j}_{sz} d\underline{l}$
$\underline{E} = -grad\Phi$	—	$\underline{P} = \epsilon_0 \chi \underline{E}$	$\underline{M} = \chi_m \underline{H}$
$\underline{p} = Qa$	$\underline{m} = If$	$\epsilon = 1 + \chi$	$\mu = 1 + \chi_m$
$U_{pot} = -p\underline{E}$	$U_{pot} = -m\underline{B}$	$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$	$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0 \mu}$
$\underline{M} = \underline{p} \times \underline{E}$	$\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}$	$\underline{E}_p = -\chi \underline{E}$	$\underline{B}_m = \mu_0 \chi_m \underline{H}$
$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$	$u = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$	$u = \frac{1}{2} \underline{D} \underline{E}$	$u = \frac{1}{2} \underline{B} \underline{H}$

***1. elektrosztatika, az elektromos töltés fogalma, térerősség, fluxus, potenciál

Elektrosztatikában a töltések állandóak, nem mozognak.

Elektromos töltés fogalma:

Elektromos állapotok: +, -, semleges Töltések: +, -

Az azonosak taszítják, az ellentétesek vonzzák egymást. (Benjamin Franklin) A töltésmennyiség jele: Q . $[Q] = C$

Coulomb kísérletből: $F \sim \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ $F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{r}{|r|}$ **k-t** 1979-ben határozták meg.

Coulomb törvény (két pont között fellépő erő): $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{r}{|r|}$, ahol ϵ_0 a vákuum permittivitása.

Szuperpozíció elve: $\underline{F}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{Q_i Q_j}{(\underline{r}_i - \underline{r}_j) |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$ Egy Q_i töltésre ható eredőerő megegyezik a többi töltés és közte

fellépő erők vektori összegével.

Térerősség: Az elektromos térerősség: $\underline{E}_i(\underline{r}) = \frac{\underline{F}_e(\underline{r})}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{(\underline{r} - \underline{r}_j)^2} \frac{\underline{r} - \underline{r}_j}{|\underline{r} - \underline{r}_j|}$ $[E] = \frac{N}{C}$

n töltés létrehoz egy elektromos teret, az ebbe helyezett Q töltésre $F=EQ$ erő hat. Az elektromos térerősséget erővonalakkal jellemezhetjük az erővonalak töltésből indulnak ki és töltésben érnek véget, vagy a végtelenbe tartanak, tehát az elektromos tér **forrásos**, és **örvénymentes**. A sűrűségük arányos a térerősséggel.

Ha a ponttöltés a felület belsejében van: $\oint_F \underline{E} d\mathbf{f} = \sum_i \frac{Q_i}{\epsilon_0}$

Ha a ponttöltés a felületen kívül van: $\oint_F \underline{E} d\mathbf{f} = 0$

Fluxus: Az elektromos térerősség zárt felületre vett integrálja a fluxus: $\Phi = \oint_F \underline{E} d\mathbf{f}$ $[\Phi] = Vm$

Potenciál: $\Phi = -\int_0^r \underline{E}(\underline{r}) d\underline{r}$ $[\Phi] = V$

Potenciálkülönbség: $U = \Phi_2 - \Phi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \underline{E} d\underline{r}$

Ponttöltés potenciálja: $\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\underline{r}|}$, tehát $\frac{1}{r}$ -esen cseng le.

Térerősség potenciálból: $\underline{E} = -grad\Phi = -\nabla\Phi$

Potenciálfüggvényben nem lehet szakadás, csak törés. Ahol Φ -nek törése van, ott **E**-nek szakadása.

Potenciális energia: $U^{(p)} = Q\Phi^{(p)}(\underline{r})$

Gradiens sorfejtés: $\Phi(\underline{r} + \Delta\underline{r}) = \Phi(\underline{r}) + (grad\Phi) \cdot \Delta\underline{r}$

Ekvipotenciális felület: **E** és **Φ** mindig merőlegesek egymásra, és **Φ** állandó. Ezen a felületen mentén a munkavégzés 0, de onnan kiszakítani töltéseket nagyon nehéz.

***2. az elektrosztatika két alaptörvénye, dipólus

Elektrosztatika I (Gauss-törvény): $\oint_F \underline{E} d\vec{f} = \sum_i \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$

Ha egy gömb felületére felviszek Q töltést, a gömbön belül $\underline{E}=\underline{0}$, azon kívül megegyezik azzal, mintha a töltések a gömb közepén helyezkednének el (ponttöltés), és $\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ -esen cseng le. ($r=R$ esetén gond van, ott függvény nincs értelmezve.)

Egyenletesen kitöltött R sugarú gömb esetében azon belül $\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r$ -esen lineárisan nő, azon kívül

$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ -esen cseng le.

Ezekből következik, hogy nem tudom megmondani, hogy az $\underline{E}$ ponttöltéstől, gömbhéjtól, vagy tömör gömbtől származik.

Elektrosztatika II: $\oint_G \underline{E} d\vec{r} = 0$ Nyugvó töltések esetén egy megadott vonal mentén egy töltést $\underline{a}$ -ból $\underline{b}$ -be mozgatni

$\underline{W}$ munkába kerül. $W_1 = Q \int_{G_1}^B \underline{E} d\vec{r} = W_2 = Q \int_{G_2}^A \underline{E} d\vec{r}$

Zárt görbe mentén az energia megmaradás törvényéből is egyértelműen következik, hogy ezen munkának 0-nak kell lennie. Mely kimondja, hogy az elektrosztatikus tér **örvénymentes**.

Illetve ha $\underline{W}=\underline{0}$, akkor az erőter konzervatív. Akármilyen úton haladva $\underline{a}$ -ból $\underline{b}$ -be ugyan annyi munkát kell elvégezni. Az elektrosztatikus tér konzerválja a részecske kinetikus és potenciális energiájának összegét.

Dipólus: 2db azonos nagyságú, különböző előjelű töltés, amelyek között állandó a távolság van, össz. töltése 0. (a általában néhány Ångström méretű.)

Dipólmomentum: $\underline{p} = Qa$ Vegyünk egy P pontot a dipólus $+Q$ töltésétől r_2 , $-Q$ töltésétől r_1 távolságra. Ebben a P

pontban a potenciál, ha $|r_1|, |r_2| \gg |a|$: $\Phi_P(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|r_1|} - \frac{Q}{|r_2|} \right)$

Dipól elektromos tere: $\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r}}{|\underline{r}|^5} - \frac{\underline{p}}{|\underline{r}|^3} \right)$ a sugár $\frac{\underline{p}}{|\underline{r}|^3}$ pedig $\underline{p}$ irányú. $\underline{E} \sim \frac{1}{|\underline{r}|^3}$

Dipól potenciálja: $\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$, tehát $\Phi \sim \frac{1}{|\underline{r}|^2}$

Gauss-féle főhelyzetek I: $\underline{E}_I = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{p}}{|\underline{r}|^3}$

II: $\underline{E}_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\underline{p}}{|\underline{r}|^3} - \frac{\underline{p}}{|\underline{r}|^3} \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\underline{p}}{|\underline{r}|^3}$

Dipólus homogén elektromos $\underline{E}$ térben: $\sum \underline{F} = 0$, de mivel $\underline{F}$ -ek nem egy hatásvonalúak hatni fog forgatónyomaték:

$\underline{M} = (\underline{r} + \underline{a}) \times \underline{F}_+ - \underline{r} \times \underline{F}_- = (\underline{r} + \underline{a}) \times Q\underline{E} - \underline{r} \times Q\underline{E} = Q(\underline{r} + \underline{a} - \underline{r}) \times \underline{E} = \underline{p} \times \underline{E}$, tehát befordul a tér irányába.

Inhomogén térben: $\underline{E}(\underline{r}) \neq \text{áll} \rightarrow \sum \underline{F} \neq 0$, tehát a dipólusra hatni fog erő, és a tömegközéppontja elmozdul.

$\underline{F} = QE(\underline{r} + \underline{a}) - QE(\underline{r})$ $F_x = QE_x(\underline{r} + \underline{a}) - QE_x(\underline{r}) = Q(E_x(\underline{r} + \underline{a}) - E_x(\underline{r})) = Q \text{grad}(E_x) \underline{a}$

Az elektromos tér beszívja a dipólust, amerre nő az $\underline{E}$, arra "megy". Eredmény: 0 töltésű objektumra inhomogén elektrosztatikus térben erő hat. Vonzó Coulomb erő kicsit nagyobb lesz mint a taszító.

Dipólus potenciális energiája elektromos térben: $U_{dip} = Q\Phi(\underline{r} + \underline{a}) - Q\Phi(\underline{r}) = -\underline{p} \cdot \underline{E} = Q \text{grad}(\Phi) \underline{a}$

***3. elektrosztatikus tér fémekben

Ha egy elektromosan semleges fémet külső elektromos térbe helyezek, kb. $10^{-7} s$ alatt "kialakul egy dipólus", mert megjelenik belső elektromos tér, amit a szétválasztott töltések hoznak létre (influenca).

$|\underline{E}_k| \rightarrow |\underline{E}_b| \rightarrow \sum F = 0 \rightarrow |\underline{E}_b| + |\underline{E}_k| = 0 \rightarrow |\underline{E}| = 0$ Tehát töltéselrendeződés addig zajlik, amíg E nem lesz 0. Ekkor a teljes fém test ekvipotenciális (de a töltések mindig a felületen oszlanak el), és rajta kb. 0 erővel lehet töltést mozgatni, kiszakítani viszont nehéz. Az erővonalak merőlegesen érkeznek, és távoznak a fémfelületről.

Ekkor definiálom a felületi töltéssűrűséget: $\eta = \frac{dQ}{df} \rightarrow Q = \int dQ = \int_F \eta df$ Egy kis hengerre a fém felületén a Gauss-

törvény: $\oint \underline{E} df = \int_{\text{alap}=0} + \int_{\text{fedő}} + \int_{\text{palást}=0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \eta df \rightarrow \eta = \epsilon_0 E$ Ahol járulék csak a kis henger fedőlapjára van. Ebből azt

kapjuk, hogy csak 1 fajta módon kenhetem el a töltéseket a fém felületén.

Tükör töltés módszere: Veszek dipólust, aminek szimmetriatengelye a fém felülete, ezt felosztom koncentrikus körgyűrűkre, mert azokon a függvény állandó.

$$Q^* = \int_F \eta df = \int_F -\epsilon_0 E df = \int_F -\epsilon_0 \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} df = -\frac{Qd}{2\pi} \int_0^\infty \frac{r}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi dr = -Qd \left(\frac{-1}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right)_0^\infty = -Q$$

Gömb esetén, amikor veszek egy $+Q$ és $-Q$ töltést, az egyikből a másikba futó erővonalak egy Q^* töltés körül, egy

Appollóniusz körön vannak. $\frac{Q^*}{Q} = \frac{r_2}{r_1} = \text{áll}$

Eddig töltetlen fémtest külső térben, most $\sum Q \neq 0$, de nincs külső tér. Ilyen esetben is a felületen helyezkednek el a töltések, tehát töltött fémen belül nem lesz töltés.

Árnyékolás kísérlet: Nem tömör fémtesten Q töltés, belevágunk üveget, majd felvesszünk egy G görbét, amely tartalmazza a fém, és üveg egy részét is, és alkalmazzuk elektrosztatika II-t:

$$\oint_G \underline{E} d\underline{r} = 0 \rightarrow \int_{\substack{B \\ \text{fém}}} \underline{E} d\underline{r} + \int_{\substack{A \\ \text{üveg}}} \underline{E} d\underline{r} = 0 \text{ De nem egyértelműen következik, hogy mert } \int_{\substack{B \\ \text{fém}}} \underline{E} d\underline{r} = 0 \text{ biztos igaz,}$$

$\int_{\substack{A \\ \text{üveg}}} \underline{E} d\underline{r} = 0$ is igaz! De mivel végtelen módon felvehetem a G görbét, ez csak úgy valósulhat meg, ha biztos, hogy

$$\int_{\substack{A \\ \text{üveg}}} \underline{E} d\underline{r} = 0, \text{ tehát a fém, az üvegben is } 0.$$

Kísérletben lemezt feltöltöm, az alumínium csíkok elmozdulnak, de ha bazárom, a belül lévőek lekonyulnak, mert nincs E . Illetve ha hajas babát fém ketrecbe rakom, ott is $\underline{E} = 0$.

Csúcs hatás: Két gömb nagyon messze egymástól: $\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1}$, illetve $\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}$.

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}, \text{ és mivel } Q_{1,2} = \eta_{1,2} 4\pi R_{1,2}^2, \text{ ezért } \eta_1 R_1 = \eta_2 R_2, \text{ vagyis } \eta R = \text{áll}.$$

Egy felületen a görbe adott pontjához mindig hozzárendelhetünk egy simulókört. Ahol a simulókör sugara kicsi, ott a felületi töltéssűrűség nagy, de mivel $\eta = \epsilon_0 E$, ahol kicsi a görbületi sugár, úgy ott egységnyi felületből sokkal több erővonal fog eredni. Ez az alapja a villámhárítónak.

Elektromos szél kísérlet! Csúcs hatással felerősítettük az effektust.

***4. elektrosztatikus tér szigetelők jelenlétében, dielektrikumok polarizációja, elektromos eltolódás-vektor

A szigetelőkben nincsenek mozgóképes (érdemi töltések), semlegesek. Ionos, vagy kovalens kötés köti össze őket. De a molekulák a felületén polarizálódhatnak. Szigetelőt belehelyezek külső térbe, benne dipólusok fognak a tér irányába befordulni. Tehát ha elfűrészelek szigetelőt külső elektromos térben, nem fogom tudni szétválasztani a töltéseket, mint a fémek esetében.

Elektrosztatika alaptörvénye szigetelők esetén: $\underline{P} = \frac{1}{V} \sum_i \underline{p}_i$, ahol $\underline{P}$, a térfogategység polarizációja (vagy eredő

dipólmomentum, vagy elektromos polarizációs vektor), $\underline{p}$ pedig a dipólmomentum. $[P] = \frac{C}{m^2}$

Szigetelők esetén a belső tér nem 0, hanem megjelenik egy polarizációs tér, de az nem egyezik meg a külső elektromos térrel. $|E| \neq |E_p|$

Az eredő dipólmomentum: $\underline{p}_e = \underline{P}V = \underline{P}lf = \underline{P}lfn$ Az eredő "szuper" dipól pedig, amikor 1 dipóllal helyettesítem:

$Q_p l = P(fl)$ ez alapján a téglatest felületén megjelenő polarizációs töltés: $Q_p = \underline{P}f$, ha ezt leosztom a felület nagyságával, megkapom a felületi polarizációs töltéssűrűséget: $\eta_p = \underline{P}n$, ahol $\underline{n}$, továbbra is a felület normál

komponense. Ebből: $E_p = -\frac{\eta_p}{\epsilon_0} = -\frac{Pn}{\epsilon}$, ami azért negatív, mert ellentétes irányú a $\underline{p}$ -vel. Mivel a szabad töltéseket

én mozgathatom, a polarizációsak tőlem függetlenek, a Gauss törvény most: $\sum_i Q_i = \sum_i Q_i^{szabad} + Q_i^{polarizációs}$, miatt

$\oint_F E d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i^{szabad} - \frac{1}{\epsilon_0} \int_F \underline{P}_n d\vec{f}$, mivel $\underline{V}$ -ben az összes polarizációs töltés: $-\sum_i Q_i^p$. Végül, mivel a polarizációs

csak a téglatest 2 oldalára van járuléka, bezárhatom: $\int_F \underline{P}_n d\vec{f} = \oint_F \underline{P} d\vec{f}$ $\oint_F (\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}) d\vec{f} = \sum_i Q_i^{szabad}$, ami helyett

bevezetem: $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$, ahol $\underline{D}$ az **elektromos eltolódásvektor**. $[D] = \frac{C}{m^2}$

Ezáltal a Gauss-törvény $\oint_F \underline{D} d\vec{f} = \int_V \rho_{sz} dV = Q^{szabad}$

$\underline{D}$ ábrázolása kondenzátorban: Az $\underline{E}$ vektorok forrásai a szabad pozitív töltések a szigetelőkben. $\underline{E}$ vonalak egy részéből $\underline{P}$ vonal lesz. A $\underline{D}$ vektorokat az anyag belsejében olyan sűrűn rajzolom be, mint a vákuumban az $\underline{E}$ -t.

II. alaptörvény dielektrikumokra kísérletileg bebizonyítva ugyanúgy érvényes: $\oint_G \underline{E} d\vec{r} = 0$

Tapasztalat alapján: $|\underline{P}| \sim |\underline{E}|$, illetve $\underline{P} \sim \underline{E}$, előbb utóbb minden dipól beáll a tér irányába. De mivel $[P] \neq [E]$,

$\underline{P} = \epsilon_0 \chi \underline{E}$, χ az adott anyag/dielektrikum elektromos szuszceptibilitása, ami megadja az anyag polarizálhatóságát.

Dimenziótlan pozitív mennyiség. Üveg: 5-7, Papír: 3-5, Víz: 80, Vákuum: 0, BeTi: 1000, Levegő: $5 \cdot 10^{-4}$, tehát a levegőben is megjelenhetnek dipólmomentumok. $\underline{D}$ és $\underline{E}$ között a következő összefüggés áll fenn:

$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \chi \epsilon_0 \underline{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$, ahol ϵ a relatív dielektrikus állandó.

Dielektrikummal kitöltött síkondenzátor: $C = \frac{Q}{U} = \frac{\eta A}{Ed} = \frac{\epsilon_0 \epsilon A}{d} = C_0 \epsilon$ Kísérletből: $\epsilon = \frac{U}{U_0}$ továbbá $D = \eta$

Innen: $u_{dielektrikum} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \underline{E} \underline{D} = \frac{1}{2} \underline{E} (\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \underline{E} \underline{P}$, vagyis a polarizáció következtében megjelenik

egy második tag, ami jócskán meghaladhatja az elsőt. A polarizált dielektrikum is képes tárolni energiát.

Kísérlet: Leydeni-palack

+++Kondenzátor kitöltése 2 féle dielektrikummal!

***5. kapacitás, kondenzátorok, energiasűrűség

Kapacitás: Két ellentétes töltésű vezető között nyilvánvalóan potenciálkülönbség van. Ha a két lemezen a Q-t megkét-szerezünk, a térerősség is és ez által a munka is kétszeresére nő. Ebből rögtön látjuk, hogy Q és U között

egyenes arányosság van. $U = \Phi_2 - \Phi_1 = - \int_{(1)}^{(2)} \underline{E} d\underline{r} = - \int_{(1)}^{(2)} Qf(\underline{r}) d\underline{r} = - \frac{Q}{C}$, ahol f(r) geometriai paramétereket takar.

Ebből: $C = \left| \frac{Q}{U} \right|$ $[C] = \frac{C}{V} = F$

Egy kondenzátor lemezei közötti tér homogén (a lemezek méretéhez képest egymáshoz közel helyezkednek el, és nem a kondenzátor széleinél vizsgáljuk a teret).

Kondenzátor:

Síkkondenzátor: Mivel elektromos tér közel homogén: $U = E \int_{(1)}^{(2)} d\underline{r} = Ed$, illetve az elektromos tér: $E = \frac{\eta}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$,

mert $\eta = \epsilon_0 E = \frac{Q}{A}$. Ezáltal a kapacitás: $C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

Gömbkondenzátor: $U = \Phi_2 - \Phi_1 = - \int \underline{E} d\underline{r} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \left| \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right| \rightarrow C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

Magányos gömb esetében: $R_1 = R$ és $R_2 \rightarrow \infty$, $C = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{1}{k} R = \frac{1}{9 \cdot 10^{-9}} R$, ebből látszik, hogy ahhoz, hogy 1F

legyen a kapacitás, $R \sim 10^{10} m$ -nek kellene lennie. (Ez kb. a Nap-Föld távolság egytizede.)

Kondenzátorok kapcsolása:

Párhuzamos kapcsolásnál: $U_1 = U_2 = U$, $Q_1 + Q_2 = Q = C_e U \rightarrow C_1 U + C_2 U = C_e U \rightarrow C_1 + C_2 = C_e$

Soros kapcsolásnál: $U = U_1 + U_2$, és mivel $Q_1 = Q_2 = Q$, megkapjuk, hogy: $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_e}$

Kísérlet: Síkkondenzátor+grafittal bevont pingponglabda 1 egységnyi töltést visz át, ezáltal létrehoz egy kis elektromos teret, amely "egyre csökken" a töltések számával. A munkavégzés:

$$dW = U dQ = \frac{Q}{C} dQ \rightarrow W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U = U_{kond}, \text{ ami a kondenzátor elektrosztatikus energiája.}$$

Síkkondenzátor esetén: $U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A d = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V$, ahol a V a két fegyverzet által közrezárt térfogat.

Hogy elimináljuk a geometriai paramétereket bevezetjük az **energiasűrűséget**: $u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ $[u] = \frac{V}{m^3}$

Ez nem csak kondenzátorra, hanem bármilyen töltéselrendeződésre igaz.

Példa: +Q töltés egyedül a világegyetemben: $U = \int u dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Q^2}{r^4} dV$

Ha veszünk **dr** vastagságú gömbhéjat, amivel "végig megyünk" a világegyetemen. Tehát $dV = 4\pi r^2 dr$, a megoldás:

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot +\infty = \infty, \text{ az eredmény, hogy nemlétezik ponttöltés, mert végtelen elektrosztatikus energiája lenne. Ezért}$$

bevezetjük a klasszikus elektronsugarat (**a**), ekkor: $U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$

*****6. egyenáram, Ohm törvény, ellenállás fizikai eredete fémekben**

Az elektromos áram: Töltéshordozók mozgása két egymáshoz képest különböző potenciálú hely között, a potenciál kiegyenlítése céljából. Folytonos áramot fenntartani valamilyen feszültség, illetve áramforrás segítségével tudunk. A fémes vezetést a delokalizált elektronok fogják szolgáltatni. Az áram erőssége(I): $I = \frac{dQ}{dt}$ Időegység alatt

átáramló töltés mennyisége. $[I] = \frac{C}{s} = A$

Ohm törvény: Egy vezetőben folyó áram erőssége, ha a külső feltételek állandóak, egyenesen arányos a két vége közötti, a vezetőn eső feszültséggel: $I = \frac{U}{R}$, ahol R az ellenállás: $R = \frac{U}{I}$ $[R] = \frac{V}{A} = \Omega$

Tapasztalat alapján drót ellenállása arányos a hosszal. Bevezetem a fajlagos ellenállást, ami egy anyagi jellemző:

$\rho = \frac{RA}{l}$, illetve a fajlagos vezetőképességet: $\sigma = \frac{1}{\rho}$ $[\rho] = \Omega m$

Bevezetem a vezetőben: $I = \int_F \underline{j} d\vec{f}$, ahol **j** a vezető belsejében lévő áramsűrűség vektor. $[j] = \frac{A}{m^2}$

Ennek következtében **az Ohm-törvény differenciális alakja:** $U = RI$ ből: $El = \rho \frac{l}{A} jA$

Vezető belsejében lévő pontban az áramsűrűség az ottani térerősség és a fajlagos vezetőképesség szorzatával

egyenlő. $\underline{j} = \underline{E}\sigma = \frac{\underline{E}}{\rho}$

Magyarázat: "Mindig van egy potenciálkülönbség, amit egy tér hoz létre, ennek az eredménye, hogy létrejön áram."

Töltésmegmaradás egyenlete stacionárius esetben: $\oint \underline{j} d\vec{f} = 0$, amikor jön be áram, és mind ki is megy.

Általános esetben: $\oint \underline{j} d\vec{f} + \frac{dQ}{dt} = 0 \rightarrow \oint_F \underline{j} d\vec{f} = -\frac{dQ}{dt}$ (Töltésre vonatkozó kontinuitási egyenlet.)

+++**Fémek vezetése, ellenállása:** Drude model.

7. elektrolízis, vezetés folyadékokban, Faraday törvények, termoelektromos jelenségek

A folyadék akkor képes vezetni, ha mozgóképes töltéshordozókat tartalmaz.

Elektrolit (másodfajú vezető): Savak, sók és bázisok vizes oldatai, más folyadékokkal képzett oldataik illetve olvasztott és szilárd sók és bázisok, amelyekben az áram áthaladása valamilyen kémiai változással kapcsolatos. Az elektrolitba az áram két elektródán át jut be, amelyiken az áram belép az elektrolitba (a pozitív) az anód, amelyiken át elhagyja azt, az a katód.

Az elektrolitban az oldott anyag ionokra bomlik szét, a pozitív töltéssel rendelkező kationok a katód, míg a negatív anionok az anód felé tartanak, amint elérték a velük ellentétes töltésű elektródot elveszítik töltésüket és különféle másodlagos folyamatok során kiválnak.

Elektrolízis vezetése:

$$\underline{j} = qn\underline{v} = q^+n^+\underline{v}^+ + q^-n^-\underline{v}^- = q^+n^+\mu^+\underline{E} + q^-n^-\mu^-\underline{E} = (q^+n^+\mu^+ + q^-n^-\mu^-)\underline{E} = \sigma\underline{E}$$

Peremfeltétel:

$$q^+n^+ = q^-n^-$$

$$n^+ = n^-$$

$$\underline{v}^\pm = \mu^\pm \underline{E}$$

Itt μ a mobilitás.

Faraday első elektrolízis-törvénye: Az elektrolízis során az elektródokon képződő anyag tömege (m) arányos az áthaladó elektromos töltésmennyiséggel (Q). Az elektromos töltésmennyiséget általában coulombban szokás megadni, és nem azonos az elektromos árammal.

$$m \sim Q, m = kQ = kIt$$

Faraday második elektrolízis-törvénye: Adott elektromos töltésmennyiséggel elektrolizált anyag mennyisége arányos az anyag kémiai egyenértéksúlyával. Más szavakkal: azonos töltésmennyiség különböző elektrolitokból kémiaiilag egyenértékű anyagmennyiséget választ ki.

$$m \sim \frac{M}{z} \longrightarrow k \sim \frac{m}{z}, k = \frac{M}{zF}$$

$$F = \frac{M}{zk} = 96500C, \frac{F}{N_A} = \frac{96500}{6 \cdot 10^{23}} = 1.6 \cdot 10^{-19}C$$

Ahol: m -levált anyagmennyiség, M -moláris tömeg, z -vegyértékszám, k -konstans?!, F -Faraday állandó, N_A :Avogadro szám.

Termoelektromos jelenségek:

Seebeck effektus: ha két különböző fémeket két helyen összekapcsolnak, és a kapcsolódási pontok különböző hőmérsékletűek, akkor a kapcsolódási pontok között elektromos feszültség keletkezik.

Ez a feszültség az anyagi minőségtől, és a hőmérséklet különbségtől függ.

Termofazekas kísérlet!

$$U = \alpha_{AB}(T_2 - T_1)$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\rho \frac{l}{A}} = \frac{AU}{\rho l}$$

Peltier effektus: Ha kétféle anyagból álló hőelektromos elemen át áramot vezetünk, az érintkezési helyek fölmelegszenek vagy lehűlnek aszerint, hogy az áram milyen irányban halad keresztül.

$$Q_{\text{Peltier}} = I \cdot t \cdot \pi_{AB}, [\pi_{AB}] = \frac{J}{C}$$

Ahol: Q_{Peltier} -Peltier hő, π_{AB} -Peltier együttható.

***8. elektromos áramkörök, Kirchhoff-törvények

Alap képletek: $I = \frac{dQ}{dt}$, $R = \rho \frac{l}{A}$, $R = \frac{U}{I}$, $P = UI$, $\underline{j} = \sigma \underline{E}$, $I = \int \underline{j} d\vec{f}$, $\oint \underline{j} d\vec{f} = -\frac{dQ}{dt}$

Hajlított vezetónél, hogy **I** stacionárius legyen, valamit be kell iktatnom, hogy az áram körbe áramolhasson.

Ehhez kell a telep! (1): $\oint \underline{E} d\vec{r} = 0$ (2): $\underline{j} = \sigma(\underline{E} - \underline{E}_i)$ Ebből: $\underline{E} = \underline{E}_i + \rho \underline{j}$, ennek mindkét oldalára veszek egy

körintegrált a teljes hurokra, ezt hívom G görbének. $\oint_G \underline{E} d\vec{r} = \oint_G (\underline{E}_i + \rho \underline{j}) d\vec{r}$, itt az első tagnak 0-nak kell lennie, a

másodikkal pedig csak ott van járuléka, ahol van ρ . Ebből látszik, hogy be kell szűrnünk egy "idegen térerősséget".

$$-\int \underline{E}_i d\vec{r} = \sum_i \rho_i j l_i = \sum_i \frac{\rho_i l_i}{A_i} j A = \sum_i R_i I_i = \varepsilon_{\text{idegen}}, \text{ ami az elektromotoros erő. } [\varepsilon_i] = V$$

Kapcsolási jelek: telep, ellenállás, kondenzátor, tekercs, izzó, tolóellenállás, voltmérő, ampermérő, dióda, földelés, kapcsoló.

Soros kapcsolás esetében: $R_e = \sum_i R_i$ $I_e = I_i$ $U_e = \sum_i U_i$

Párhuzamos esetén: $\frac{1}{R_e} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ $I_e = \sum_i I_i$ $U_e = U_i$

Ami nem soros, az nem feltétlenül párhuzamos, 2 példa vegyes kapcsolásra a **csillag**, és **delta**, amelyek egymásba átvihetők.

$$\text{Csillag-delta átalakítás: } R_{AB} = \frac{R_A R_B}{R_C} + R_A + R_B \quad \text{Delta-csillag átalakítás: } R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

Kirchoff törvények levezetése ablak módszerrel (nagyon egyszerű): egy áramkörben felveszek egy irányt, és az összes hurokra, és csomópontokra fel kell írni a Kirchoff törvényeket

Valódi telep: (Elektrolízis, Cu és Zn elektród, $\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$ -ban), a valódi telep áll egy elektromotoros erőből, és egy belső ellenállásból. Kapocsfeszültség: $U_k = \varepsilon - IR_b$

Üres járású feszültség nevezzük, amikor nem folyik a telepen át áram, akkor az elektromotoros erő megegyezik a kapocsfeszültséggel.

Egy valódi telepből, és egy ellenállásból álló áramkör esetén akkor legnagyobb a teljesítmény, ha $R_b = R_k$

$$\text{Rövid zár: } \varepsilon = IR_b \quad U_k = 0, \text{ ebből: } I = \frac{\varepsilon}{R_b}$$

$$\text{Telepek soros kapcsolása esetén: } U_k = \sum_i \varepsilon_i \quad I = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{R_{b,i}} \quad R_{b,e} = \sum_i R_{b,i}$$

$$\text{Telepek párhuzamos kapcsolása esetén: } \frac{1}{R_{b,e}} = \sum_i \frac{1}{R_{b,i}} \quad \text{Itt a legjobb hatásfok érdekében érdemes olyan telepeket}$$

használni, amelyek elektromotoros ereje megegyezik.

Norton kapcsolás: Norton-tétel szerint bármely, generátorokból és ellenállásokból álló kétpólus helyettesíthető egy ideális áramgenerátorral, és a vele **párhuzamosan** kapcsolt belső ellenállással.

Thévenin kapcsolás: Thévenin tétel szerint pedig ugyanez helyettesíthető egy ideális feszültséggenerátorral, és a vele **sorosan** kapcsolt belső ellenállással.

Kirchoff első törvénye (csomóponti törvény): Egy csomópontba befolyó áramok összege megegyezik az onnan

$$\text{kifolyó áramok algebrai összegével. } \sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Kirchoff második törvénye (hurok törvény): Egy hálózat bármely zárt áramkörében a feszültségek előjeles

$$\text{összege 0. } \sum_{i=1}^n I_i R_i = 0$$

***9. Félvezetők vezetése, a p-n átmenet, félvezető áramköri elemek, dióda

A félvezetők olyan kristályos anyagok, amelyek fajlagos elektromos vezetőképessége a fémek és a szigetelők

értékei közé esnek. fémek: $\sigma \approx 10^4 - 10^6 \frac{1}{\Omega cm}$ szigetelők: $\sigma \approx 10^{-22} - 10^{-10} \frac{1}{\Omega cm}$

Félvezetők térbeli elrendezése: FCC-rács (Face-Centered-Cubic / Lapcentrált köbös)

A kocka csúsaiban van 1-1 atom, illetve a lapok geometriai középpontjában. Ha térben képzeljük el, a csúcsban lévő atom 1/8-ad részben tartozik a kockához, a lapok középpontjában lévő 1/2-ed részben, így összesen 4 atom

van 1 kockában. $\frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6$ Ezt a rácsot a testátló mentén eltolom (az átló hosszának felével), így 2 egymásba tölt

FCC-m lesz. Ekkor a 2 egymásba tölt FCC-ban lokálisan az atomok, tetraéderesen fognak elhelyezkedni.

Kérdés, hogy mi fog vezetni, mert ez kovalens kötések tartalmaz! Vezetni az tud, amiben van mozgóképes töltéshordozó, mivel ebben nincs, ez nem fog! ("Az ideális félvezető, szigetelő!")

Bevezetem a Boltzman faktort, ami valamilyen folyamatnak az aktivációs energiája: $e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$, itt **k** a Boltzman állandó, jelen esetben ΔE a kötési energia.

$N(T)$, azaz a vezetőképes töltéshordozók száma: $N(T) = N_0 e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$ Szilícium esetében: $\Delta E \approx 0.7 eV$ /kötés,

$T = 300 K$ esetben $kT \approx 25 meV$. Ekkor: $N(T = 300 K) = N_0 e^{-\frac{0.7}{0.025}} \approx N_0 \cdot 10^{-18}$, ez a Boltzmann faktor Si esetében

szobahőmérsékleten. Tehát 10^{18} -ból lesz 1, ami felszakad. ha $N_0 = 6 \cdot 10^{23} \rightarrow N(T = 300 K) \approx 10^5$, ami viszonylag sok, tehát ez már tud vezetni. A mennyiség erősen hőmérsékletfüggő.

Gyémánt: szinte tökéletes szigetelő. Itt: $N(T = 300 K) = N_0 \cdot 10^{-72} \approx 10^{-50}$, tehát a gyémánt ezért szigetel. 10^{50} mol kellene ahhoz, hogy 1 kötés felszakadjon, ennyi a világegyetemben nincs.

Vezetőképesség fémek esetén: $\underline{j} = qn\underline{v}$, ahol **q** a töltéshordozók (elektron) töltése, **n** az elektronsűrűség $\underline{v} = \mu \underline{E}$

, ahol μ a mozgékonyosság. $\underline{j} = \sigma \underline{E} = qn\mu \underline{E}$, ez az összefüggés a vezetőképesség: $\sigma(T) = qn(T)\mu(T)$

Fémek esetében **q** és $n = \frac{N}{V}$, fix!, σ , azonban erősen hőmérsékletfüggő!

Félvezetőknél a hőmérséklet növekedésével csökken az ellenállás, azonban **n**, és ezáltal σ pedig erősen nő.

Sávmodell:

n-típusú szennyezés: olyan anyaggal szennyezzük, aminek 5 vegyértékelektronja van, tehát bedob egy pluszt a közösbe, ami lesz a "donor elektron". pl. Szilícium Foszforral való szennyezése.

p-típusú szennyezés: olyan anyaggal szennyezzük, aminek 3 vegyértékelektronja van, ezért a kristályban egy elektronhiány, lyuk keletkezik, itt a lyuk mint ha pozitív töltésű részecske lenne vezeti az áramot. pl: Szilícium Galliummal való szennyezése.

Általában kb. 10^{-5} koncentrációval szennyeznek! Szennyező atomból származó lyukakat, és elektronokat többségi töltéshordozóknak nevezzük.

p-n átmenet: veszünk egy félvezetőt, aminek egyik oldalát n, másikat p módon szennyezzük.

A rendszer olyasmi, mint a kondenzátor, a töltések elkezdenek "átugrálni" a másik oldalra. Ezért kialakul egy elektromos tér. De mivel a lyukaknak a tér ellenében kell ugrálni, nekik egyre nehezebb lesz. Mivel van elektromos tér, létrejön potenciálkülönbség. Si esetében kb. 0,7V.

p-n átmenetre feszültség = **Egyenirányítás:** nem fognak a többségnyi töltéshordozók elmozdulni, mert **E** még nagyobb (záró irány), ez a **Dióda**. Ha a telepet megfordítom, **E** is megfordul (ha $\underline{U_T} > \underline{U}$), ez a nyitó irány, itt 0,7V-ig nem nagyon van vezetés, de afelett drasztikusan elkezd vezetni.

Kiegészítés: (bipoláris) tranzisztor (n-p-n, vagy p-n-p), lényegében 2 dióda. Jelentősége, hogy elektromos jeleket erősíteni tudja.

***10. magnetosztatika, a mágneses indukcióvektor és fluxus fogalma, Lorentz erő

Magnetosztatika: Ørsted: Vizsgáljuk meg a kapcsolatot mágneses jelenség, és elektrosztatika között.

Kísérlet: iránytű/mágnes áram jártá vezető mellett kitér, az áram nagyságától függően, mert fellép forgatónyomaték. Tehát elektromos vezető maga körül mágneses teret hoz létre.

Lorentz: Ezt megfordította, mi van ha áram jártá vezetőt beteszem homogén mágneses térbe. H.M.tér legegyszerűbben patkómágnessel. Áram jártá kengyel kitér, és ottmarad. Tehát fellép valamilyen vízszintes erő a kötél, és nehézségi mellett: Lorentz erő! Aminek iránya az áram előjelétől is függ.

B a **Mágneses indukcióvektor** nagysága: $|\underline{B}| = \frac{F_{Lorentz, max}}{I \cdot l}$ $[\underline{B}] = \frac{N}{Am} = \frac{CV}{Am^2} = \frac{Vs}{m^2} = T (Tesla)$

Lorentz erő: $F_L \sim I, l, \sin \Theta, B$ $\underline{F}_L = I(\underline{l} \times \underline{B})$

4db áram jártá vezető négyzet alakban: áramhurok/köráram. Ebben folyik I, és ezt beleteszem mágneses térbe. Ha **B** merőleges: **F_{eredő}=0**, és **M(forgatónyomaték)=0**. Ha **B** egyirányú: **F_{eredő}=0**, de **M** = $I(\underline{l} \times \underline{B})$, ahol I a felületelem vektor.

Bevezetem a mágneses momentumot: $\underline{m} = I\underline{f}$, ekkor $\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}$, és $|\underline{M}| = |\underline{m} \times \underline{B}|$

Innen: $|\underline{B}| = \frac{M_{max}}{If}$, ami $\approx \frac{F_{max}}{Il}$, tehát Lorentz erő akkor max, ha forgatónyomaték is max.

Potenciális energia: $W = \int dW = \int M d\varphi = \int mB \sin \varphi d\varphi = -mB \cos \varphi = -\underline{m}\underline{B} = U_{pot}$

Magnetosztatika alaptörvénye: $\oint_F \underline{B} d\underline{f} = 0$, mely szerint a mágneses erővonalak zárt görbék, tehát

forrásmentesek, vagyis nincs monopólus sem.

$|\underline{B}| \sim \frac{I}{r}$ Ampère-féle gerjesztési törvény: $\oint_G \underline{B} d\underline{r} = \oint \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) dr = \mu_0 I = \mu_0 \sum_j I_j = \mu_0 \int \underline{j} d\underline{f}$, tehát a mágneses

tér nem konzervatív.

μ_0 -vákum permeabilitás: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ $[\epsilon_0 \mu_0] = \left(\frac{s}{m} \right)^2$ $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c = 3 \cdot 10^8 \left(\frac{m}{s} \right)^2$, ami a vákumbeli

fénysebesség.

“Ha kívül vagyok rúdon, nem tudom megmondani milyen vastag az.”

Tekercs: sok áram jártá hurok. Itt: $\frac{n}{N} = \frac{l}{L}$, tehát $Bl \equiv \mu_0 \sum_j I_j = \mu_0 \frac{l}{L} NI \rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{L}$, ahol **L** a vezető teljes hossza,

N a teljes menetszám, **n** a kiválasztott egységhez tartozó hurokszám, **I** pedig az ehhez tartozó vezetőhossz.

Mágneses indukciófluxus:

Szemléletesen a felületet metsző mágneses indukcióvonalak száma, bár nem dimenziótlan mennyiség. SI

mértékegysége a *weber* (Wb). A mágneses indukcióvonalak sűrűsége: $\Phi = \int_F \underline{B} d\underline{f}$

Lorentz-erő:

B mágneses térben **v** sebességgel mozgó töltésre ható erő: $F_{Lorentz} = Q[vB]$

Vezetőben folyó I áram esetén: $\underline{F}_{Lorentz} = \underline{I} \times \underline{B}$

***11. gerjesztési és Biot-Savart törvény, áram-áram kölcsönhatás

Ampère féle gerjesztési törvény: A törvény kimondja, hogy a mágneses térerősség tetszőleges zárt görbe menti integrálja egyenlő a görbe által határolt felületen átfolyó áramok előjeles, algebrai összegével.

$$\oint_G \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 \int_F \underline{j} d\underline{f}$$

Mert igaz, hogy a mágneses tér forrásmentes, de az áramok gerjesztik a mágneses teret. Viszont ebből következik, hogy a mágneses tér az elektromos térrel ellentétben nem konzervatív (vagy potenciális), tehát a B-t nem tudom felírni egy skalárfüggvény gradienseként.

Biot-Savart törvény:

Bármilyen áram járta vezető által keltett mágneses teret egy tetszőleges P pontban úgy adhatjuk meg, hogy az **ds** áramirányvektorokat, és a **B** mágneses indukcióvektorokat összegezzük:

$$I \rightarrow \underline{B}_p(\underline{r}) \quad I d\underline{f} \rightarrow d\underline{B}_p(\underline{r}) \quad d\underline{B} \sim I$$

Fontos, hogy a rendszer jobbsodrású, így: $d\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\underline{s} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$ Ezt összegezve: $\underline{B}_p(\underline{r}) = \int d\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\underline{s} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$

Ez gyakorlatilag bármely vezető által keltett mágneses teret megtudja mondani, bárhol!

Áram-áram kölcsönhatás:

Két vezető az általuk keltett mágneses téren keresztül hat egymásra. Párhuzamos vezetőknél, ha az áram azonos irányban folyik bennük vonzzák, míg ha ellentétes akkor taszítják egymást. Ebből látható az is, hogy a tekercs menetei közt is vonzó hatás lép fel, ha a tekercsben áram folyik. (Roget-spirál)

Két egyenes vezető közt fellépő erő: $dF = I_2 ds_2 \mu_0 H = I_2 ds_2 \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r}$

Ha a 2 vezetőt egy merev egységnek tekintjük, akkor a rá ható erő: $F_{Lorentz} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r}$

12. töltés mozgása elektromos és mágneses térben, Hall effektus

Töltés mozgása elektromos térben:

Homogén indukciós térben a Lorentz-erő nagysága állandó és iránya merőleges a sebesség irányára; ez pedig éppen a centripetális erő (minthogy kielégíti az egyenletes körmozgás dinamikai feltételét), így:

$$qvB = m \frac{v^2}{R}, \text{ ahol } q \text{ az elemi töltés, } v \text{ a sebesség, } B \text{ a mágneses indukcióvektor, } R \text{ pedig a körpálya sugara.}$$

Ebből átrendezéssel kifejezhető: $R = \frac{mv}{qB}$

Most már könnyen kiszámítható a periódusidő is, vagyis, hogy mennyi idő alatt futja be a töltött részecske az R sugarú kört: $T = \frac{2R\pi}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$

Érdekes és fontos következmény, hogy a periódusidő nem függ a részecske sebességétől.

Töltés mozgása mágneses térben:

Mozgó töltés által keltett mágneses tér: $\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\underline{s} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dQ \underline{v} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\underline{v} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$, ahol $I d\underline{s} = dQ \frac{d\underline{s}}{dt} = dQ \underline{v}$

2 mozgó töltés esetén: $Q_1 \rightarrow |\underline{B}_1| = \frac{\mu_0 Q_1}{4\pi} \frac{v \sin \Theta}{r^2}$, ami most: $|\underline{B}_1| = \frac{\mu_0 Q_1}{4\pi} \frac{v}{r^2}$. Ha ebbe a $\underline{B}_1$ mágneses térbe

behelyezek egy töltést, arra hatni fog Lorentz erő: $\underline{F}_{L,2} = Q_2 (\underline{v} \times \underline{B}_1)$ A két Lorentz erő a Coulomb erővel ellentétes irányú lesz.

$$|\underline{F}_{L,2}| = |\underline{F}_{L,1}| = Q_2 v B_1 \cdot (\sin \Theta = 1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2 v^2}{d^2}, \text{ a vonzó Lorentz erő! } |\underline{F}_{C,1}| = |\underline{F}_{C,2}| = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 d^2}, \text{ a taszító Coulomb.}$$

$$\frac{|\underline{F}_L|}{|\underline{F}_C|} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}, \text{ mert } \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \text{ tehát "köznap" sebességeken esetén nincs számottevő Lorentz erő, de ha a } \underline{v} \text{ megközelíti } \underline{c}\text{-t, a két erő egyenlő, így lehet töltéseket szállítani, mert a "töltéscsomag" egyben marad.}$$

Itt végig $\underline{v}$ a közeghez viszonyított relatív sebesség, illetve a relativitás elmélet keretei között nem különböztetünk meg elektromos és mágneses teret, csak elektromágneses tér létezik.

A Hall-effektus: vegyünk egy téglatest ellenállást, amire feszültséget kapcsolunk, ennek hatására áram folyik benne. Ezt az egészet helyezzük bele homogén mágneses térbe.

$\underline{j} = qn\underline{v}$, ha mágneses térben vagyunk, és mozog a részecske, Lorentz erő (mágneses potenciál?) fog rá hatni:

$$\underline{F}_L = q(\underline{v} \times \underline{B}), \text{ ahol mivel } q \text{ negatív az elektron "jobbra" fog eltérülni.}$$

Ahol az elektronok felhalmozódnak, a túloldalon pedig elektronhiány fog fellépni, vagyis pozitív töltés többlet lesz.

Mivel a test két oldalán különböző töltések vannak, ezért kialakul közöttük egy elektromos tér: $\underline{E}_{Hall}$

Ez a Hall tér egyre nőni fog, és ebből származni fog egy Hall-erő: $\underline{F}_{Hall} = q\underline{E}_{Hall}$, ami, ami addig nő, amíg

$$\sum \underline{F}_{\text{fesz. int. es}} = \underline{F}_{Hall} + \underline{F}_L = 0, \text{ ekkor } q\underline{E}_{Hall} = qv\underline{B}. \text{ Ki fog alakulni egy: } U_{Hall} = E_{Hall} b = vBb = \frac{j}{qn} Bb = \frac{I}{ab} \frac{1}{qn} Bb$$

Hall-feszültség. Innen $\underline{I}$ -t, $\underline{B}$ -t, $\underline{q}$ -t, $\underline{a}$, $\underline{b}$ -t tudjuk/mérjük, tehát megtudjuk határozni $\underline{n}$ -t, a mozgóképes töltéshordozók

$$\text{térfogati sűrűségét direktbe. Továbbá: } R_{Hall} = \frac{1}{qn} \rightarrow U_{Hall} = R_{Hall} \frac{IB}{a}, \text{ ahol } [R_{Hall}] \neq \Omega$$

13. az anyag mágnesen tulajdonságai, mágnesezettség, mágneses térerősség bevezetése, diamágnesség, paramágnesség, ferromágnesség

Anyagok mágneses tulajdonságai (1822-Ampère): Az anyag mágnesezettségét már tudták mérni. A. azt mondta az anyagban létrejönnek molekuláris áramok (mol. mágneses momentumok) $\underline{B}_{mol} \leftarrow I_{mol} \rightarrow \underline{m}_{mol}$, illetve molekuláris mágneses tér. $\underline{B} = \underline{B}_0 (\leftarrow I_{sz}) + \underline{B}_{mol} (\leftarrow I_{mol})$ Anyag jelenlétében magnetosztatika alaptörvényei:

$$\text{I: } \oint_F \underline{B} d\vec{r} = 0 \quad \text{II: } \oint_G \underline{B} d\vec{r} = \mu_0 \sum_i (I_{sz} + I_{mol})$$

Mágnesezettség vektor: $\underline{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \underline{m}_{i,mol}$ $[M] = \frac{A}{m} \sum_i \underline{m}_{i,mol} = \underline{M} V_{henger} = \underline{M} l r^2 \pi = \sum_i I_{i,mol} r^2 \pi e_i$, innen

$\sum_i I_{i,mol} e_i = \underline{M} l \rightarrow \sum_i I_{i,mol} = \underline{M} l$, ami ha bezárom a görbét úgy, hogy hozzáadok 3 db 0-t, mert azokra nincs járulék:

$$\sum_i I_{i,mol} = \oint_G \underline{M} d\vec{r}, \text{ ebből következik: } \oint_G \left(\frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M} \right) d\vec{r} = \oint_G \underline{H} d\vec{r} = \sum_i I_{i,sz}, \text{ ahol mágneses térerősség vektornak}$$

nevezem: $\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M}$ ami egyenlő a G görbe által határolt területet dőfő szabad áramok algebrai összegével.

$$\oint_G \underline{H} d\vec{r} = \int_F \underline{j}_{sz} d\vec{f}, \text{ ez a gerjesztési törvény anyagban, ahol } \underline{j}_{sz}, \text{ a szabad áramsűrűség.}$$

H örvényes. $\underline{I}_{sz}$ -t én tudom befolyásolni. $[H] = \frac{A}{m}$ B moláris: $\oint_G \underline{B}_{mol} d\vec{r} = \mu_0 \sum_i I_{i,mol} = \mu_0 \oint_G \underline{M} d\vec{r} \rightarrow \underline{B}_{mol} = \mu_0 \underline{M}$

Kísérletekből (tapasztalati törvény): Egy anyag mágnesezettsége függ a térerősségtől: $\underline{M} \sim \underline{H}$, amiknek mivel azonos a dimenziója is: $\underline{M} = \chi_m \underline{H}$, ahol χ a mágneses szuszceptibilitás (dimenziótlan mennyiség). χ_m lehet negatív és pozitív is az elektromos szuszceptibilitással ellentétben.

$$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \chi_m \underline{H} \rightarrow \mu_0 (1 + \chi_m) \underline{H} = \mu_0 \underline{H} = \underline{B}, \underline{\mu} \text{ az anyag relatív mágneses permeabilitása. } \underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0 \underline{\mu}}$$

$\underline{\mu}_0 \underline{\mu}$ pedig abszolút permeabilitás: $\underline{\mu}_{abszolút}$

Anyagok találkozásánál mivel: $B_{n1} = B_{n2}$, ezért $H_{n1} = \frac{B_{n1}}{\mu_1}$ és $H_{n2} = \frac{B_{n2}}{\mu_2}$ ebből: $H_{n1} \mu_1 = H_{n2} \mu_2 \rightarrow \frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$

És $H_{t1} = H_{t2}$ miatt: $\frac{B_{t1}}{\mu_1} = \frac{B_{t2}}{\mu_2}$, ahol **n** a normál komponens (felületre merőleges), **t** a tangenciális.

Kísérlet: Paramágnes kis mértékben beszívódik, Diamágnes kilökődik ha mágneses teret kapcsolok köré.

Diamágnesség: $\chi_{Bi} = -1.7 \cdot 10^{-4}$ $\chi_{N_2} = -3 \cdot 10^{-9}$ Itt: $\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_{mol} = \underline{B}_0 + \mu_0 \chi_m \underline{H} \rightarrow \underline{B} < \underline{B}_0$

A diamágneses anyagok szuszceptibilitása a **H**-tól, és **T**(hőmérséklet)-től is független.

Atomi szinten külső mágneses tér hiányában ($\underline{B} = 0$): $\sum_i \underline{m}_{i,mol} = 0$, ha $\underline{B} \neq 0$, akkor indukált momentumokról

beszélünk: $\underline{M} = \underline{m}_{mol}^{ind} \times \underline{B}$, ezek a mágneses tér környékén precesszálnak. (Larmor-precesszió) "Diamágneses anyagok felelnek meg az apoláris molekuláknak elektrosztatikában.

Paramágnesség: $\chi_{Al} = 2 \cdot 10^{-4}$ $\chi_{O_2} = 1.9 \cdot 10^{-5}$ Itt: $\underline{B} = \underline{B}_0 + \mu_0 \chi_m \underline{H} \rightarrow \underline{B} > \underline{B}_0$

A paramágneses anyagok szuszceptibilitása a **H**-tól független, de **T** növekedésével csökken.

Paramágnesség Langevin-elmélete: ha $\underline{B} \neq 0$ és $T > 0$, akkor $U_{pot} = -\underline{m} \underline{B}$

$$N_{\uparrow} \sim e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad N_{\uparrow} = A e^{-\frac{-mB}{kT}} = A e^{\frac{mB}{kT}} \quad N_{\downarrow} = A e^{-\frac{mB}{kT}} \quad N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow} = A \left(e^{\frac{mB}{kT}} + e^{-\frac{mB}{kT}} \right) \rightarrow A = \frac{N}{e^{\frac{mB}{kT}} + e^{-\frac{mB}{kT}}}$$

$$\langle \underline{m} \rangle = m N_{\uparrow} - m N_{\downarrow} = m N \tanh \left(\frac{mB}{kT} \right) \quad \underline{M} = \frac{\langle \underline{m} \rangle}{V} = m n \tanh \left(\frac{mB}{kT} \right) \cong m n \frac{mB}{kT}, \text{ ahol } n = \frac{N}{V} \quad \text{folytatva:}$$

$$\frac{n m^2 B}{kT} = \frac{\mu_0 n m^2}{kT} \underline{H} = \chi_m \underline{H} \rightarrow \chi_m = \frac{C}{T}, \text{ ez a Langevin-formula, ezt használhatjuk a mágneses szuszceptibilitás}$$

mérésére.

+Ferromágnesség hiszterézisgörbe (szaturációs mágnesezettség, remanens mágnesezettség, koercitív erő)

+Atomok mágnesezettsége?!

14. elektromágneses indukció, mozgási és nyugalmi indukció, Lenz-törvény, örvényáramok

Elektromágneses indukció: (Faraday - 1831) A mágneses térben lévő vezető, amikor azon áram folyik, elmozdul, ha a vezetőt a mágneses tér irányára merőlegesen elmozdítjuk, akkor a vezető végei közt áramot mérhetünk. Az indukált áram erőssége az elmozdulás sebességétől függ. Zárt vezetőhurokhoz vagy tekercshez mágnesrudat közelítve ugyancsak áramot mérhetünk, a tekercsnél minél nagyobb a menetszám, illetve a sebesség, annál nagyobb az áram. Ugyancsak feszültség indukálódik egy tekercsben, ha hozzá másik (áram járta) tekercset közelítünk és egy hurokban is, ha a mágneses teret a hurok síkjára merőleges tengely körül forgatjuk.

Mozgási indukció (rúddal mozgok, felület változik): Lorentz-erő: $F = Q[vB]$ miatt, a töltések a végekbe vándorolnak, emiatt megjelenik E_0 elektromos tér, ami eddig nő: $|E_0| = |v||B|$ $0 = QE_0 + QE_i$

ekkor: $E_i = v \times B$

$$\oint \underline{E}_i d\underline{r} = \int_A^B (v \times B) d\underline{r} = v \times B \int_A^B d\underline{r} = (v \times B) \underline{l} \neq 0, \text{ tehát az indukált elektromos tér nem konzervatív.}$$

Az indukált feszültség: $U_{AB} = \int \underline{E}_i d\underline{r} = (v \times B) \underline{l} = -vBl = \varepsilon_i$ (Neumann-törvény)

$$\varepsilon_i = \oint \underline{E}_i d\underline{r} = (v \times B) \underline{l} = (\underline{l} \times v) B = \frac{(\underline{l} \times v dt) B}{dt} = \frac{-B df}{dt} = \frac{-d\Phi}{dt} \quad \Phi = \int_F B df \quad \varepsilon_i = -\frac{d}{dt} \int_F B df$$

Tehát indukált feszültséget fluxusváltozás hoz létre. Ez akkor is igaz, ha B inhomogén.

Indukciós törvény: $\int_{G(t)} \underline{E}_i d\underline{r} = -\frac{d}{dt} \int_{F(t)} B df \neq 0$, ahol G a lineáris vezető alkotta zárt görbe, F pedig az ez által határolt

tetszőleges felület. Az indukált feszültség független a G belső ellenállásától, ebből következik, hogy fluxusváltozás esetén vákuumban és vezetőben is elektromos tér keletkezik.

Nyugalmi indukció: Az időben változó B mágneses tér a környező vezetőben E elektromos teret kelt, ez nem vezethető vissza Faraday féle indukciós törvényre.

$$\text{Most: } \varepsilon_i = -\frac{d}{dt} \int_{F=\text{áll}} B(t) df = -\frac{d\Phi(t)}{dt}, \text{ és a fluxusváltozás feszültséget indukál: } \int_{G=\text{áll}} \underline{E}_i d\underline{r} = \int_{F=\text{áll}} \frac{\partial B(t)}{\partial t} df$$

Lenz-törvény ($I \downarrow \uparrow I_i$): Az indukált áram mindig olyan irányú, hogy az indukciót létesítő változást akadályozza. Ez az energiamegmaradás elvéből egyenesen következik.

Faraday féle indukciós törvény: Minél gyorsabban változik az indukciófluxus (Φ), annál nagyobb az I áram.

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, I_i = \frac{\varepsilon_i}{R}, \text{ ahol } R \text{ a zárt kör teljes ellenállása. Tekercsben keletkező mágneses tér: } H = \frac{NI}{l}, \text{ ahol } I \text{ az}$$

átfolyó áram, N a menetszám, l pedig a tekercs hossza.

Örvényáramok: Azok az indukált áramok, amelyek két vagy három irányban kiterjedt vezetőkben indukálódnak. A Lorentz-erő illetve a mágneses tér változását kísérő elektromos örvénytér a fémes vezetőkben az elektronokat zárt görbék mentén mozgásba hozza. Ezek az áramok a Lenz-törvény szerint az indukciót erősen akadályozzák, másrésről igen nagy hőhatással járnak.

15. kölcsönös indukció, önindukció, tekercsek induktivitása, mágneses energiasűrűség

Kölcsönös indukció: Az az indukciójelenség, amikor egy zárt vezetőben vagy tekercsben, egy másikban fellépő áramerősség változás hatására, feszültség indukálódik.

$$\Phi_2 \sim I_1 \quad \Phi_2 = M_{12}I_1 \quad \Phi_1 = M_{21}I_2 \quad M_{12} = M_{21} = M \quad B_1 = \frac{\mu_0 \mu N_1 I_1}{l} \quad L = \frac{\mu_0 \mu N^2 f}{l}$$
$$-\frac{d}{dt} \int_F \underline{B} d\underline{f} = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_G \underline{E}_i d\underline{r}$$

ahol **M** a kölcsönös induktivitási együttható, ezek alapján a 2. vezetőben az indukált feszültség:

$$U_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad [M] = [L] = \frac{Vs}{A} = H$$

Speciális eset, szoros kapcsolás esetén: $B_1 \approx B_2$, illetve $M = \sqrt{L_1 L_2}$ $\Phi_2 = N_2 f B_2 = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 f}{l} I_1 = M I_1$

Déry-Bláthy-Zippermawski (transzformátor)

Önindukció: Zárt vezetőben vagy tekercsben fellépő áramerősség változáskor a vezetőben feszültség indukálódik. A vezetőben **I** áram **H** mágneses tere folytán átmenő fluxus:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \quad \Phi_0 = B f \rightarrow \Phi = \sum_i \Phi_{0,i} = N B f = \frac{\mu_0 N^2 f}{l} I = L I$$

L (önindukciós együttható) a vezető alakjától és a közegtől függ. Általában I-t tudom változtatni, ezáltal **L** állandó, az ilyenkor fellépő önindukció: $U_i = -L \frac{dI}{dt}$

Tekercsek induktivitása:

Egy **N** menetszámú, **f** keresztmetszetű, **l** hosszúságú tekercs induktivitása: $L = \frac{\mu_0 \mu N^2 f}{l}$

Tekercs szerepe az áramkörben: Nagy induktivitású áramkör bekapcsolás után csak lassan éri el stacionárius értékét, viszont az áramforrás lekapcsolása után is csak lassan tér vissza a zérus helyzetbe.

Mágneses energiasűrűség:

Mágneses tér energiája:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu N^2 f}{l} I^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 \mu N I}{l} \right) \left(\frac{N I}{l} \right) (f l) = \frac{1}{2} B H V$$

Ez alapján **μ** permeabilitású mágneses tér energiasűrűsége: $u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} B H$

Vákuumban, amikor $H = \frac{B}{\mu_0}$: $u = \frac{1}{2} B \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$

Elektromágneses tér energiasűrűsége: $u = \frac{1}{2} \epsilon_i E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 B^2$

16. Bekapcsolási jelenségek, RL és RC kör, szabad rezgések

Be és kikapcsolási jelenségek: Nagy induktivitású áramkör bekapcsolás után csak lassan éri el stacionárius értékét, viszont az áramforrás lekapcsolása után is csak lassan tér vissza a zérus helyzetbe. Egy tekercsel párhuzamosan kötött ködfényszóró (aminek 80 V körüli a gyújtási feszültsége) felvillan amikor az áramkörbe kötött 4V-os telepet egy kapcsolóval meg- szakítjuk. Ennek az oka, pedig az, hogy gyors megszakításkor nagy "nyitási feszültség" keletkezik, mert az áramerősségnek nagyon gyorsan kell csökkennie.

$$\text{Most: } \oint \underline{E} \, d\underline{r} \neq 0 = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \sum_k R_k I_k = \sum_j \varepsilon_{j \text{ j\acute{e}gen}} - \frac{d\Phi}{dt}$$

RL kör: II eset: zárt kapcsolót kinyitok. Ekkor a Kirchoff egyenlet: $RI = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$ Egyenletet I-re megoldva

$I(t=0) = I_0 = \frac{U_T}{R}$ kezdeti feltétellel: $I(t) = \frac{U_T}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_T}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$, ahol $\tau = R/L$, és 5τ után 0-nak tekintjük I-t. Addig pedig mérnökök ábrázolásával lineárisan változik.

II eset: nyitott kapcsolót zárok. Ekkor a Kirchoff egyenlet: $RI + L \frac{dI}{dt} = U_T$ Megoldása $I(t=0) = 0$ kezdeti

$$\text{feltétellel: } I(t) = \frac{U_T}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Kísérlet: Tekercssel bekötött izzó később kapcsol fel, mert később éri el azt a küszöbáramot, ami ahhoz kell, hogy világítson. És mivel az áram lassan $Q(t) = U_T C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = U_T C \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ ö, ez az idő szemmel is érzékelhető.

RC kör: I eset: nyitott kapcsolót zárok. Ekkor: $RI + \frac{Q}{C} = U_T$, aminek $Q(t=0) = 0$ feltétellel a megoldása: , ahol

$$\text{most } \tau = RC \text{ illetve az áram: } I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{U_T}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

II eset: zárt kapcsolót nyitok.

Szabad rezgés (Csillapítatlan rezgőrendszer, soros LC telep nélkül): $U_L = \frac{1}{2}LI^2$ és $U_C = \frac{1}{2}CU^2$, ezért:

$$U = U_L + U_C = \frac{Q_0^2}{2C}, \text{ ami állandó.}$$

17. váltóáramú áramkörök, komplex formalizmus, soros RLC kör

Soros RLC kör: hasonló a mechanikában levő csillapított kényszerrezgéssel.

$$\frac{Q}{C} + RI + L \frac{dI}{dt} = U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

$$1: \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = U_0 \cos(\omega t) \quad \text{eltolom időben } (Q \rightarrow Q') \quad 2: \frac{Q'}{C} + R \frac{dQ'}{dt} + L \frac{d^2 Q'}{dt^2} = U_0 \sin(\omega t)$$

Ezután összeadom az egyenleteket $(1) + j \cdot (2)$, és definiálom a komplex töltést: $q = Q + j \cdot Q' = q_0 e^{j\omega t}$

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} = U_0 e^{j\omega t} \rightarrow \frac{q_0 e^{j\omega t}}{C} + R q_0 (j\omega) e^{j\omega t} + L q_0 (j\omega)^2 e^{j\omega t} = U_0 e^{j\omega t}$$

Ekkor bevezetem a komplex áramot: $i = \frac{dq}{dt} = q_0 (j\omega) e^{j\omega t} \rightarrow \frac{i}{Cj\omega} + Ri + Lj\omega i = U_0 e^{j\omega t}$, ez olyan, mint az

egyenáramnál a hurok törvény. Komplex esetben nem ellenállásról, hanem impedanciáról beszélünk.

$$\left(\frac{1}{Cj\omega} + R + j\omega L \right) i = \left(-\frac{j}{C\omega} + R + j\omega L \right) i = U_0 e^{j\omega t} \rightarrow (Z_C + Z_R + Z_L) i = Zi = U_0 e^{j\omega t} = u(t)$$

Komplex Ohm törvény: $Z = \frac{u(t)}{i(t)}$, ahol $i(t) = i_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ alakban keressük, i_0, φ az ismeretlenek.

$$Z = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j(\omega t + \varphi)}} = \frac{U_0}{i_0 e^{j\varphi}} \rightarrow i_0 = \frac{U_0}{Z e^{j\varphi}} \quad \text{mivel: } |i_0|^2 = i_0 \cdot i_0^* = \frac{U_0}{Z e^{j\varphi}} \frac{U_0}{Z^* e^{-j\varphi}} = \frac{U_0^2}{ZZ^*} \quad \text{illetve } Z = R + j \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right).$$

A megoldás: $I(t) = R_e i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$, ami már valós.

Ez az áram "le van maradva" egy $\varphi = \arctan \left(\frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$ szöggel.

Rezonancia jelenség (kényszerrezgés rezonancia frekvencián): mi van, ha $\varphi \equiv 0 \rightarrow L\omega = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Ahol ω_0 az ideális rezgő kör frekvenciája (**thomson frekvencia**). $I_0 = \frac{U_0}{R}$, mintha ott se lenne a tekercs és a kondenzátor.

$I_0 = \max$, ha $\omega = \omega_0$. A sávszélesség/jelalakszélesség $= \omega_2 - \omega_1$, ahol az értékek: $\omega_1 = \omega_2 = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$

A $\Delta\omega$ értékére pedig megkapjuk, hogy $\frac{R}{L}$, tehát ha $R \rightarrow 0$, a függvény csúcsosodik és keskenyedik.

Eredmény: rezonanciakatasztrófa.

Végző eredmények: $U_R(t) = RI(t) = RI_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = -LI_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) = I_0 L \omega \cos \left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \quad U_C(t) = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{\omega C} I_0 \cos \left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

ha $\varphi = 0 \rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \frac{1}{\omega_0 C} = L\omega_0$ ilyenkor: $U_R = RI_0 \cos(\omega_0 t)$ $U_L = -LI_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$

$U_C = I_0 \frac{1}{\omega_0 C} \sin(\omega_0 t)$, ahol $U_L + U_C = 0$, tehát ezek amplitúdójuk akármekkora lehet. A kísérletnél, amikor az eredő

feszültség nem egyezett meg a többi összegével, azért volt, mert a mérő nem előjelesen mutatja a feszültséget.

Most csak valóssal: $P(t) = I(t)U(t) = U_0 \cos(\omega t) I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_0 I_0}{2} (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi)$

Egy periódusra: $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi$, itt φ után fizetünk.

18. Maxwell egyenletek, eltolódási áram

Maxwell egyenletek: Az egyenletek az elektromos térerősségvektor (**E**), az elektromos eltolódásvektor (**D**), a mágneses térerősségvektor (**H**), a mágneses indukcióvektor (**B**), az áramsűrűség (**j**) és az elektromos töltéssűrűség között adnak meg összefüggéseket.

Gauss-törvény: $\oint_F \underline{D} d\underline{f} = \int_V \rho_{sz} dV$ Az elektromos tér forrásos, azaz elektromos töltés jelenlétében erővonalak indulnak a pozitív töltésekről, melyek a negatív töltésekben végződnek.

Faraday-Lenz-törvény: $\oint_G \underline{E} d\underline{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \underline{B} d\underline{f}$ A mágneses indukció változása örvényes elektromos teret indukál, amelynek iránya ellenkező mint az őt létrehozó változás.

Mágneses Gauss-törvény: $\int_F \underline{B} d\underline{f} = 0$ A mágneses tér forrásmentes, azaz a mágneses tér erővonalai önmagukba záródnak.

Ampère-féle gerjesztési törvény: $\oint_G \underline{H} d\underline{r} = \int_F \underline{j}_{sz} d\underline{f}$ Mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok algebrai összegével.

Maxwell kiegészített gerjesztési törvénye: $\oint_G \underline{H} d\underline{r} = \int \left(\underline{j}_{sz} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) d\underline{f}$

F₂-n stacionárius áram biztos nem fog folyni.

Megjegyzés: $\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$ $\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0 \mu}$ $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ $\underline{F} = \underline{E}Q + Q(\underline{v} \times \underline{B})$

Vákuumban a Maxwell egyenletek:

1: $\oint_F \underline{D} d\underline{f} = \epsilon_0 \oint \underline{E} d\underline{f} = 0$

2: $\oint_G \underline{E} d\underline{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \underline{B} d\underline{f}$

3: $\oint \underline{B} d\underline{f} = 0$

4: $\oint_G \underline{H} d\underline{r} = \frac{1}{\mu_0} \oint \underline{B} d\underline{r} = \epsilon_0 \int \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} d\underline{f} \rightarrow \int \underline{B} d\underline{r} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \underline{E} d\underline{f}$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása a következő tételhez tartozik!

Eltolódási áram: A kondenzátorlapok közti váltakozó elektromos tér, ami annyiban áram, hogy mágneses tere van. Feltöltéskor vagy kisüléskor a drótban folyó, időben változó vezetési áramot a szigetelőben folytatódó eltolódási áram zárttá egészíti ki.

Időben változó elektromos tér mágneses teret hoz létre!

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_F \sigma d\underline{f} = \frac{d}{dt} \int_F \underline{D} d\underline{f} = \int \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} d\underline{f} = \int \underline{j} d\underline{f}, \text{ ahol } \underline{j} \text{ az eltolódási áramsűrűség.}$$

Ebből következik, hogy: $\oint_G \underline{H} d\underline{r} = \int \left(\underline{j}_{sz} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) d\underline{f} = I_{sz} + I_{elt}$

Kontinuitási egyenlet teljes általánosítása: $0 = \oint_F \underline{j}_{sz} d\underline{f} + \frac{dQ}{dt}$

Drót esetében: $\oint_G \underline{H} d\underline{r} = I_{sz} + (I_{elt} = 0) = I_{sz}$, míg kondenzátornál: $\oint_G \underline{H} d\underline{r} = (I_{sz} = 0) + I_{elt} = I_{elt}$

19. elektromágneses hullámok, Hertz kísérletek, Poynting vektor, rádióadás

Elektromágneses hullámok:

Vákuumbeli Maxwell egyenletek megoldása:

Állítás: $\underline{E} = (0, E(x, t), 0)$ és $\underline{B} = (0, 0, B(x, t))$

Ekkor E szemszögéből: $\oint \underline{E} d\mathbf{r} = \int_I + \int_{II=0} + \int_{III} + \int_{IV=0} = E_y(x + \Delta x, t)l - E_y(x, t)l \equiv -\frac{d}{dt} B_z(x, t)l \Delta x$

$$\frac{E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x, t)}{\Delta x} = -\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

B szemszögéből: $\oint \underline{B} d\mathbf{r} = B_z(x + \Delta x, t)l - B_z(x, t)l = -\frac{1}{C^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$

Ezután az első parciálisan x szerint, míg a másodikat t szerint deriválom, majd az egyenleteket összeadom.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \text{illetve ha fordítva deriválok parciálisan, ugyanezzel a módszerrel:} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

Ezek az egydimenziós hullámegyenletek. Minden függvény, ami az egyenletet kielégíti, hullám (nemcsak sin, és cos lehet). Megoldásuk:

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(kx + \omega t)$$

$$B_z(x, t) = B_0 \sin(kx + \omega t) = \frac{E_0}{c} \sin(kx + \omega t + \pi)$$

Ezek csak transzverzális hullámok lehetnek.

Hertz-kísérlet: Az elektromágneses hullám, ugyanúgy mint a fényhullám visszaverődik a fémlapról. Adó-vevő, elektromágneses sugárnyaláb

Poynting-vektor (ideális, és valódi vezetőre): Iránya megadja az energiaáramlás irányát, hossza az energiaáramlás sűrűségét. $\mathbf{S} = \mathbf{E} \mathbf{H}$ (az egymásra merőleges térerősségek szorzata)

Levezetése:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int u dV = \int \frac{\partial u}{\partial t} dV = \int -\frac{1}{\mu_0} \left(\underline{E} \frac{\partial \underline{B}}{\partial x} + \underline{B} \frac{\partial \underline{E}}{\partial x} \right) dV = \int -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} (\underline{E} \underline{B}) dV = \int -\frac{\partial}{\partial x} \underline{E} \underline{H} dV = \int -\frac{\partial}{\partial x} \underline{E} \underline{H} f dx$$

$$\frac{dU}{dt} = -f (\underline{E} \underline{H} (x - dx) - \underline{E} \underline{H} (x)) \rightarrow f \cdot \underline{S} (x + dx) = \underline{E} \underline{H} (x + dx) f$$

$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$, ahol $\mathbf{S}$ (energiaáram sűrűség, Poynting-vektor) a terjedés irányába mutat.

Vákuumbeli elektromágneses térre az energiamegmaradás: $\frac{dU}{dt} + \oint \underline{S} d\mathbf{f} = 0$

Ahol S-nek csak a vezető keresztmetszetére van járuléka?!

Ideális vezető:

Valódi vezető:

Energia a dróton kívül (külső felületén) szállítódik.

$$S_{\perp} f = E_{\parallel} H f = \frac{j}{\sigma} \frac{I}{2\pi r} 2\pi r l = \frac{I^2 \rho k}{r^2 \pi} = I^2 R = W, \text{ ahol } \mathbf{W} \text{ a vezetőben fejlődő Joule hő.}$$

Rádiózás (elektromágneses hullámok sugárzása): Mozgó töltés sugároz, vegyünk rezgő dipólust.