Elmág Fóka

1. feladat

Egymás után forrasztunk két darab l hosszúságú, d átmérőjű vezetéket, melyeknek a vezetőképessége σ_1 illetve σ_2. Mekkora az ellenállása a kapott $2l$ hosszúságú huzalnak?

2. feladat

Egy L hosszúságú r sugarú vezetéknek inhomogén, $\rho(x) = \rho_0 \frac{x}{L}$ függvénnyel kifejezhető a fajlagos ellenállása. Határozd meg a rendszer ellenállását a fedő- és alaplap között

3. feladat

σ vezetőképességű anyagból formáljunk egy csonkakúp alakú idomot, melynek magassága h, alaplapjának sugara r_1, fedőlapjának sugara r_2. Határozzuk meg a rendszer ellenállását az alaplap és a fedőlap között!

Segítség:

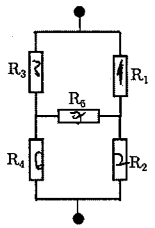
$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

4. feladat

ε elektromotoros erejű, R_b ellenállású telepre R ellenállást kapcsolunk. Mekkora R érték mellett lesz az ellenállásra jutó teljesítmény maximális? Ábrázoljuk a kapocsfeszültséget, ill. az áramot R függvényében!

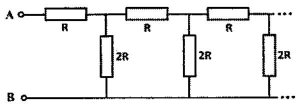
5. feladat

Határozd meg a felrajzolt ellenállás-hálózat eredő ellenállását! ($R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 6\Omega$, $R_5 = 7\Omega$)



6. feladat

R és $2R$ ellenállásokból „végtelen" hosszúságú ellenálláslétrát építünk fel az ábrának megfelelő módon. Mekkora a rendszer eredő ellenállása az A és B pontok között?

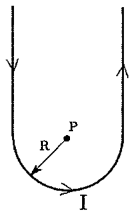


7. feladat

Egy elektront α szög alatt v sebességgel lövünk be homogén B mágneses térbe. Milyen messze lesz az elektron a térbe való belépés pontjától t idő múlva? Milyen pályán mozog?

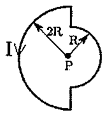
8. feladat

Mekkora a P pontban a mágneses indukció vektor nagysága? (Az objektum egy félkörből és két félegyenesből áll!)



9. feladat

Mekkora a rendszer közepén (P pont) a mágneses térerősség?

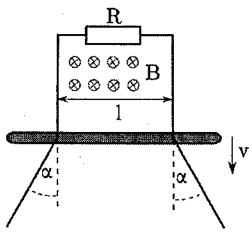


10. feladat

Egy a oldalhosszúságú négyzet alakú vezetőkeretben I áram folyik. Határozzuk meg az áram által keltett mágnesesteret a négyzet középpontjában!

11. feladat

Az ábrán látható elrendezésben a vezetékdarab súrlódásmentesen csúszhat a rögzített síneken. Az érintkezési pontban a vezetés tökéletes. A vezetéket v állandó sebességgel elkezdjük húzni. Határozd meg az idő függvényében a rendszeren folyó áram értékét! (Az ábrán a $t = 0$ időpontbeli elrendezés látható!)



12. feladat

Egy végtelen hosszúságú, σ vezetőképességű, d átmérőjű hengeres vezetőben az áramsűrűség (j) konstans. a) Mekkora a vezeték L hosszúságú darabjának ellenállása? b) Számold ki az Ampere-törvény segítségével a mágneses teret a vezető belsejében!

13. feladat

r sugarú tömör hengeres vezetőt R sugarú vékony fémcső vesz körül koncentrikusan. Bennük azonos nagyságú, de ellentétes irányú I áram folyik. Számítsuk ki és ábrázoljuk a mágneses indukciót a közös tengelytől való távolság függvényében.

14. feladat

Egy N menetszámú, L hosszúságú, R sugarú szolenoid végéhez közvetlenül egy r ($r < R$) sugarú körvezetőt helyezek úgy, hogy a tengelyük egybeessen. Mekkora a rendszer kölcsönös indukciós együtthatója (L_{12})? Mekkora feszültség indukálódik a körvezetőben ($U(t) =?$), ha a szolenoid árama $I = I_0 \sin \omega t$ alakú?

15. feladat

Egy a oldalú négyzet alakú vezetőkeret egy síkban fekszik a végtelen hosszú egyenes vezetővel, úgy hogy a vezető párhuzamos a keret két oldalával, illetve $1,5a$ távolságra van a vezetőkeret középpontjától. Mekkora a rendszer kölcsönös indukciós együtthatója (L_{12})? Mekkora feszültség indukálódik a kereten $U(t)$, ha a végtelen hosszú vezető árama $I = I_0 \cos \omega t$ alakú?

16. feladat

Egy R_1 sugarú körvezeték és egy R_2 sugarú körvezeték ($R_1 >> R_2$) egy síkban fekszenek úgy, hogy tengelyeik egy egyenesbe esnek. Határozd meg a rendszer kölcsönös indukciós együtthatóját!

17. feladat

Egy l magasságú r sugarú egyenletes töltéssűrűségű henger ω szögsebességgel forog a tengelye körül. Mekkora a rendszer mágneses dipólusmomentuma? (A forgás hatására a töltéssűrűség eloszlása nem változik meg.)

1) Áram, áramsűrűség, Ohm-törvény, egyszerű áramkörök, teljesítmény

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad [I] = A = \frac{C}{s}$$

Áramsűrűség vektor: $I = \int \underline{j}\, d\underline{f}$

$$[\underline{j}] = \frac{A}{m^2}$$

Lokális töltésmegmaradás:

$$I\,[\text{zárt felület}] + \frac{dq}{dt}\,[\text{zárt felület belseje}] = 0$$

$$q = \int \rho\, dV \qquad I = \int \underline{j}\, d\underline{f}$$

$$\oint \underline{j}\, d\underline{f} + \frac{d}{dt}\int \rho\, dV = 0$$

$$\int \left(\nabla \underline{j} + \frac{d\rho}{dt}\right) dV = 0$$

Kontinuitási egy.: $\boxed{\nabla \underline{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0}$

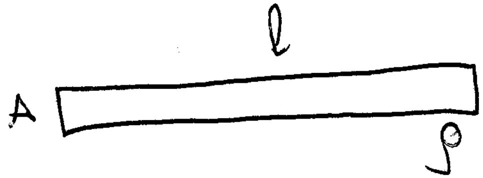
Differenciális Ohm-törvény: $\boxed{\underline{j} = \sigma \underline{E}}$

↳ vezetőképesség

$\boxed{\sigma = \frac{1}{\rho}}$ → ellenállás

Integrális Ohm-törvény: $\boxed{U = RI}$

$$\underline{j} = \frac{I}{A} = \sigma E = \sigma \frac{U}{d} \Rightarrow \boxed{\begin{gathered} I = \frac{\sigma A}{d} U \\ R = \frac{d}{\sigma A} \end{gathered}}$$



$$\boxed{R = \rho \frac{l}{A}}$$

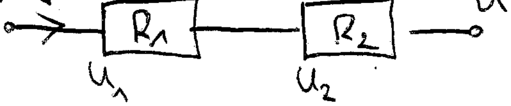
Kirchoff egyenletek:

I. $\oint \underline{j}\, d\underline{f} = 0 = \sum_i I_i$

telep által leadott feszültség ↓

II. $\oint \underline{E}\, d\underline{r} = 0 \Rightarrow \sum U_i = \sum E_i$

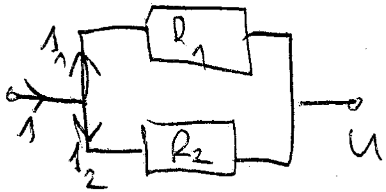
Egyszerű áramkörök



$$\boxed{R_e = R_1 + R_2}$$

$I_1 = I_2 = I$

$U_1 + U_2 = U$



$$\boxed{\frac{1}{R_e}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$

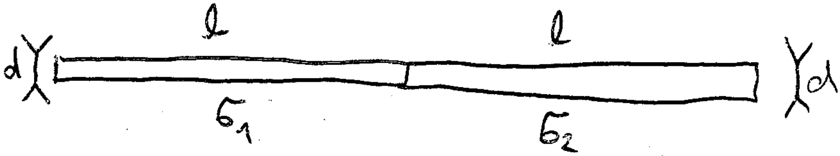
$$I=I_1+I_2$$

$$U=U_1=U_2$$

$$\frac{U_{üres}}{I_{zárlati}}=R_b$$

Teljesítmény: $$\boxed{P=UI=RI^2=\frac{U^2}{R}}$$

1.

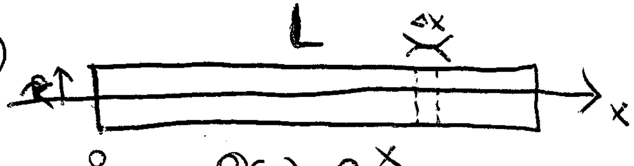


$R_e=?$ $\qquad R=\rho\frac{l}{A}$ $\qquad \rho=\frac{1}{\sigma}$ $\qquad R=R_1+R_2$

$A=\left(\frac{d}{2}\right)^2\pi$ $\qquad R_1=\frac{1}{\sigma_1}\cdot\frac{4l}{d^2\pi}$ $\qquad R_2=\frac{1}{\sigma_2}\frac{4l}{d^2\pi}$

$$R_e=\frac{4l}{d^2\pi}\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right)$$

2.



$$\rho(x)=\rho_0\frac{x}{L}$$

$$R_{\Delta x}=\rho_0\frac{x}{L}\cdot\frac{\Delta x}{r^2\pi}=\frac{\rho_0}{Lr^2\pi}x\Delta x$$

$$R_e \approx \sum R_{\Delta x} \approx \frac{\rho_0}{L r^2 \pi} \sum x \Delta x \qquad R_e = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho_0}{L r^2 \pi} \sum x \Delta x$$

$$R_e = \frac{\rho_0}{L r^2 \pi} \int_0^L x\,dx = \frac{\rho_0}{L r^2 \pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{\rho_0 L}{2 r^2 \pi}$$

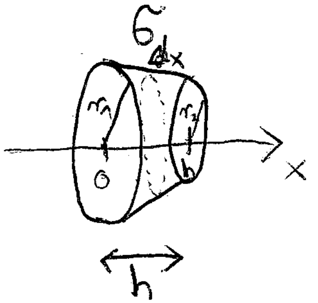
2. megoldás: vezessük be az ellenállássűrűséget:

$$R = \int_a^b \eta(x)\,dx$$

$$\eta(x) = \frac{\rho(x)}{A}$$

$$R = \frac{\rho_0}{L r^2 \pi} \int_0^L x\,dx = \frac{\rho_0 L}{2 r^2 \pi}$$

b.



$$R_{\Delta x} = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta x}{A(x)} = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta x}{r^2(x)\pi}$$

$$\cancel{A}(x) = mx + b$$

$$\cancel{A}(0) = r_1 \qquad \cancel{A}(h) = r_2$$

$$\Rightarrow b = r_1 \qquad m = \frac{r_2 - r_1}{h}$$

$$r(x) = \frac{r_2 - r_1}{h} x + r_1$$

$$R_{\Delta x} = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta x}{\left(\frac{r_2 - r_1}{h} x + r_1\right)^2 \pi}$$

$R_e = \sum R_{\Delta x}$ $\quad R_e = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\sigma\pi} \sum \frac{\Delta x}{\left(\frac{r_2 - r_1}{h} x + r_1\right)^2} \right)$

$$R_e = \frac{1}{\sigma\pi} \int_0^h \frac{dx}{\left(\frac{r_2 - r_1}{h} x + r_1\right)^2} =$$

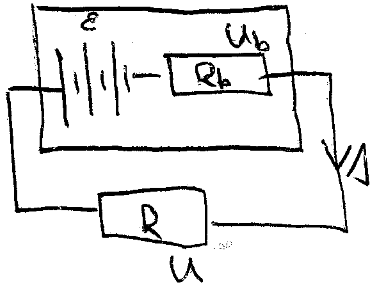
$$= \cancel{\frac{1}{\sigma\pi}\left[-\frac{1}{r_1\left(\frac{r_2-r_1}{h}\right.}\right]} = \frac{1}{\sigma\pi} \left[- \frac{1}{\frac{r_2 - r_1}{h}\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} x\right)} \right]_0^h =$$

$$= \frac{1}{\sigma\pi} \left(+ \frac{1}{\frac{r_2 - r_1}{h} \cdot r_1} - \frac{1}{\frac{r_2 - r_1}{h} r_2} \right) =$$

$$\cancel{\frac{h}{\pi\sigma}} = \frac{h}{\pi\sigma} \left(- \frac{1}{r_2 (r_2 - r_1)} + \frac{1}{r_1 (r_2 - r_1)} \right) =$$

$$= \frac{h}{\pi\sigma (r_2 - r_1)} \left(- \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = \frac{h}{\pi\sigma r_1 r_2}$$

h.



$U_b = R_b \cdot I$ } Ohm
$U = R I$

$\varepsilon = U_b + U$ Kirchoff 2.

$I = I_1 = I_2$ Kirchoff 1.

$$\varepsilon = (R_b + R) I \qquad P = R \cdot I^2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

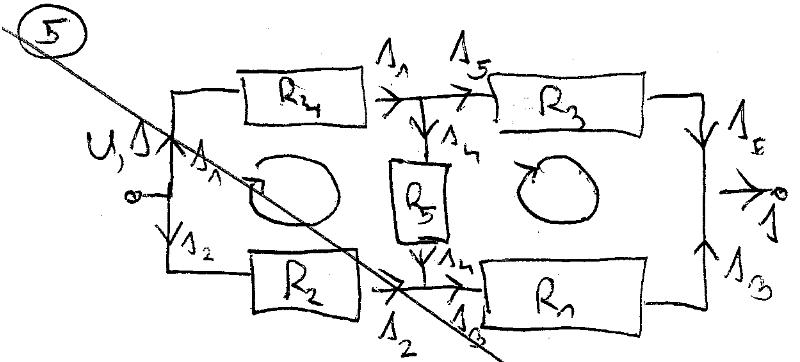
$$I = \frac{\varepsilon}{R_b + R} \Rightarrow P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R_b+R)^2}$$

$$\frac{dP}{dR} \overset{!}{=} 0 = \cancel{\frac{\varepsilon^2}{R_b+R}} \quad \frac{\varepsilon^2 (R_b+R)^2 - 2\varepsilon^2 R (R_b+R)}{(R_b+R)^4}$$

$$(R_b+R)^2 - 2RR_b - 2R^2 = 0$$

$$R_b^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \boxed{R = R_b}$$

5



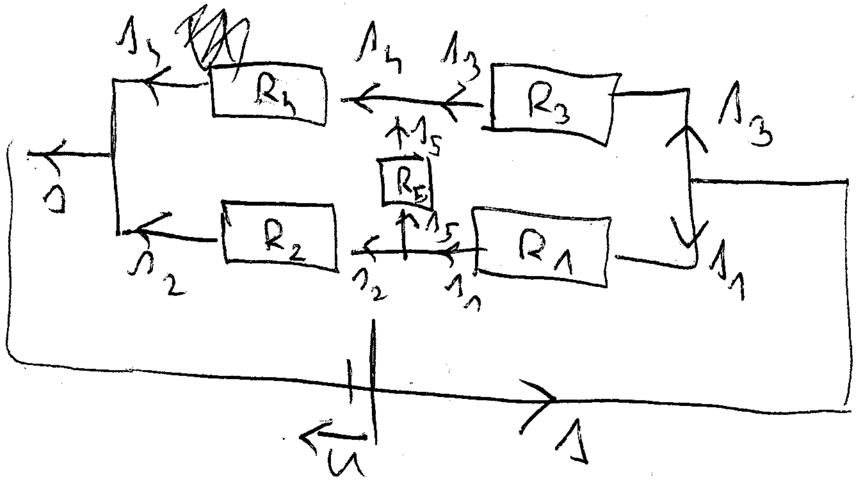
$$I = I_1 + I_2 \qquad I_1 R_4 + I_4 R_5 - I_2 R_2 = 0$$

$$I = I_3 + I_5 \qquad I_5 R_3 - I_3 R_1 - I_4 R_5 = 0$$

$$I_1 = I_5 + I_4$$

$$I_2 + I_4 = I_3$$

(5)



$I = I_1 + I_3$

$I_4 = I_5 + I_2$

$I_3 + I_5 = I_4$

$I_4 + I_2 = I$

$0 = R_1 I_1 + R_5 I_5 - R_3 I_3$

$U = R_1 I_1 + R_2 I_2$

$0 = R_5 I_5 + R_4 I_4 - R_2 I_2$

$U = R_3 I_3 + R_4 I_4$

$I = I_1 + I_3$

$I_2 + I_5 = I_4$

$I_3 + I_5 = I_4$

$I_1 + 7 I_5 = 3 I_3$

$U = I_1 + 2 I_2$

$2 I_2 = 7 I_5 + 6 I_4$

$U = 3 I_3 + 6 I_4$

$I = I_1 + I_4 - I_5$

$I_1 + 7I_5 = 3I_4 - 3I_5$

$U = I_1 + 2I_4 - 2I_5$

$2(I_4 - I_5) = 7I_5 + 6I_4$

$U = 3I_4 - 3I_5 + 6I_4$

$I = I_1 + I_4 - I_5$

$I_1 = 3I_4 - 10I_5$

$0 = 9I_5 + 4I_4$

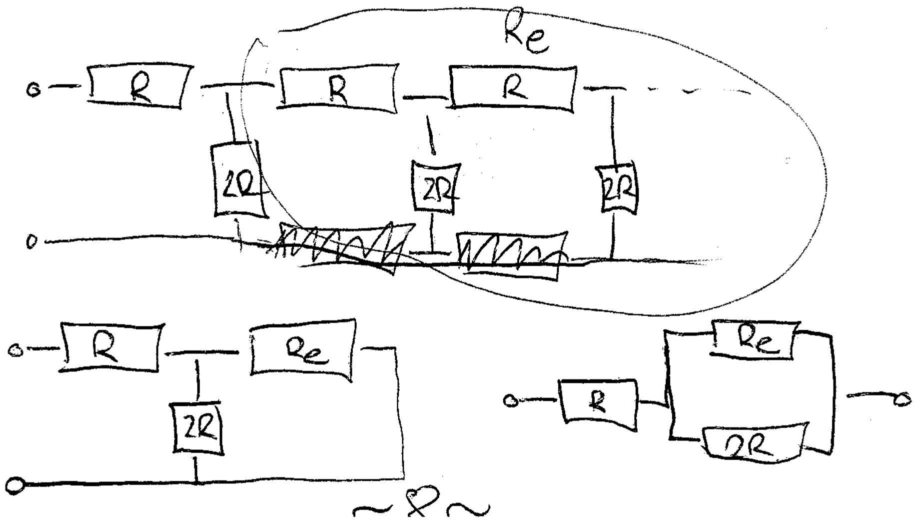
$U = 9I_4 - 3I_5$

$I = 4I_4 - 11I_5 \qquad U = 9I_4 - 3I_5$

$\frac{9}{4} I_5 - I_4$

$$R = \frac{\frac{81}{4} I_5 - 3I_5}{9I_5 - 11I_5} = \frac{69}{8}$$

6.



$$R_e = R + \frac{1}{\frac{1}{R_e} + \frac{1}{2R}} = R + \frac{2RR_e}{2R + R_e}$$

$$R_e(2R + R_e) = R(2R + R_e) + 2RR_e$$

$$\cancel{2RR_e} + R_e^2 = 2R^2 + RR_e + \cancel{2RR_e}$$

$$R_e^2 - RR_e - 2R^2 = 0$$

$$R_e = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{R \pm \sqrt{5}R}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R$$

2) Mágneses erő, Biot-Savart- és Ampère-törvény, mágneses dipólmomentum, mozgási- és nyugalmi indukció

Lorentz-erő: $\underline{F} = q(\underline{v} \times \underline{B})$

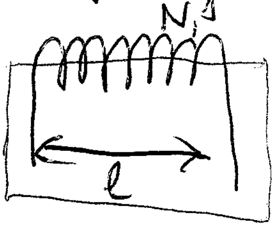
$$\underline{F} \perp \underline{v}, \quad \underline{F} \perp \underline{B}$$

$$F_i = \varepsilon_{ijk} v_j B_k q$$

Nincs mágneses monopólus: $\oint \underline{B}\, d\underline{f} = 0$

Ampère-féle törvény: $\oint \underline{B}\, d\underline{r} = \mu_0 I$

Pl:

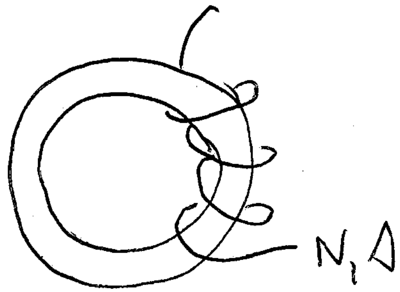


$$\oint \underline{B}\, d\underline{r} = \mu_0 I$$
$$Bl = \mu_0 N I$$

Ha anyag is jelen van: $\oint \underline{H}\, d\underline{r} = I_{valódi}$

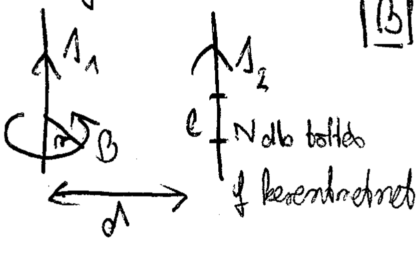
$$\underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$$

Pl:



$$\oint \underline{H}\, d\underline{r} = I$$
$$H \cdot 2r\pi = IN$$
$$H = \frac{IN}{2r\pi}$$
$$B = \mu \frac{IN}{2r\pi}$$

Áramjárta vezető



$$|\underline{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

$$F_2 = Nqv_2B_1 = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{Nq}{fl}}_{\rho}\, v}_{j}\, f}_{I}\, Bl = I_2 B_1 l$$

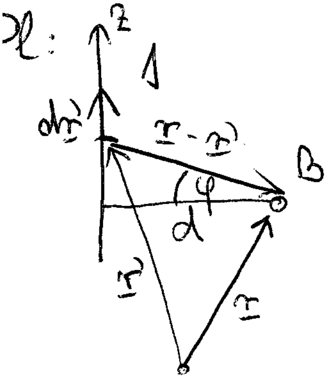
Biot-Savart-tv:
$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$\oint \underline{B}\, d\underline{f} = 0 \Rightarrow \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3 \underline{r}'$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Pl:



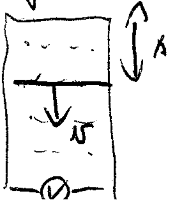
$$d\underline{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} \quad |\underline{r}-\underline{r}'| = \frac{d}{\cos\varphi}$$

$$|d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')| = d \cdot dz$$

$$z = d\, \mathrm{tg}\, \varphi \quad dz = \frac{d}{\cos^2\varphi} d\varphi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d \cdot \frac{d}{\cos^2\varphi} d\varphi}{\left(\frac{d}{\cos\varphi}\right)^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Mozgási indukció:

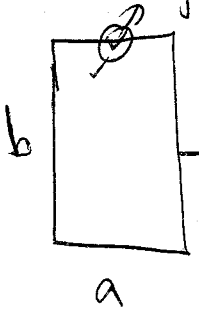


$$\underline{F} = q\, \underline{v} \times \underline{B} \quad W = Fl = qvBl$$

$$U = vBl$$

$$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B x l) = -Bvl$$

Keret mágneses térben



$$v = \frac{a}{t}$$

$$W = qvB(x+a)b - qvB(x)b =$$

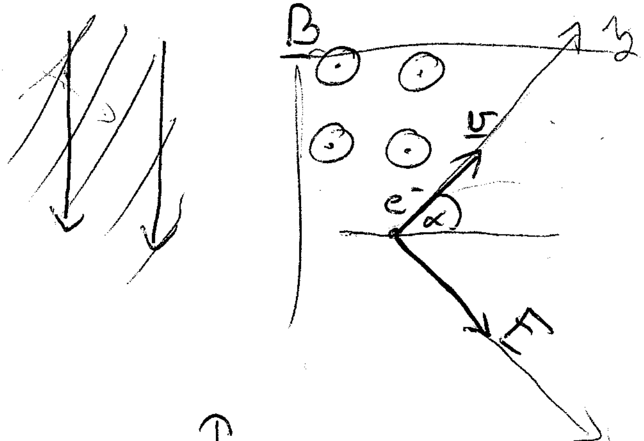
$$= qv\,\frac{B(x+a)-B(x)}{a}\,ba =$$

$$= q\,\frac{B(x+a)-B(x)}{\Delta t}\,ab$$

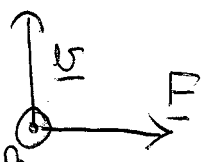
$$W = q\frac{dB}{dt}ab$$

$$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Bab) = -\frac{dB}{dt}ab$$

7.



~



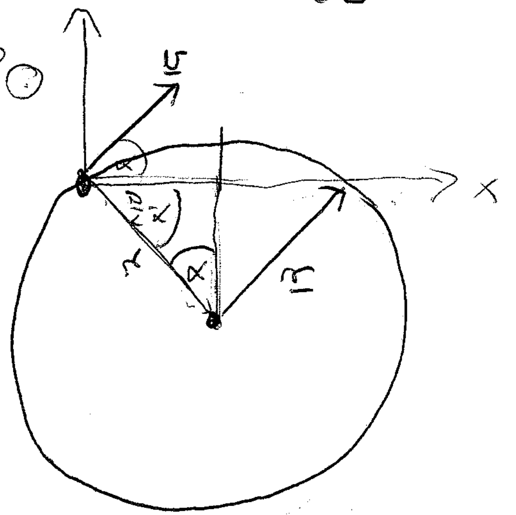
$$F = evB$$

$$F \perp v$$

$$m\frac{v^{\cancel{2}}}{r} = e\cancel{v}B \Rightarrow r = \frac{mv}{eB}$$

$$m\omega^{\cancel{2}}\cancel{r} = e\cancel{\omega r}B$$

$$\omega = \frac{eB}{m}$$



$$x_0 = r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = r\sin\alpha$$

$$y_0 = -r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -r\cos\alpha$$

$$\underline{r_0} = r\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix} \qquad \underline{r_1} = r\begin{pmatrix}\sin(\omega t-\alpha)\\ +\cos(\omega t-\alpha)\end{pmatrix}$$

$$\underline{r}(t) = \underline{r_0} + \underline{r_1}(t)$$

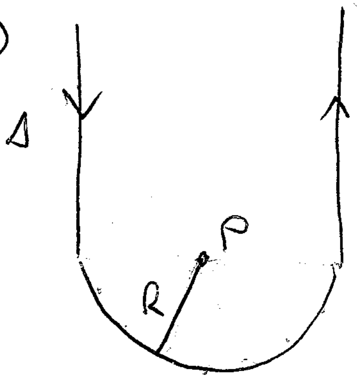
$$(\underline{B},\underline{v}) = \alpha \qquad \underline{F} = e(\underline{v}\times\underline{B}) = evB\sin\alpha$$

$$\underline{F}\perp\underline{v} \Rightarrow m\frac{v^{\cancel{2}}}{r} = e\cancel{v}B\sin\alpha$$

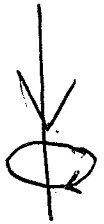
$$\frac{mv}{eB\sin\alpha} = r$$

$$\omega = \frac{eB}{m}\sin\alpha$$

(P.)

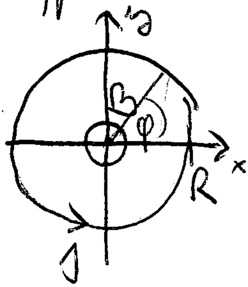


Végtelen vezető:



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$$

Kör-gyűrű:



$$\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$\underline{r}' = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\underline{r}-\underline{r}'| = R \qquad d\underline{r}' = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\, d\varphi \\ R\cos\varphi\, d\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}') = \left(+R^2\sin^2\varphi\, d\varphi + R^2\cos^2\varphi\, d\varphi\right)_z =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +R^2 d\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underline{B}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{-R^2 d\varphi}{R^3} = +\frac{\mu_0 I}{2R}$$

$\cancel{B = \sum \Delta B_i = \sum}$

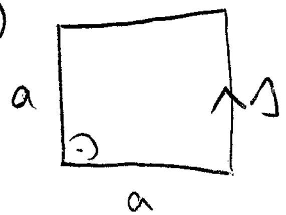
Szuperpozíció: $B_{tot} = 2 \cdot \dfrac{\frac{\mu_0 I}{2R\pi}}{2} + \dfrac{\frac{\mu_0 I}{2R}}{2}$

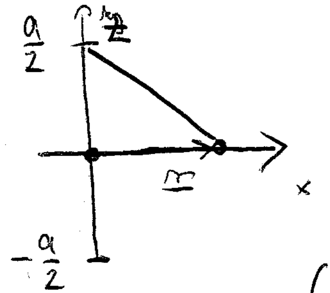
9.

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4(2R)} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{8R} + \frac{2\mu_0 I}{8R} = \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

10.





$$\frac{a}{2} = b$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{d\underline{r}' \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad d\underline{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix}$$

$$|\underline{r} - \underline{r}'| = (b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

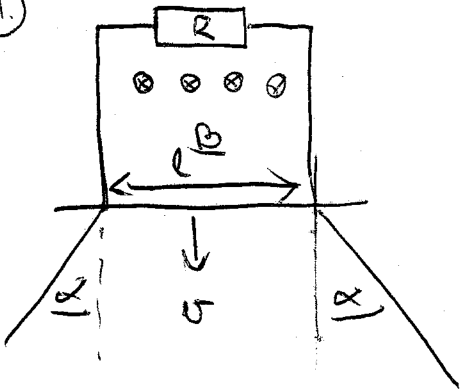
$$d\underline{r}' \times (\underline{r} - \underline{r}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} dz \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-b}^{b} \frac{b\, dz}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I b}{4\pi} \int_{-b}^{b} \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{4\pi}\left[\frac{x/b^2}{\sqrt{x^2+b^2}}\right]_{-b}^{b} = \frac{\mu_0 I b}{4\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{b^2}$$

$$B_{tot} = 4B_y = \frac{\mu_0 I}{b^2\pi}\cdot\sqrt{2} = \frac{\mu_0 I 4\sqrt{2}}{a^2\pi}$$

(11.)

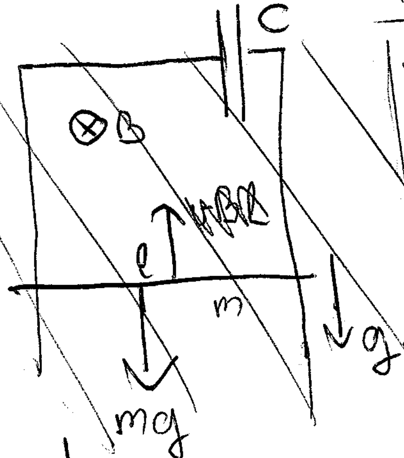


$$L(t) = l + vt\,\mathrm{tg}\alpha$$

$$U_i = -BvL(t)$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Bv(l+vt\,\mathrm{tg}\alpha)}{R}$$

(12)



$$\cancel{F = ma = mg - vBl}$$

$$\cancel{a = g - \frac{Bl}{m}v}$$

$$\cancel{U_i = Bvl}$$

$$\cancel{\int_0^t I\,dt = CU(t)}$$

(12.)

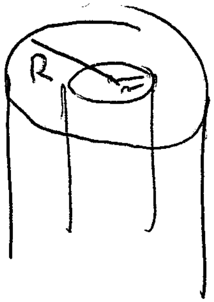
$$I_t = j\cdot\frac{d^2}{4}\pi \qquad I(x) = j\,x^2\pi$$

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{4l}{d^2\pi} \qquad \oint \underline{B}\,d\underline{r} = \mu_0 I(x)$$

$$B\cdot 2x\cancel{\pi} = \mu_0 j x^2\cancel{\pi}$$

$$B = \frac{\mu_0 J x}{2}$$

13.

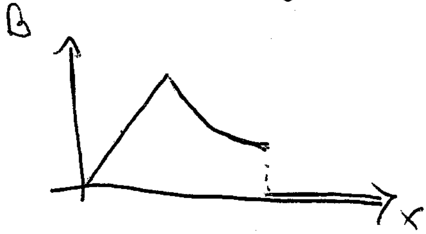


$0 < x < r$: $B 2\pi x = \mu_0 J \cdot \frac{x^2 \cancel{\pi}}{r^2 \cancel{\pi}}$

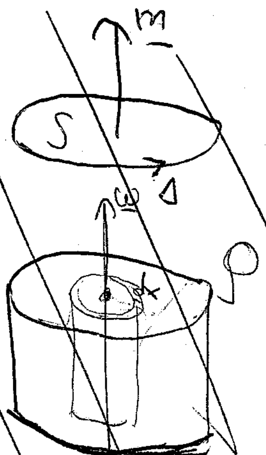
$$B(x) = \frac{\mu_0 J x}{2 r^2 \pi}$$

$r < x < R$: $B(x) = \frac{\mu_0 J}{2\pi x}$

$R < x$: $B(x) = \frac{\mu_0 J}{2\pi x} - \frac{\mu_0 J}{2\pi x} = 0$



14.

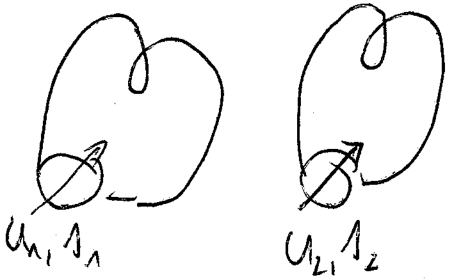


$\underline{m} = I \underline{S}$

$2\pi x dx \cdot l \rho = q$

$v = \omega x$

3. Kölcsönös és önindukció



$$U_1 = L_{11}\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt} \qquad U_2 = L_{21}\frac{dI_1}{dt} + L_{22}\frac{dI_2}{dt}$$

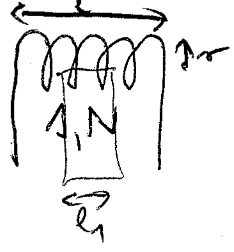
Önindukciós eh: L_{11}/L_{22}

Kölcsönös indukciós eh: $L_{12} = L_{21}$

(Ha az első tekercs teljes fluxusa átmegy a 2. tekercsen:

$$L_{12} = \sqrt{L_{11}L_{22}}$$)

Tekercs önindukciós eh-ja:



$$\underline{B} = \mu \underline{H}$$

$$H l_1 = IN\frac{l_1}{l} \qquad H = \frac{IN}{l}$$

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}$$

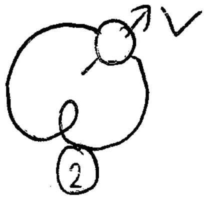
$$\Phi = B r^2 \pi N = \mu_0 \frac{r^2 \pi N^2}{l} I$$

$$U_{ind} = \frac{d\phi}{dt} = \mu_0 \frac{r^2\pi N^2}{l}\frac{dI}{dt} = L\cdot\frac{dI}{dt}$$

L önindukciós eh.

Két „tekercs":

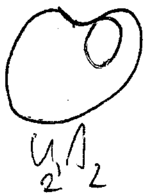
$$U_1(t) = L_{11}\frac{dI_1}{dt}$$



$$U_2(t) = L_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

$$\Rightarrow U_2(t) = U_1(t)\cdot\frac{L_{21}}{L_{11}}$$

$$U_2 = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt}$$ ← 2. hurokra vonatkozó indukciós fluxus



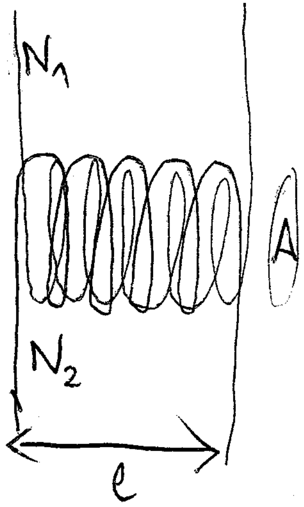
Ha az 1. hurokban folyó áram hozza létre: $\Phi_{B2} = M_{21}\cdot I_1$

$$U_2 = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

Ugyanígy: $\Phi_{B1} = M_{12} I_2$ $\quad U_1 = -\frac{d\Phi_{B1}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_1}{dt}$

$M_{12} = M_{21} = M$ kölcsönös ind. eh.

Pl



$M = ?$

A 2. tekercsben az I_1 áram által keltett:

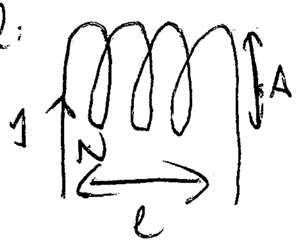
$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l}$ indukció fluxusa:

$$\Phi_{B2} = N_2 A B_1 = N_2 A \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l}$$

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}$$

Önindukció: $\Phi_B = L \cdot I$ $\quad U = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$

Pl:



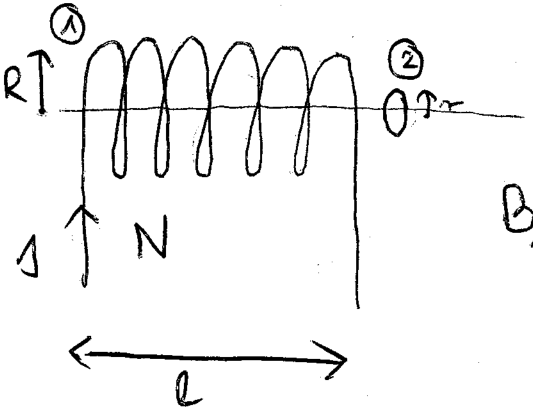
$B = \mu \frac{NI}{l}$ $\quad \Phi_{B1} = \mu \frac{NA}{l} I$

1 menetre vonatkozó fluxus

Teljes fluxus: $\Phi_B = N \Phi_{B1} = \mu \frac{N^2 A}{l} I$

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l}$$

15



$$L_{12} = ?$$

$$B_1 = \mu_0 \frac{N I_1}{l}$$

$$\hookrightarrow \Phi_{B2} = 1 \cdot r^2\pi \cdot B_1 =$$

$$= \mu_0 \frac{N r^2 \pi}{l} I_1$$

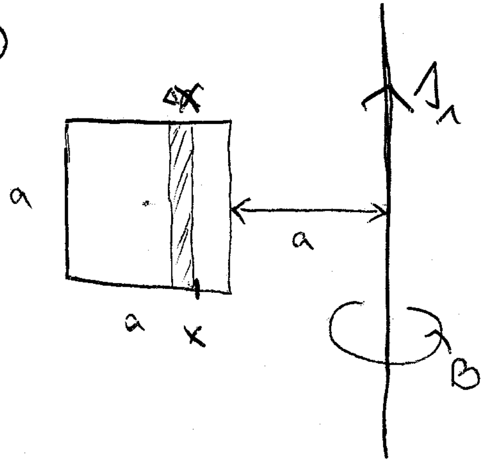
$$U_2 = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt} = -\mu_0 \frac{N r^2\pi}{l}\frac{dI_1}{dt}$$

$$U_2(t) = -\mu_0 \cdot \frac{N r^2 \pi}{l} \cdot I_0 \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$L_{11} = \mu_0 \frac{N^2 R^2 \pi}{l} \qquad L_{22} = \mu_0 \frac{r^2 \pi}{l}$$

$$\sqrt{L_{11} L_{22}} = \mu_0 \frac{N R r \pi}{l}$$

16.



$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r}$$

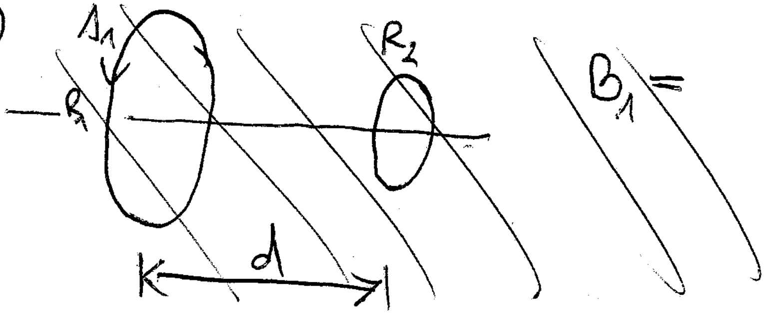
$$\Phi_{\Delta A} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi x} \cdot a\Delta x$$

$$\Phi_{B2} = \mu_0 \frac{I_1 a}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \mu_0 \frac{I_1 a}{2\pi}\left(\ln(2a) - \ln(a)\right)$$

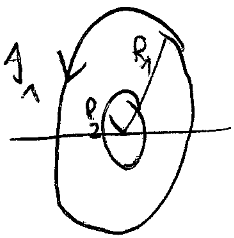
$$\Phi_{B_2} = \ln 2 \cdot \mu_0 \frac{I_1 a}{2\pi}$$

$$M = \ln 2 \cdot \mu_0 \frac{a}{2\pi} \qquad U = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = \frac{\ln 2}{2\pi}\mu_0 a \omega I_0 \sin(\omega$$

17.



$B_1 =$



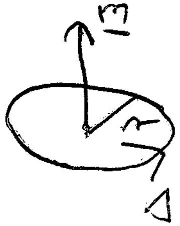
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \qquad \Phi = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} R_2^2 \pi$$

$$M = \frac{\mu_0 \pi}{2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1}$$

(18) Mágneses momentum

a)

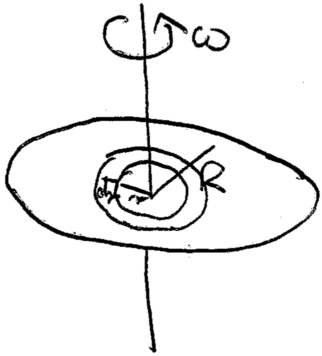
$$\underline{m} = I\underline{A} \qquad A = r^2\pi$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

$$m = Ir^2\pi = \frac{2\pi B R^3}{\mu_0}$$

b)



$$Q = \sigma R^2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\sigma(2\pi r\,dr)}{T}$$

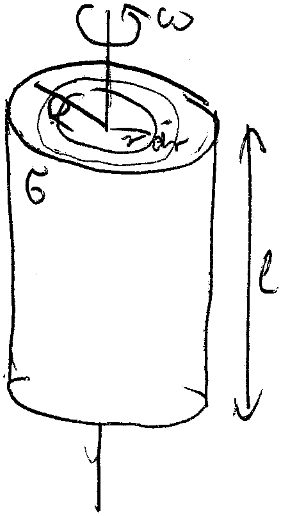
$$dI = \sigma\omega r\,dr$$

$$dm = dI(\pi r^2)$$

$$m = \int_0^R \pi\sigma\omega r^3\,dr = \frac{\pi}{4}\sigma R^4\omega$$

$$m = \frac{QR^2\omega}{4}$$

c)



$$Q = \sigma R^2 \pi l$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow$$

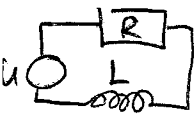
$$\Rightarrow dI = \frac{dQ}{T} = \sigma(2\pi r\,dr)\,l\,\frac{\omega}{2\pi} =$$

$$= \sigma\omega l r\,dr$$

$$dm = dI(r^2\pi) = \pi\sigma\omega l r^3\,dr$$

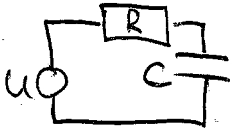
$$m = \int_0^R \pi\sigma l\omega r^3\,dr = \frac{\pi}{4}\sigma R^4 l\omega$$

$$m = \frac{QR^2\omega}{4}$$



$$RI + L\frac{dI}{dt} = U(t)$$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$



$$RI + \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt = U(t)$$

$$\cancel{R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0}$$

$$U_R = U_0\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$U_C = U_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$