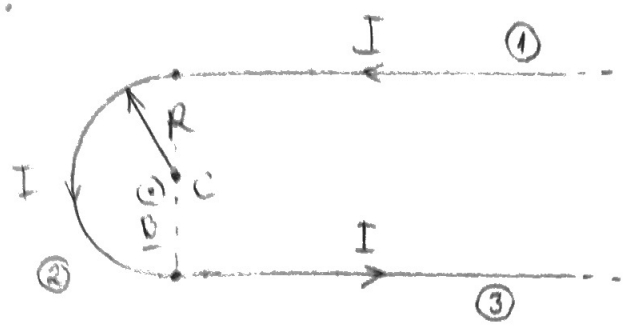
2. zárthelyi dolgozat

#1.



Boontsuk három részre a vezetőt! Az ① és a ③ egy-egy félvégtelen egyenes vezető, melyek a félkör C középpontjában (a jobb-kéz-szabály szerint) ugyanakkora, azonos irányú $\underline{B}$-teret keltenek:

$$B_1 = B_3 = \frac{1}{2} B_\infty = \frac{\mu_0 I}{4\pi R},$$

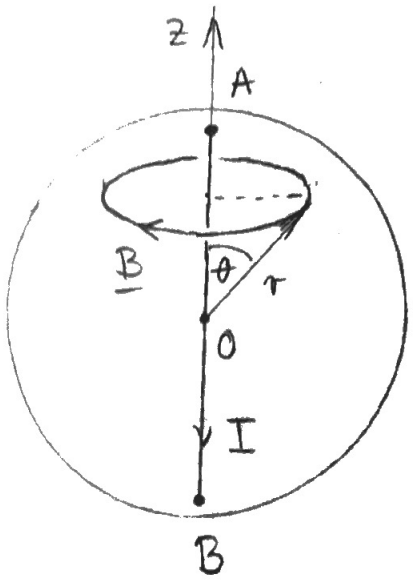
ahol B_∞ a végtelen egyenes vezető tere, és felhasználtuk a szuperpozíciót. Egy félkör által keltett indukció éppen fele az egész kör középpontjában kialakuló indukciónak:

$$B_2 = \frac{1}{2} B_{kör} = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

$\underline{B}_1$, $\underline{B}_2$ és $\underline{B}_3$ azonos irányú, az ábra síkjából kifelé mutat, így az eredő $\underline{B}$-tér:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right).$$

#2.



Az áramelosztás a z tengelyt tartalmazó síkra nézve tükörszimmetrikus, ezért a $\underline{B}$-térnek csak $\underline{e}_\varphi$ irányú komponense van, az indukcióvonalak pedig körök. Egy ilyen körre a gerjesztési törvény:

$$B(r,\theta) \cdot 2\pi r \sin\theta = \mu_0 I, \text{ ha } r < R,$$

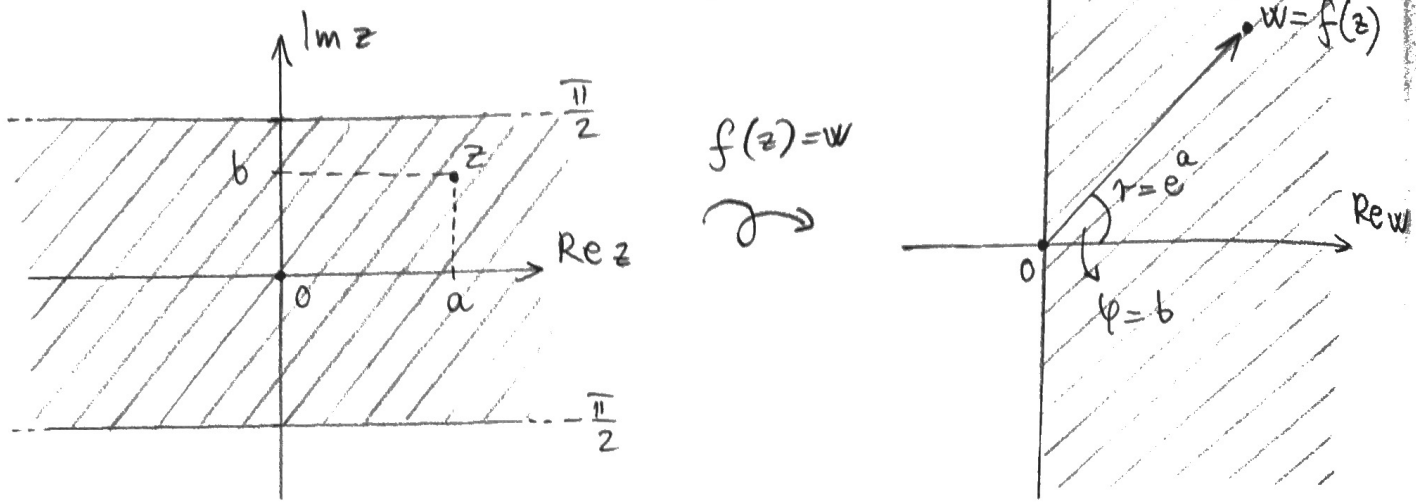
$r > R$ esetén pedig nulla.

Tehát az eredmény:

$$\left.\begin{aligned} B(r,\theta) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin\theta}, \text{ ha } r < R \\ B(r,\theta) &= 0, \text{ ha } r > R. \end{aligned}\right\}$$

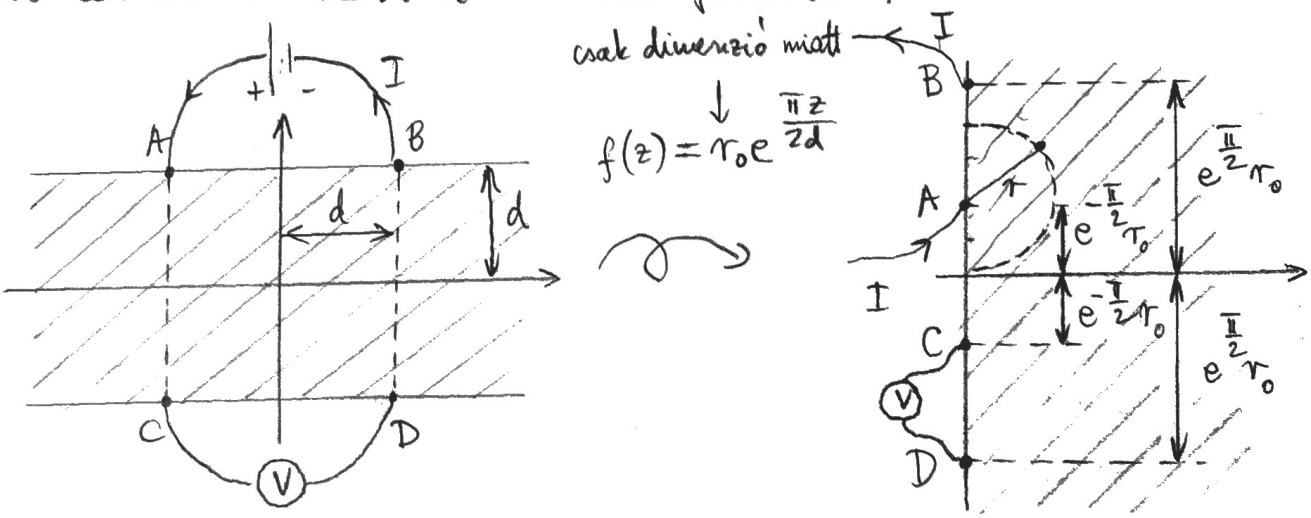
#3.

Tekintsük először az $f(z)=e^z$ függvény hatását!



$$z=a+bi \longrightarrow w=f(z)=e^z=\underbrace{e^a}_{r}\cdot\underbrace{e^{ib}}_{e^{i\varphi}} \longrightarrow \begin{array}{l} r=e^a \\ \varphi=b \end{array}$$

Tehát $f(z)$ a $-\frac{\pi}{2}\leq \mathrm{Im}(z)\leq\frac{\pi}{2}$ sávolt a $\mathrm{Re}(w)\geq 0$ félsíkra képezi le. Nézzük most a konkrét feladatot!



Egyetlen (pl. az A) elektróda potenciálja r távolságra:

$$U(r)=+\int E(r)\,dr=\varrho\int j(r)\,dr=\varrho\frac{I}{\pi\delta}\cdot\int_r^{r_0}\frac{1}{r}\,dr=\frac{\varrho I}{\pi\delta}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Az A és B elektródák szuperpozíciójával számolható az U_{CD} feszültség:

$$U_{CD}=\frac{\varrho I}{\pi\delta}\left[\ln\left(\frac{r_0}{2r_0e^{-\pi/2}}\right)-\ln\left(\frac{r_0}{r_0e^{-\pi/2}+r_0e^{\pi/2}}\right)-\ln\left(\frac{r_0}{r_0e^{-\pi/2}+r_0e^{\pi/2}}\right)+\ln\left(\frac{r_0}{2r_0e^{\pi/2}}\right)\right]$$

Egyszerűsítések után:

$$U_{CD}=\frac{2\varrho I}{\pi\delta}\cdot\ln\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}\right)=\frac{2\varrho I}{\pi\delta}\ln\left[\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

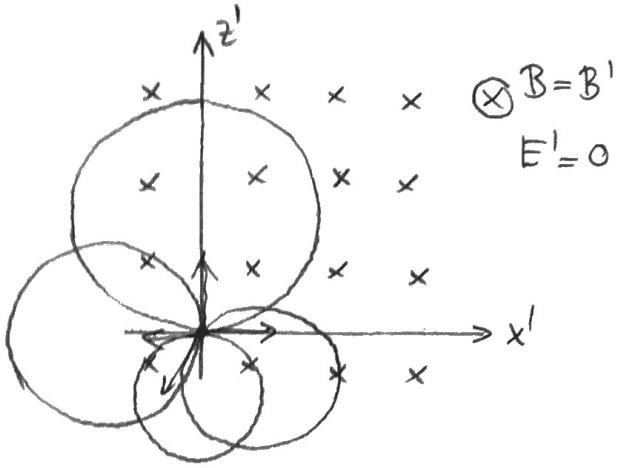
F4.

Érdemes áttérni egy olyan K' koordináta-rendszerre, amelyben az elektromos mező teljesen eltűnik. A transzformációs összefüggés szerint:

$$\underline{E}' = \underline{E} + \underline{V} \times \underline{B},$$ ahol $\underline{V}$ a K' rendszer sebessége K-hoz viszonyítva.

$\underline{E}' = \underline{0}$, ha $\underline{E} = -\underline{V} \times \underline{B}$, ez úgy lehetséges, ha $\underline{V}$ éppen +z irányú, nagysága pedig $V = \frac{E}{B}$.

Tehát a K' rendszerben ezt látjuk (néhány pályát felrajzoltunk)



A különböző kezdősebességek miatt a pályák sugara különbözik, de a ciklotronfrekvencia azonos:

$$m \underbrace{R\omega_c^2}_{a_{cp}} = Q \underbrace{R\omega_c}_{v} \cdot B,$$

ebből: $$\omega_c = \frac{QB}{m}.$$

Az ionok tehát a K' rendszerben $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ időközönként találkoznak az origóban, így az eredeti K rendszerben is találkoznak a z tengelyen, annak

$$z = n \cdot V T = 2\pi n \cdot \frac{mV}{QB}$$

koordinátájú pontjaiban. A találkozási pontok távolsága tehát:

$$d = 2\pi \cdot \frac{mV}{QB}.$$