Elektrodinamika B

1. ZH feladatsora

2014. március 25.

1. Egy végtelen hosszúságú hengerszimmetrikus kondenzátorban a koaxiális fegyverzetek sugara R_1 és R_2. A kondenzátor l hosszú szakaszán $l/4$ hosszúságban ϵ_1, a maradék hosszon pedig ϵ_2 permeabilitású szigetelővel van kitöltve, a fegyverzeteken pedig $+Q$ és $-Q$ töltés található. Mekkora a kiválasztott l hosszú szakasz kapacitása?

   (*8 pont*)

   A feladat kulcsa, hogy a két közeg határán a térerősség tangenciális komponense folytonosan megy át, és tekintve hogy radiális szimmetriájú a rendszer, a normális komponens nulla. Ebből a megállapításból kiindulva már akár ketté is bonthatjuk a feladatot két kondenzátorra, azonban előnyösebb felírni egy Gauss-integrált az órán tanult módon, majd az órai feladathoz hasonlóan megoldani a feladatot (igazából innen betűről betűre megegyezik). A végeredmény:

$$C = \frac{\pi\epsilon_0 l(\epsilon_1 + 3\epsilon_2)}{2\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

2. Egy földelt vezetősík mellé helyezünk egy Q és egy $-Q$ töltést, egymástól l, a laptól egyaránt d távolságra. Milyen lesz a vezető felületén kialakuló töltéssűrűség? Milyen irányú és mekkora erő fog hatni a Q töltésre?

   (*8 pont*)

   A felületi töltéssűrűséget a dielektromos eltolásvektor közeghatáron való viselkedéséből származtatjuk ($D_{n1} - D_{n2} = \eta$). Tekintve hogy a földelt lemez túloldalán nincs töltés, a lemez pedig a két töltésünk terét pedig leárnyékolja, ezért:

$$\eta = D_n = -\frac{Qd}{2\pi}\left[\frac{1}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x-l)^2+y^2+d^2)^{3/2}}\right]$$

   A Q töltésre ható erőnél egyértelmű a $-Q$ töltés erőjáruléka, a földelt sík járulékát pedig megkaphatjuk a felületen kialakuló tölséssűsűség elemi részeinek erőjáradékainak integrálásával. Ám ennél jóval egyszerűbb a tükörtöltések módszerével, ahol is még két ponttöltés kerül a képbe. A kapott végeredmény:

$$F_x = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{l^2} - \frac{l}{((2d)^2+l^2)^{3/2}}\right], F_z = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(2d)^2} - \frac{2d}{((2d)^2+l^2)^{3/2}}\right]$$

3. Hogyan nézne ki a ponttöltés térerősségének távolságfüggése egy kétdimenziós univerzumban, ha a Gauss-törvényt ott is igaznak tekinthetjük?

(*4 pont*)

Ha felírunk egy Gauss-integrált egy ponttöltés köré, célszerűen kör alakra (mivel a forgásszimmetria miatt a ponttöltésről egyenlő távolságokra egyenlő kell hogy legyen a térerősség), akkor felületként annak kerülete értelmezhető, így:

$$\int \epsilon_0 E\, dA = Q$$

$$\epsilon_0 E 2r\pi = Q$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}$$