

1 ZH gyakorlás

Vektoranalízis

1. Számítsuk ki a következő vektormezők divergenciáját és rotációját! *Elméleti Fizikai példatár 1/6.1*

$$\underline{v}_1 = r^2 \underline{r}, \underline{v}_2 = \underline{a} \times \underline{r}, \underline{u} = (\underline{a} \cdot \underline{r}) \underline{r}, \underline{w} = (\underline{a} \times \underline{r}) \times \underline{r}$$

2. *Számítsuk ki a következő vektormező vonalintegrálját egy R sugarú csavarvonal mentén $\underline{r}_1 = (R, 0, 0)$ és $\underline{r}_2 = (R, 0, l)$ pontok között! Számítsuk ki a két pontot összekötő egyenes mentén is! *Elméleti Fizikai példatár 1/6.16*

$$\underline{v}(x, y, z) = (3xy - x^2 - y, 2x + y^3, x - y)$$

3. *Számítsuk ki az alábbi vektormező felületi integrálját egy $x - y$ síkban R sugarú kör alapú $z \in [-L, +L]$ henger palástjára! Vegyük a következő skalármezőt: $\phi = \nabla \cdot \underline{v}$, majd számítsuk ki a térfogati integrálját az előbbi henger térfogatára! Ellenőrizzük a Stokes-tétel érvényesülését!

$$\underline{v} = \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

4. Számítsuk ki a következő vektortér felületi integrálját egy R sugarú, origó középpontú gömb felületre! Vegyük a következő skalárpotenciált: $\phi = \nabla \cdot \underline{v}$ és számítsuk ki ennek a térfogati integrálját az előbbi gömbre!

$$\underline{v} = \underline{r} \cdot \underline{r}$$

5. Számítsuk ki a következő vektortér felületi integrálját egy egység magas $((0, 0, 1)$ csúcspont) egység sugarú kör alapú $(x - y)$ síkban) kúp teljes felületére, majd vegyük a divergenciájából kapott skalármező $(\nabla \cdot \underline{v})$ térfogati integrálját a kúpra - ellenőrizzük a Gauss-tétel teljesülését! Vegyük ugyanennek a vektortérnek a vonalintegrálját a kúp alapkörére, majd a rotációjaként kapott vektortér $(\nabla \times \underline{v})$ felületi integrálját az alapkör felületére - ellenőrizzük a Stokes-tétel teljesülését! *Elméleti Fizikai példatár 1/6.18*

$$\underline{v} = (3x - y, zx^2 - y, 2xy + z)$$

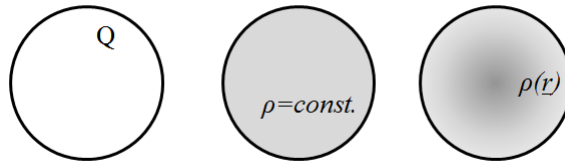
6. *Ellenőrizzük a Stokes tétel teljesülését a következő példán: vegyük a következő vektortér vonalmenti integrálját egy R sugarú, origó középpontú körvonalra, majd rotációjának felületi integrálját a kör felületére! Nincs egyenlőség \rightarrow az origóban lévő szingularitás miatt, egyszerűen összefüggő tartomány kell \rightarrow korrigálás!

$$\underline{v} = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

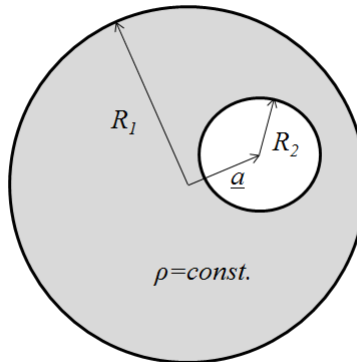
Elektrosztatika

1. *Határozzuk meg egy Q ponttöltés által keltett elektromos teret és potenciált a) Gauss tétel segítségével ($\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$); b) Poisson egyenlettel ($\Delta\phi = 0$) segítségével!

2. Határozzuk meg egy R sugarú töltött gömb elektromos terét és potenciálját, ha a) felületén Q töltés oszlik el; *b) térfogatában egyenletesen töltött ρ_0 töltéssűrűséggel; c) térfogatában töltött $\rho(r) = \rho_0 r^2$ töltéssűrűséggel; d) térfogatában töltött $\rho(r) = \frac{\rho_0}{r}$ töltéssűrűséggel! *hasonló: Elméleti Fizikai példatár 2/2.7*

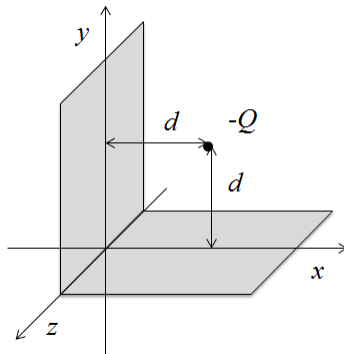


3. *Határozzuk meg egy R_1 sugarú ρ_0 térfogati töltéssűrűséggel egyenletesen töltött gömb által keltett elektromos teret és potenciált, hogyha a gömbből kivágunk egy $R_2 < R_1$ sugarú gömb alakú részt, a két gömb középpontja $a < R_1$ távolságra van! *Elméleti Fizikai példatár 2/2.6*

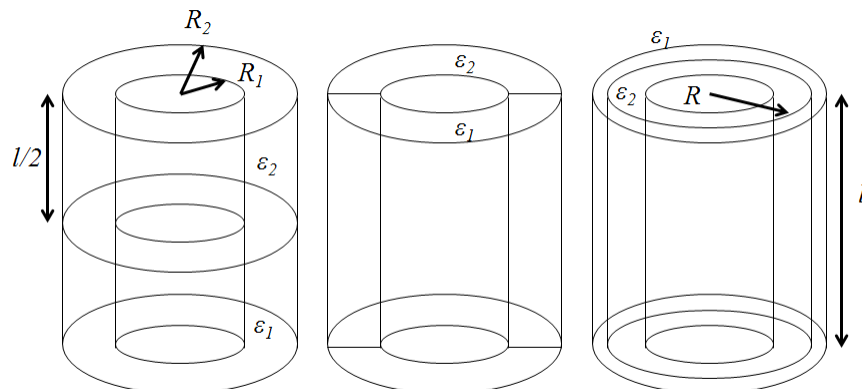


4. Határozzuk meg egy R sugarú végtelen henger által keltett elektromos teret és potenciált, ha a) felületén töltött η töltéssűrűséggel egyenletesen; b) térfogatában töltött ρ töltéssűrűséggel egyenletesen! *Elméleti Fizikai példatár 2/2.10*
5. Határozzuk meg egy R_1 sugarú végtelen, ρ töltéssűrűséggel egyenletesen töltött henger által keltett elektromos teret és potenciált, ha belőle kivágunk egy párhuzamos tengelyű $R_2 < R_1$ sugarú hengert, a két henger tengelye $a < R_1$ távolságra van!
6. *Egy végtelen földelt sík fémlaptól d távolságra egy $+Q$ pontöltést helyezünk el. Milyen lesz a térben kialakuló elektromos tér és potenciál? Milyen lesz a fémlapon kialakuló η felületi töltéssűrűség? Mekkora lesz a fémlap össztöltése? *Elméleti Fizikai példatár 2/2.18*
7. Egy végtelen földelt sík fémlaptól d , egymástól l távolságra elhelyezünk két $+Q$ pontöltést. Milyen lesz a térben kialakuló elektromos tér és potenciál? Milyen lesz a fémlapon kialakuló η felületi töltéssűrűség? Mekkora lesz a fémlap össztöltése? *Elméleti Fizikai példatár 2/2.19*

8. Egy derékszögben meghajtott végtelen földelt fémlaptól mindkét irányban d távolságra elhelyezünk egy $+Q$ pontöltést. Milyen lesz a térben kialakuló elektromos tér és potenciál? Milyen lesz a fémlapon kialakuló η felületi töltéssűrűség? Mekkora lesz a fémlap össztöltése? *Elméleti Fizikai példatár 2/2.20*
9. *Egy R sugarú földelt fémgömbhéj középpontjától $d > R$ távolságra elhelyezünk egy $+Q$ pontöltést. Milyen lesz a térben kialakuló elektromos tér? Milyen lesz a gömbhéjon kialakuló η felületi töltéssűrűség? Mekkora lesz a gömbhéj össztöltése? *Elméleti Fizikai példatár 2/2.26*



10. *Egy hengerkondenzátor lemezei R_1 és $R_2 > R_1$ sugarú, L magasságú fémlemezek, a kettő közötti teret ϵ_r relatív dielektromos állandójú közeggel töltjük ki. Mennyi a hengerkondenzátor kapacitása?
11. *Egy hengerkondenzátor lemezei l magas, R_1 és $R_2 > R_1$ sugarú fémlemezek. A kettő közötti térfogatot kitöltjük félig ϵ_1 , félig ϵ_2 relatív dielektromos állandójú közeggel a következőképpen. a) $\frac{l}{2}$ magasságig ϵ_1 , majd ϵ_2 közeggel, b) $[0, \pi]$ között ϵ_1 , $[\pi, 2\pi]$ között ϵ_2 közeggel, c) R sugárig ϵ_1 , majd ϵ_2 közeggel (térfogat ugyanakkora!). Mennyi az egyes esetekben a hengerkondenzátor töltése? *Elméleti Fizikai példatár 2/3.13*



12. Egy gömbkondenzátor lemezei R_1 és $R_2 > R_1$ sugarú fémlamezek, a kettő közötti teret ϵ_r relatív dielektromos állandójú közeggel töltjük ki. Mennyi a gömbkondenzátor kapacitása?
13. Egy gömbkondenzátor lemezei R_1 és $R_2 > R_1$ sugarú fémlamezek. A kettő közötti térfogatot kitöltjük félig ϵ_1 , félig ϵ_2 relatív dielektromos állandójú közeggel a következőképpen. *a)* $[0, \pi]$ között ϵ_1 , $[\pi, 2\pi]$ között ϵ_2 közeggel, *b)* R sugárig ϵ_1 , majd ϵ_2 közeggel (térfogat ugyanakkora!). Mennyi az egyes esetekben a gömbkondenzátor töltése?

