Elektrodinamika előadás Patkós Andrással

- Mind az első, mind a második negyedévből található másik, kézzel írt jegyzet Kónya Gábortól.
- Az első negyedév 3-ig tételéig van gépelt jegyzet is.
- Alábbiakban egy kézzel írt jegyzetet találtok indexelve. Az első negyedéves rész az órai anyagot követi nyomon, a második része a jegyzetnek inkább a szóbeli tételkidolgozásra megy rá.

Tematika (első negyedév)

1. Az elektrodinamika hullámegyenletei. A megoldás Green-függvényes eljárással. Avanzsált és retardált potenciálok.
2. Megmaradási tételek elektro-mechanikai rendszerekre. Dielektromos közeg elektrosztatikai energiája.
3. Az elektrosztatika peremérték feladata és a megoldás egyértelműsége Neumann- és Dirichlet feladatokra. A Laplace egyenlet megoldása a változók szétválasztása módszerével. A gömbi szimmetriájú Green-függvény konstrukciója és az elektrosztatikus potenciál multipólus sorfejtése.
4. Polarizálható közegek elektrosztatikája. A polarizáció-sűrűség és az elektromos eltolás vektora. A polarizálhatóság elemi modelljei. A molekuláris polarizálhatóság önkonzisztens elmélete, a Clausius-Mosotti összefüggés.
5. Magnetosztatika. Mágnesezhetőség. Ferromágnesség és hiszterézis. Az elektromágneses indukció. A magnetosztatikus energia mágnesezhető közegre. Szupravezetők magnetosztatikája.
6. Kvázistacionárius közelítés. Harmonikus változású terek. Frekvenciafüggő polarizálhatóság. Kauzalitás és a Kramers-Kronig reláció. Áramköri egyenletek elektrodinamikai megalapozása (impedancia, ön- és kölcsönös indukció, kapacitás). Skin-hatás és behatolási mélység.

Szóbeli vizsga tételei (második negyedév)

7. Az elektromágneses síkhullámok tulajdonságai. Diszperzió. Hullámcsomag, fázis- és csoportsebesség. Hullámtörés és visszaverődés. Fresnel képletei. Abszorpció véges vezetőképességű közegben.
8. Elhajlás akadályokon skalár hullámokra. Kirchhoff integrál előállítása és Rayleigh javítása. Alkalmazása sík ernyő esetére. A Fresnel és Fraunhofer határesetek.
9. Hullámterjedés hengerszimmetrikus korlátozott tartományban. A téglalap keresztmetszetű eset részletes számítása.
10. Az elektromágneses sugárzás keletkezése. A sugárzási tér multipólus sorfejtése. Az **elektromos dipólus sugárzás** tulajdonságai és teljesítménye.
11. Töltött részecske mozgása előírt pályán. A pillanatnyi sugárzási tér és teljesítménye.
12. Az egyenesvonalú egyenletes mozgást végző töltés ekvipotenciális felületeinek dilatációja. Cserenkov sugárzás.
13. Az elektromágneses sugárzás szóródása töltött részecskerendszeren. Thomson szórás.
14. A sugárzási visszahatás a töltött részecske mozgására. A mozgásegyenlet időbeli nem-lokalitás és a kauzalitás sérülésének paradoxonja. A természetes vonalszélesség klasszikus elmélete.
15. Az Abraham-Lorenz elektron modell.

Elektrodinamika előadás

Jackson, Landau 2, 8

Klasszikus elektrodinamika, Pathós

Mi $\underline{E}$ és $\underline{B}$? $\quad \underline{F} = q\left(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B}\right)$

1. $\operatorname{div} \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

2. $\operatorname{div} \underline{B} = 0$

3. $\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

4. $\operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0\left(\underline{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right) \xleftarrow[\text{újdonság}]{} \operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$

$\downarrow \operatorname{div}$

$\operatorname{div} \underline{j} = 0$; ez mindig igaz?

$0 = \operatorname{div} \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$ így már mérleg-egyenlet

1-es Maxwell: $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \underline{E}$

$0 = \operatorname{div} \underline{j} + \varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$

$0 = \operatorname{div}\left(\underline{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right)$

$\underline{j} \mapsto \underline{j} + \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$ Maxwell újítása

$\operatorname{div} \downarrow$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{B} = \mu_0 \operatorname{div}\left(\underline{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right)$$

$$0 = \operatorname{div} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 \operatorname{div} \underline{E}$$

$\downarrow$ 1-es Maxwell

$$\operatorname{div} \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Természetesen visszakaptuk a kontinuitási egyenletet. Integrális alak:

$$\int_V \operatorname{div} \underline{j}\, dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = 0$$

$$\oint_F \underline{j}\, d\underline{F} + \frac{d}{dt}\underbrace{\int_V \rho\, dV}_{Q} = 0$$

Vektor és skalárpotenciál

$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \Rightarrow \exists \underline{A}: \operatorname{rot} \underline{A} = \underline{B}$, mert így $\operatorname{div} \underline{B} = \operatorname{div}\operatorname{rot} \underline{A} \equiv 0$

$-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \underline{\dot{A}} = \operatorname{rot} \underline{E} \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\underline{\dot{A}} + \underline{E}\right) = 0 \Rightarrow \exists \phi: -\operatorname{grad}\phi = \underline{\dot{A}} + \underline{E}$

így $E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad}\phi$

$\underline{A}$: vektorpotenciál, ϕ: skalárpotenciál.

Mértékrögzítés

A ϕ és $\underline{A}$ potenciálok nem egyértelműek. $\text{rot}\,\underline{A}' = \underline{B}$ teljesül,

ha $\boxed{\underline{A}' = \underline{A} + \text{grad}\,\Lambda}$, mert $\text{rot}\,\text{grad}\,\Lambda = 0$.

Mikor lesz $\underline{E}$ is változatlan? $\underline{E} = -\text{grad}\,\phi' - \dot{\underline{A}}' = -\text{grad}\,\phi' - \dot{\underline{A}} - \text{grad}\,\dot{\Lambda} =$

$$= -\text{grad}\underbrace{(\phi' + \dot{\Lambda})}_{\text{legyen } \phi} - \dot{\underline{A}}$$

Tehát $\boxed{\phi' = \phi - \dot{\Lambda}}$ esetén $\underline{E}$ megmarad.

Ezt a szabadságot mértékinvarianciának nevezzük, a transzformációt mértéktranszformációnak. Három kiemelt fontosságú mértékrögzítés van:

- Coulomb-mérték: legyen $\text{div}\,\underline{A} = 0$
- sugárzási-mérték: legyen $\phi = 0$
- Lorenz-mérték: legyen $\varepsilon_0 \mu_0 \dot{\phi} + \text{div}\,\underline{A} = 0$

A Maxwell egyenletek az EM hullámok létezéséről is szólnak:

a/ $\text{rot}\,\text{rot}\,\underline{A} = \mu_0 \left(\underline{j} + \varepsilon_0 \left(-\text{grad}\,\dot{\phi} - \ddot{\underline{A}} \right) \right) = (\text{grad}\,\text{div} - \Delta)\,\underline{A}$

$$\boxed{\left(\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \underline{A} = \mu_0 \underline{j}} + \text{grad} \underbrace{\left(\text{div}\,\underline{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\phi} \right)}$$

0 ha a mérték Lorenz-mérték,

akkor $\underline{A}$-ra hullámegyenlet. $\varepsilon_0 \mu_0 := \frac{1}{c^2}$

b/ $\text{div}\,\underline{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \text{grad}\,\phi$

$$\text{div}\left(-\dot{\underline{A}} - \text{grad}\,\phi \right) = \rho/\varepsilon_0 \iff -\Delta\phi = \underbrace{\text{div}\,\dot{\underline{A}}} + \rho/\varepsilon_0$$

1/ 0 ha a mérték Coulomb mérték

akkor $-\Delta\phi = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(x')}{|x - x'|} d^3x$

definiálhatunk akkor egy $\underline{j}_T = \underline{j} - \varepsilon_0 \nabla \dot{\phi}$ transzverzális

áramot, melyre $\text{div}\,\underline{j}_T = \text{div}\,\underline{j} - \varepsilon_0 \Delta \dot{\phi} = \text{div}\,\underline{j} + \underbrace{\varepsilon_0 (\text{div}\,\dot{\underline{A}})}_{0} + (\dot{\rho}/\varepsilon_0) = 0$

kontinuitási egyenlet

2/ ha Lorenz-mérték van, abból

$\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\phi} + \operatorname{div} \dot{\underline{A}} = 0$ felhasználásával

$$-\Delta\phi = -\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\phi} + \varrho/\varepsilon_0 \Longleftrightarrow \boxed{\left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi = \varrho/\varepsilon_0}$$

Már megint hullámegyenlet, de most ϕ-re. Inhomogénak.

A hullámegyenlet megoldása

ϕ-re és $\underline{A}$-ra hasonló egyenletet kaptunk, kezeljük egységesen. Legyen $f \in \{A_1, A_2, A_3, \phi\}$ tetszőleges. Így írhatjuk:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f(\underline{x}, t) = s(\underline{x}, t)$$

s neve forrástag, $s = \begin{cases} \varrho/\varepsilon_0 & \text{ha } f = \phi \\ \mu_0/j_i & \text{ha } f = A_i \end{cases}$

Lorch operátor $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv \square$, így $\square f = s$

a megoldandó adott s mellett f-re. f megoldása függ s-től, legáltalánosabb esetben valamilyen G súlyfüggvénnyel

$$f(\underline{x}, t) =: \int_V \int_t G(\underline{x}, t; \underline{x}', t')\, s(\underline{x}', t')\, dt'\, d^3x'$$

$$\square f(\underline{x}, t) = s(\underline{x}, t) = \int_V \int_t \square G(\underline{x}, t; \underline{x}', t')\, s(\underline{x}', t')\, dt'\, d^3x'$$

azért csak G-re hat, mert s nem függ $(\underline{x}, t)$-től, csak $(\underline{x}', t')$-től

felismerjük a dirac-deltát, mert $s(\underline{x}, t) \overset{\text{def}}{=} \int_V \int_t \delta(\underline{x}', t')\, s(\underline{x}', t')\, dt\, d^3x$,

így $\square G(\underline{x}, t; \underline{x}', t') = \delta(\underline{x}', t) = \delta(x - x') \cdot \delta(t - t')$ vagyis a probléma green-függvénye.

Alkalmazzuk az egydimenziós $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\, e^{ikx}\, dk$ fourier-transzformáció többdimenziós változatát:

$$f(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\underline{k}, \omega)\, e^{i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)}\, d\omega\, d^3k.$$

Megj: 1D-s inverzét visszaírva:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{1}{2\pi} e^{ikx} \cdot e^{-ikx'}\, dx'\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{2\pi}\, dk}_{\delta(x-x')}\, dx'$$

Fourier-transzformáljuk az $\square f = j$ egyenletet!

$$\cancel{\frac{1}{(2\pi)^4}} \int \hat f(\underline{k},\omega)\, \underbrace{\square\, e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}}_{\left[\frac{1}{c^2}(-i\omega)^2-(ik)^2\right]\cdot e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}}\, d^3k\, d\omega = \cancel{\frac{1}{(2\pi)^4}} \int \hat j(\underline{k},\omega)\, e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}\, d^3k\, d\omega$$

$$\int \hat f(\underline{k},\omega)\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right) e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} - \hat j(\underline{k},\omega)\, e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} = 0$$

$\Downarrow$ integrálás elhagyása, e^{i} taggal osztás

$$\hat f(\underline{k},\omega)\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right) - \hat j(\underline{k},\omega) = 0 \iff \hat f(\underline{k},\omega) = \frac{\hat j(\underline{k},\omega)}{k^2-\omega^2/c^2}$$

$$f(\underline{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\hat j(\underline{k},\omega)}{k^2-\omega^2/c^2}\, e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}\, d^3k\, d\omega$$

$$\hat j(\underline{k},\omega) = \int j(\underline{x}',t')\, e^{-i(\underline{k}\underline{x}'-\omega t')}$$

$$f(\underline{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{j(\underline{x}',t')}{k^2-\omega^2/c^2}\, e^{i[\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')-\omega(t-t')]}\, d^3k\, d\omega\, d^3x'\, dt'$$ így def. szerint

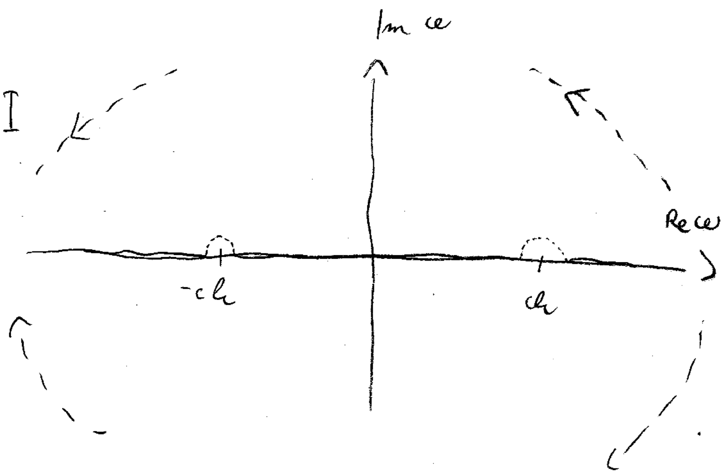
$$G(\underline{x}-\underline{x}';\, t-t') = \int \frac{e^{i[\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')-\omega(t-t')]}}{k^2-\omega^2/c^2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^4}\, d^3k\, d\omega$$

Ez egy improprius integrál, végezzük el! $$\frac{1}{k^2-\omega^2/c^2} = \frac{c}{2k}\left(\frac{1}{\omega+ck}-\frac{1}{\omega-ck}\right)$$

$\tau := t-t'$

$$G = \int \frac{c}{2k}\left(\frac{1}{\omega+ck}-\frac{1}{\omega-ck}\right) e^{i[\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')-\omega\tau]}\, \frac{d\omega}{2\pi}\, \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{2k}\left(\frac{1}{\omega+ck}-\frac{1}{\omega-ck}\right) e^{-i\omega\tau}\, \frac{d\omega}{2\pi} = I$$



$e^{-i\omega\tau} = e^{-i\omega'\tau} \cdot e^{\omega''\tau}$ ezért ha $\tau > 0$ felfele $(\omega'' > 0)$ zárom be

$\omega := \omega' + i\,\omega''$ ha $\tau < 0$ lefele $(\omega'' < 0)$ zárom a kört.

A szingularitások kezelése nem egyértelmű. Retardált (kauzális) potenciál esetén $G_R(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = 0$ ha $\tau < 0$ feltételt szabom meg $\Rightarrow$ szingularitást lefele viszem

$$\underline{I} = \frac{c}{2k}\,\frac{1}{2\pi}\,2\pi i \left(e^{-ick\tau} - e^{-i(-c\cdot k)\tau}\right) = -\frac{c\cdot i}{2k}\left(e^{ick\tau} - e^{-ick\tau}\right)$$

$$d^3k = dk \cdot k\, d(\cos\vartheta_k)\cdot k\cdot d\varphi_k \qquad \text{ahol} \quad \underline{k}(\underline{x}-\underline{x}') = k\,|\underline{x}-\underline{x}'|\cos(\vartheta_k)$$

a polárkoordinátát mi választjuk meg, és úgy tesszük ezt, hogy ez fennálljon

$$G_R(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = \int_V (-i)\, e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')}\,\frac{c}{2k}\left(e^{ick\tau} - e^{-ick\tau}\right)\frac{d^3k}{(2\pi)^3} =$$

„susogás"

$$= \int_0^\infty \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} \frac{k^2}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{i}\, e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|\cos\vartheta_k}\,\frac{c}{2k}\left(e^{ick\tau} - e^{-ick\tau}\right)\underbrace{\frac{d\varphi_k}{2\pi}}_{\text{integrálja } 1} d(\cos\vartheta_k)\, dk =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\cancel{k^2}}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{i}\,\frac{1}{i\cancel{k}\cdot|\underline{x}-\underline{x}'|}\left(e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|} - e^{-ik|\underline{x}-\underline{x}'|}\right)\frac{c}{2\cancel{k}}\left(e^{ick\tau} - e^{-ick\tau}\right) dk =$$

$$= \frac{-c}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ik(|\underline{x}-\underline{x}'|+c\tau)} - e^{-ik(|\underline{x}-\underline{x}'|-c\tau)} + e^{-ik(|\underline{x}-\underline{x}'|+c\tau)} - e^{ik(|\underline{x}-\underline{x}'|-c\tau)}\right) dk =$$

retardált potenciál esetén $\tau > 0$ miatt ez mindig pozitív, így mivel integrálja a δ, értéke 0

integráljuk δ, ami szimmetrikus, így egyenlők

$$= \frac{-c}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|}\,\frac{1}{2}\,2\cdot\delta(|\underline{x}-\underline{x}'| - c\tau) = \boxed{\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,\delta\left((t-t') - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right) = G}$$

$$f_R(\underline{x},t) = \int_V \int_{-\infty}^{t} G(\underline{x}',t')\, s(x',t')\, dt\, d^3x' = \frac{1}{4\pi} \int_V \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, \delta\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{c}\right) s(\underline{x}',t')\, dt'd^3x'$$

azért csak t-ig megy t',

mert $G(\underline{x}', t'>t)$ esetén igényeink szerint 0.

$$\boxed{f_R(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{s\left(\underline{x}', t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, d^3x'}$$

Speciális eset, mikor $s=0$

$\Box f = 0$, létezik-e $e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}$ megoldás?

$$\Box f = \Box\, e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2}+k^2\right) e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} = 0 \Rightarrow \omega = \pm ck \text{ akkor igen}$$

Az ilyen alakú függvények bázist alkotnak,

$$f_{hom}(\underline{x},t) = \int \tilde{f}_{hom}(k) \cdot e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

súlyfüggvény, hogyan kaphatnánk meg?

$$f_{hom}(\underline{x},0) = \int \tilde{f}_{hom}(k)\, e^{i\underline{k}\underline{x}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \tilde{f}_{hom}(k) = \int f_{hom}(\underline{x},0)\, e^{-i\underline{k}\underline{x}}\, d^3x$$

$$f_{ált} = f_{ret} + f_{hom} \xrightarrow{\Box} \Box f_{ált} = \Box f_{ret} = s$$

Megmaradó mennyiségek

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j}_A = 0$$

$$\underline{j}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\, \underline{v}(\underline{x},t)$$

$$\underline{f}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t) \cdot \underline{E}(\underline{x},t) + \underline{j}(\underline{x},t) \times \underline{B}(\underline{x},t)$$

térfogati erő

Energia megmaradás

$$\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\underline{E}}$$

$$\frac{dE_{mech}}{dt} = \int_V \underline{f}(\underline{x},t)\cdot \underline{v}(\underline{x},t)\, d^3x = \int_V \overbrace{\underline{v}(\underline{x},t)\cdot \rho(\underline{x},t)}^{\underline{j}(\underline{x},t)} \cdot \underline{E}(\underline{x},t)$$

$$+ \underbrace{\underline{v}(\underline{x},t)\left[\rho(\underline{x},t)\,\underline{v}(\underline{x},t) \times \underline{B}(\underline{x},t)\right]}_{0} d^3x = \int_V \left(\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\underline{B} - \varepsilon_0 \cdot \dot{\underline{E}}\right)\underline{E}\, d^3x$$

$$\int_V -\varepsilon_0 \dot{\underline{E}}\,\underline{E}\, d^3x = -\varepsilon_0 \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{E}^2/2\right) d^3x = -\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_V \underline{E}^2\, d^3x$$

$$\int_V \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\underline{B}\cdot\underline{E}\, d^3x = \frac{1}{\mu_0}\int_V \left(\mathrm{div}\,\underline{B}\times\underline{E} + \underline{B}\,\mathrm{rot}\,\underline{E}\right) d^3x =$$

$$E_i \varepsilon_{ijl}\partial_j B_l = \varepsilon_{ijl}\left[\partial_j (E_i B_l) - B_l \partial_j E_i\right] = \partial_j \varepsilon_{lij} E_i B_l + B_l \varepsilon_{jil}\partial_j E_i$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$= \frac{-1}{\mu_0}\int_V \left(\mathrm{div}\,\underline{E}\times\underline{B} + \underline{B}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right) d^3x = -\frac{1}{\mu_0}\int_V \mathrm{div}\,\underline{E}\times\underline{B}\, d^3x - \frac{1}{2\mu_0}\frac{d}{dt}\int_V \underline{B}^2\, d^3x$$

$$\frac{dE_{mech}}{dt} = \frac{-1}{\mu_0}\int_V \mathrm{div}\,\underline{E}\times\underline{B}\, d^3x - \frac{1}{2\mu_0}\frac{d}{dt}\int_V \underline{B}^2\, d^3x - \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_V \underline{E}^2\, d^3x$$

$$\frac{d}{dt}\left[E_{mech} + \frac{1}{2}\int_V \left(\underline{B}^2/\mu_0 - \varepsilon_0 \cdot \underline{E}^2\right) d^3x\right] + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\int_V \mathrm{div}\left(\underline{E}\times\underline{B}\right) d^3x}_{\oint_{\partial V} \underline{E}\times\underline{B}\, d\underline{F}} = 0$$

$$\rho_{EM} := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}^2 + \varepsilon_0 \underline{E}^2\right) \quad \text{energiasűrűség}$$

$$\underline{j}_{EM} := \frac{1}{\mu_0}\underline{E}\times\underline{B}$$

energia-áram

Poynting vektor

$$\frac{d}{dt}\left(E_{mech} + \int_V \rho_{EM}\, d^3x\right) + \oint_{\partial V} \underline{j}_{EM}(\underline{x},t) = 0$$

mérleg egyenlet

Impulzus megmaradás

$$\frac{d\underline{p}_{mech}}{dt} = \int_V \underline{f}(\underline{x},t)\, d^3x$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0\left(\underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}\right) \qquad\qquad \mathrm{rot}\,\underline{E} = -\partial_t \underline{B}$$

$$\frac{d p_{mech,i}}{dt} = \int_V \left(\rho E_i + \varepsilon_{ijl}\, j_j B_l\right) d^3x =$$

$$\varepsilon_0\, \varepsilon_{ijl}\left[\frac{\partial}{\partial t}(E_j B_l) - \underbrace{E_j \frac{\partial}{\partial t} B_l}\right]$$

$$= \int_V \left(\varepsilon_0 \cdot (\partial_j E_j) E_i + \frac{1}{\mu_0}\varepsilon_{ijl}\, \varepsilon_{jmn}(\partial_m B_n) B_l - \varepsilon_0\, \varepsilon_{ijl}\, \dot{E}_j B_l\right) d^3x$$

$$\frac{d}{dt}\left(p_{mech,i} + \varepsilon_0\mu_0 \int_V (\underline{E}\times\underline{B})_i \frac{1}{\mu_0} d^3x\right) =: \frac{d}{dt}\left(p_{mech,i} + p_{EM,i}\right) =$$

$$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$$

$$= \int_V \Big(\underbrace{\varepsilon_0 E_i\, \partial_j E_j}_{1.} \underbrace{- \varepsilon_0\, \varepsilon_{ijl} E_j\, \varepsilon_{lmn}\, \partial_m E_n}_{2.} \underbrace{- \frac{1}{\mu_0}\varepsilon_{ijl} B_l\, \varepsilon_{jmn}\, \partial_m B_n}_{3.} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} B_i\, \partial_j B_j}_{4.}\Big) d^3x$$

$1 - 4\;,\; 2 \sim 3$

$$\varepsilon_0 E_i\, \partial_j E_j - \varepsilon_0\left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) E_j\, \partial_m E_n = \varepsilon_0 \cdot \left(E_i \partial_j E_j - E_j\, \partial_i E_j + E_j \partial_j E_i\right)$$

$$= \varepsilon_0 \cdot \left[\partial_j (E_i E_j) - \delta_{ij}\, \partial_j \frac{E_j^2}{2}\right] = -\partial_j \pi_{ij,E}$$

$$\pi_{ij,B} := \frac{1}{2\mu_0}\left(\delta_{ij} B_l^2 - 2 B_i B_j\right) \qquad\qquad \pi_{ij,E} := \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\delta_{ij} E_j^2 - 2 E_i E_j\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{p}_{mech} + \underline{p}_{EM}\right) = -\int_V \underline{\nabla}\left(\underline{\underline{\pi}}_E + \underline{\underline{\pi}}_B\right) d^3x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{p}_{mech} + \underline{p}_{EM}\right) + \oint_{\partial V}\left(\underline{\underline{\pi}}_E + \underline{\underline{\pi}}_B\right) d\underline{F} = 0$$

Végtelen térbeli megoldás spektrálanalízise

$$\rho(\underline{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\omega(\underline{x})\,e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}\qquad \operatorname{div}\underline{E}_\omega:=\frac{1}{\varepsilon}\rho_\omega(\underline{x})\qquad \underline{B}(\underline{x},t):=\int_{-\infty}^{\infty}\underline{B}_\omega(\underline{x})\,e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{rot}\underline{E}_\omega\,e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=\operatorname{rot}\underline{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{B}_\omega(\underline{x})\,e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{-\infty}^{\infty}\underline{B}_\omega(\underline{x})\,(i\omega)\,e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$$

Feltételezzük, hogy minden mező és forrás $e^{-i\omega t}$ függésű, így az integrálból

$$\operatorname{rot}\underline{E}_\omega(\underline{x})=i\omega\,\underline{B}_\omega(\underline{x})$$, hasonló érveléssel

$$\operatorname{rot}\underline{B}_\omega(\underline{x})=\mu_0\underline{j}_\omega+\varepsilon_0\mu_0(-i\omega)\underline{E}_\omega(\underline{x})$$

Ha $\rho(\underline{x},t)=\rho_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t}$ és $\underline{j}(\underline{x},t)=\underline{j}_\omega(\underline{x})\cdot e^{-i\omega t}$, röviden: $s(\underline{x},t)=s_\omega(\underline{x})\,e^{-i\omega t}$,

$$f_{R,\omega}(\underline{x})\,e^{-i\omega t}:=f_R(\underline{x},t)=\frac{1}{4\pi}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\underline{x}',t')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)dt'\,d^3x'=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{s_\omega(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,e^{-i\omega\left(t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)}d^3x'$$ valóban előáll függvényszorzatként

$$f_{R,\omega}(\underline{x})=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{s_\omega(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,e^{i\frac{\omega}{c}|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d^3x'$$

ha $\omega\to 0$ $$f_{R,0}(\underline{x})=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{s_\omega(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d^3x' \iff \begin{cases}\underline{A}_{\omega=0}(\underline{x})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V\frac{\underline{j}_0(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d^3x'\\[2ex]\phi_{\omega=0}(\underline{x})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V\frac{\rho_{\omega=0}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d^3x'\end{cases}$$

Periódusidőre átlagolt mennyiségek

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\left(\underline{E}_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t}+\underline{E}^*_\omega(\underline{x})e^{i\omega t}\right)\frac{1}{2}\left(\underline{E}_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t}+\underline{E}^*_\omega(\underline{x})e^{i\omega t}\right)dt:=$$

$$:=\overline{\mathcal{E}_\omega(\underline{x})}=\frac{1}{4}\varepsilon_0\left|\underline{E}_\omega\right|^2\Rightarrow\overline{E_{\text{energia}}}=\int_V\mathcal{E}_\omega(\underline{x})\,d^3x$$

energiasűrűség-átlag

$$\rho(\underline{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=\rho(\underline{x},t)^*=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\omega(\underline{x})^*e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_{-\omega}(\underline{x})^*e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\rho_\omega(\underline{x})=\rho_{-\omega}(\underline{x})^*$$ $\Rightarrow$ átlagok, valós részük azonos

Elektrosztatikai peremérték feladatok

$\Delta f(\underline{x}) = -s(\underline{x})$

olyan megoldást keresünk, mely kielégít valamilyen feltételt $f(\underline{x})$-re.

két fajta: Dirichlet: $f(\underline{x})$ adott a felületen

Neumann: $\dfrac{\partial f(\underline{x})}{\partial n} = \underline{n}\,\underline{\nabla} f(\underline{x})$ adott a felületen

Green-tétel: $\forall$ f, g függvényre

$$\int_V \underline{\nabla}\left(f(\underline{x})\,\underline{\nabla}\, g(\underline{x})\right) d^3x = \oint_{\partial V}\left(f\,\underline{\nabla}\, g\right) d\underline{F}$$ Gauss tétel $f\,\underline{\nabla}\, g$-re

$$\int_V\left(\underline{\nabla} f\,\underline{\nabla} g + f\,\Delta g\right) dV = \oint_{\partial V}\left(f\,\underline{\nabla} g\right) d\underline{F}$$ I. Green azonosság

$$/ - \int_V\left(g\,\Delta f + \underline{\nabla} f\,\underline{\nabla} g\right) dV = \oint_{\partial V}\left(g\,\underline{\nabla} f\right) d\underline{F}$$

$$\int_V\left(f\,\Delta g - g\,\Delta f\right) dV = \oint_{\partial V}\left(f\,\underline{\nabla} g - g\,\underline{\nabla} f\right) d\underline{F}$$ II Green azonosság, Green tétel

f egyértelműsége

tfh. $\Delta f_1 = -s$ és $\Delta f_2 = -s \Rightarrow \Delta\underbrace{(f_1 - f_2)}_{:=u} = 0 \qquad \Delta u = 0$

Ha a peremfeltétel Dirichlet, $f_1(\underline{x}) = f_2(\underline{x}) \Rightarrow u = 0$ a felületen

Neumann: $\dfrac{\partial f_1}{\partial n} = \dfrac{\partial f_2}{\partial n} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ a felületen

Alkalmazzuk az I. Green tételt $f = g = u$ esetre!

$$\int_V\left(u\,\Delta u + \nabla u\,\nabla u\right) dV = \oint_{\partial V} u\,\underline{\nabla} u\, d\underline{F}$$

$$\int_V (\nabla u)^2\, dV = \oint_{\partial V} \underbrace{u}_{\text{Dirichlet-nél ez}}\ \underbrace{\underline{n}\,\underline{\nabla} u}_{\text{Neumannál ez}}\, dF = 0$$

Neumannál ez 0 a felületen

Dirichlet-nél ez

Az integrál csak úgy lehet 0, ha $\nabla u = 0 \Rightarrow u =$ állandó

Tehát Dirichlet feltételnél $f_1 = f_2$, Neumannra $f_1 = f_2 + c$.

__Green-függvény__

$\Delta_{x'} G(\underline{x}, \underline{x}') = -\delta(\underline{x}, \underline{x}')$ + peremfeltételek. Mit mondhatunk ebből?

végtelen térfogatra $G(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$ ahol $f(x) = \int_V G(\underline{x}, \underline{x}') \, s(\underline{x}') \, d^3x'$

Alkalmazzuk a Green-tételt $g = G$ helyettesítéssel

$$\int_V \Big[f(\underline{x}') \underbrace{\Delta_{x'} G(\underline{x}, \underline{x}')}_{-\delta(\underline{x}, \underline{x}')} - G(\underline{x}, \underline{x}') \underbrace{\Delta_{x'} f(\underline{x}')}_{-s(\underline{x}')} \Big] d^3x' = \oint_{\partial V} \Big[f(\underline{x}') \underline{\nabla}_{x'} G - G \underline{\nabla}_{x'} f(\underline{x}') \Big] d\underline{F}$$

$$\underline{n} \cdot \underline{\nabla}_{x'} G = \frac{\partial G}{\partial n} \qquad d\underline{F} = \underline{n} \, dF$$

$$-f(\underline{x}) + \int_V G(\underline{x}, \underline{x}') \cdot s(\underline{x}') \, d^3x' = \oint_{\partial V} \left(f(\underline{x}') \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial f}{\partial n}(\underline{x}') \right] dF$$

$$\boxed{f(\underline{x}) = \int_V G(\underline{x}, \underline{x}') \, s(\underline{x}') \, d^3x - \oint_{\partial V} \left(f(\underline{x}') \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial f}{\partial n}(\underline{x}') \right) dF}$$

__Peremfeltétel Green-re__

1/ Dirichlet: $G_D(\underline{x}, \underline{x}') = 0 \quad \forall x' \in \partial V$

$$f_D(\underline{x}) = \int_V G_D(\underline{x}, \underline{x}') \, s(\underline{x}') \, d^3x - \oint_{\partial V} f(\underline{x}') \frac{\partial G_D(\underline{x}, \underline{x}')}{\partial n} \, dF$$

Állítás: G_D szimmetrikus: $G(\underline{x}, \underline{x}') = G(\underline{x}', \underline{x})$

Bizonyítás: alkalmazzuk a Green-tételt $f = G(\underline{x}, y)$ és $g = G(\underline{x}', y)$ helyettesítéssel:

$$\int_V \Big[G(\underline{x}, y) \underbrace{\Delta_y G(\underline{x}', y)}_{\delta(\underline{x}' - y)} - G(\underline{x}', y) \underbrace{\Delta_y G(\underline{x}, y)}_{\delta(\underline{x} - y)} \Big] d^3y =$$

felületen 0

$$= \oint_{\partial V} \Big[G(\underline{x}, y) \nabla G(\underline{x}', y) - G(\underline{x}', y) \nabla G(\underline{x}, y) \Big] dF$$

$$G(\underline{x}, \underline{x}') - G(\underline{x}', \underline{x}) = 0 \Rightarrow G(\underline{x}, \underline{x}') = G(\underline{x}', \underline{x})$$

2/ Neumann : $\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\underline{x}, \underline{x}') = -\frac{1}{F} \quad \forall x \in \partial V$ ↑ területe F

$$\oint_{\partial V} \frac{\partial G}{\partial n'} dF' = \oint_{\partial V} \underline{\nabla}_{x'} G \, d\underline{F} = \int_V \underbrace{\Delta_{x'} G}_{-\delta(\underline{x}-\underline{x}')} dV = -1 .$$

Tehát azt nem követelhettük volna meg, hogy 0 legyen, csak annyit, hogy állandó.

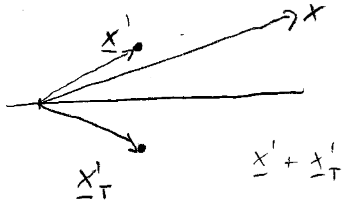
$$f_N(\underline{x}) = \int_V G(\underline{x}, \underline{x}')\, s(\underline{x}')\, d^3x' + \oint_F G(\underline{x}, \underline{x}') \frac{\partial f}{\partial n'}(\underline{x}')\, dF' + \underbrace{\frac{1}{F} \oint_{\partial V} f_N(\underline{x}')\, dF}_{\langle f \rangle \xrightarrow[F]{\infty} 0}$$

Plusz feltétel lehet G szimmetrikussága

$$\left.\begin{aligned} G(\underline{x}, \underline{x}') &= G(\underline{x}', \underline{x}) \\ \Delta_{x'} G(\underline{x}, \underline{x}') &= -\delta(\underline{x}, \underline{x}') \end{aligned}\right\} \Delta_x G(\underline{x}, \underline{x}') = \Delta_{x'} G(\underline{x}, \underline{x}') = -\delta(\underline{x} - \underline{x}')$$

A Dirichlet- feltétel kielégítése tükörtöltések módszerével

$\Delta_x G_D(\underline{x}, \underline{x}') = -\delta(\underline{x} - \underline{x}')$ + peremfeltétel : síkon a potenciál 0, $D_G =$



$\underline{x}' + \underline{x}'_T$ a síkban van

Keresem a megoldást $G_D(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} + H(\underline{x}, \underline{x}')$ alakban $\Rightarrow \Delta_x H(\underline{x}, \underline{x}') = 0$

A peremfeltételt kielégítem, ha $H(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'_T|}$,

Lehát $\Delta_x H(\underline{x}, \underline{x}') = -\delta(\underline{x} - \underline{x}'_T)$. $\underline{x}'_T \notin D_G$ így ez mindig 0, ahogy szeretjük.

Laplace-egyenlet megoldása a változók szétválasztásával

$\Delta f = 0$ Ez a megoldandó, $f = f(r, \vartheta, \varphi)$

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right]$$

Keresem a megoldást : $f(r, \vartheta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} P(\vartheta) Q(\varphi)$ alakban.

$$0 = \frac{1}{r}\frac{d^2u}{dr^2} P\cdot Q + \frac{u}{r^3}\left[Q\cdot\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP}{d\vartheta}\right) + P\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}\right] \quad / \cdot \frac{r^3}{uPQ}$$

$$0 = \underbrace{\frac{r^2}{u}\frac{d^2u}{dr^2}}_{:=\ell(\ell+1)} + \underbrace{\frac{1}{P\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{Q\sin^2\vartheta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}}_{=-\ell(\ell+1)} \qquad \ell\in\mathbb{R}$$

$\hookrightarrow \frac{r^2}{u}\frac{d^2u}{dr^2} = \ell(\ell+1) \Rightarrow \frac{d^2u}{dr^2} = \frac{u}{r^2}\ell(\ell+1)$ $\qquad u = r^\alpha$ próbafüggvény

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} = r^{\alpha-2}\ell(\ell+1)$$

$$\alpha^2 - \alpha - \ell(\ell+1) = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\overbrace{1 + 4\ell(\ell+1)}^{(2\ell+1)^2}}}{2}$$

$$u = c_1\cdot r^{-\ell} + c_2 r^{\ell+1} := a r^{-\ell} + b r^{\ell+1} \qquad \alpha_1 = -\ell \qquad \alpha_2 = \ell+1$$

$\hookrightarrow \frac{1}{P\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{Q\sin^2\vartheta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -\ell(\ell+1)$ $\qquad \sin\vartheta\, d\vartheta = d(\cos\vartheta)$

$$\frac{\sin\vartheta}{d\vartheta} = \frac{\sin^2\vartheta}{\sin d\vartheta} = \frac{1-\cos^2\vartheta}{d\cos\vartheta}$$

$$\frac{1}{P}\frac{d}{d(\cos\vartheta)}\left[(1-\cos^2\vartheta)\frac{dP}{d\cos\vartheta}\right] + \frac{1}{Q(1-\cos^2\vartheta)}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -\ell(\ell+1)$$

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = \text{áll} := -m^2$$

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 Q \Rightarrow Q = c_3\cdot e^{\pm im\varphi}$$

Q a térnek egyértékű függvénye: $Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi)$

$$\Downarrow$$

$$m \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0}$$

Általánosított Legendre-egyenlet

$m = 0$ akkor hengerszimmetrikus

$D_P = [-1, 1]$

Áll: konvergens megoldás D_P-n csakkor létezik konvergens megoldás, ha $\ell \in \mathbb{N}$, ekkor a megoldás egyértelmű:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell$$ Ezek a Legendre-polinomok.

Áll: A Legendre polinomok ortogonálisak és $\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\, P_k(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell k}$

$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{4}\left(6x^2-2\right)$

Minden függvény kifejthető $[-1, 1]$-n Legendre-polinomokkal

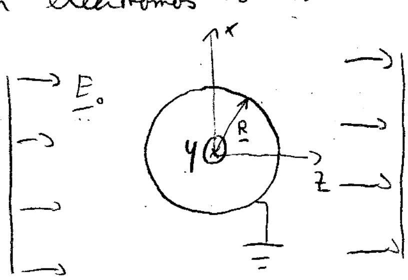
$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(x) \qquad / \cdot P_k(x), \ \int_{-1}^{1} \cdot \, dx$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\, dx = \frac{2}{2k+1} a_k \Rightarrow a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\, dx$$

Tehát a Poisson-egyenlet hengerszimmetrikus megoldása

$$\boxed{f(r, \vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(a_\ell r^{-\ell-1} + b_\ell r^\ell\right) P_\ell(\cos\vartheta)}$$

Példa: vezető, földelt gömb homogén elektromos térben



$\Delta \phi = 0$

$\phi(\underline{R}) = 0$

$\phi(\underline{r}) = -\underline{E}_0 \underline{r}$ ha $|\underline{r}| \gg |\underline{R}|$

P_ℓ független R-től,

$$\phi(R) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(a_\ell R^{-\ell} + b_\ell R^{\ell+1}\right) P_\ell(\cos\vartheta) = 0 \xRightarrow{\text{állandó}} a_\ell R^{-\ell} + b_\ell R^{\ell+1} = 0 \quad \forall \ell$$

$\phi(\underline{r}) = -E_0\, r \cos\vartheta < \infty$ (vagyis r-es növekedés) $\Rightarrow b_{\ell>1} = 0 \Rightarrow a_{\ell>1} = 0$

$$\lim_{r\to\infty} \phi(\underline{r}) = \lim_{r\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_\ell r^{-\ell-1} + b_0 + b_1 r \right) P_1 = -E_0 r P_1 = b_0 + b_1 r P_1$$

$$\Downarrow$$

$$b_0 = 0 \qquad b_1 = -E_0 \Rightarrow a_1 = E_0 R^3$$

$$\phi = E_0 R^3 r^{-2} P_1 - \overbrace{E_0 \cdot r P_1}^{-\underline{E}\cdot\underline{r}}$$

$$P_1 = \cos\vartheta$$

---

ha $m \neq 0$, asszociált Legendre függvények

ha $m \in [0, \ell]$

$\cos\vartheta = x$ szintén

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] - \frac{m^2}{1-x^2} P = -\ell(\ell+1) P \overset{\text{állítás}}{\Rightarrow} P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}$$

$$P_\ell^{-m}(x) = P_\ell^m(x) \cdot \frac{(-1)^m (\ell-m)!}{(\ell+m)!}$$

ha $m \in [-\ell, \ell]$, $P_\ell^m = \frac{(-1)^m}{2^\ell \cdot \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell$

ortogonalitás: $\int_{-1}^{1} P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}$, ortonormális alakja:

$$Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_{\ell m}^*(\vartheta,\varphi)\, Y_{\ell' m'}(\vartheta,\varphi)\, d\varphi\, d(\cos\vartheta) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \overset{\text{def}}{=} \oint Y_{\ell m}(\underline{n})\, Y_{\ell' m'}(\underline{n})\, d\Omega$$

Függvények kifejthetők gömbfüggvények szerint

$$f(\vartheta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) \xrightarrow{\cdot Y_{\ell m}^*,\ \oint \cdot\, d\Omega} a_{\ell' m'} = \oint f(\vartheta,\varphi)\, Y_{\ell' m'}^*(\underline{n})\, d\Omega$$

$$f(\vartheta,\varphi) = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta',\varphi')\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}_{\delta(\cos\vartheta-\cos\vartheta')\,\delta(\varphi-\varphi')} \cdot f(\vartheta',\varphi')\, d\varphi\, d(\cos\vartheta)$$

teljességi reláció

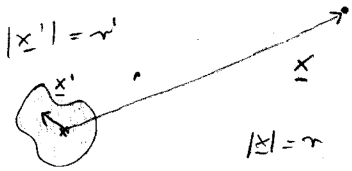
Addíciós tétel: $P_\ell(\underbrace{\underline{n}\cdot\underline{n}'}_{\cos\gamma}) = 4\pi \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^{*}_{\ell m}(\underline{n}')\, Y_{\ell m}(\underline{n})\, \frac{1}{2\ell+1}$

$\Delta f = 0$ általános megoldása

$$f(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(a_{\ell m} r^{-\ell-1} + b_{\ell m} r^{\ell}\right) Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$$

Multipól sorfejtés

Legyen valamilyen $\rho(\underline{x})$ töltéssűrűség eloszlásunk! Milyen a potenciál messze?



$$\phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, d^3x'$$

$\frac{\underline{x}'}{|\underline{x}'|} = \underline{n}'$ $\qquad \frac{\underline{x}}{r} := \underline{n}$

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,\underline{x}\,\underline{x}'}} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\,\frac{r'}{r}\,\underline{n}\cdot\underline{n}'}} \approx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots$$

$$\approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\,\frac{r'}{r}\,\underline{n}\cdot\underline{n}'\right] + \frac{3}{8}\left[\cancel{\left(\frac{r'}{r}\right)^2} - 2\,\frac{r'}{r}\,\underline{n}\cdot\underline{n}'\right]^2\right) \approx \qquad \frac{r'}{r} \ll 1 \qquad \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \approx 0$$

$$\approx \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}\,\underline{n}\cdot\underline{n}' - \frac{1}{2r}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left(\underline{n}\cdot\underline{n}'\right)^2\right] = \frac{1}{r} + \frac{\underline{n}}{r^2}\,\underline{x}' + \frac{1}{2r^3}\left[3(\underline{n}\,\underline{x}')^2 - r'^2\right]$$

$$3(\underline{n}\,\underline{x}')^2 - r'^2 = n_i n_j \left(3\,x_i'\,x_j' - r'^2\,\delta_{ij}\right)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\underline{x}')\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\,\underline{n}\cdot\underline{x}' + \frac{1}{2r^3}\, n_i n_j \underbrace{\left(3x_i'\,x_j' - r'^2\,\delta_{ij}\right)}\right] d^3x'$$

$\int_V \rho(\underline{x}')\, d'x^3 := Q$
össztöltés, skalár

$\int_V \rho(\underline{x}')\,\underline{x}'\, d^3x' := \underline{p}$
1 indexes mennyiség,
dipólusmomentum vektor

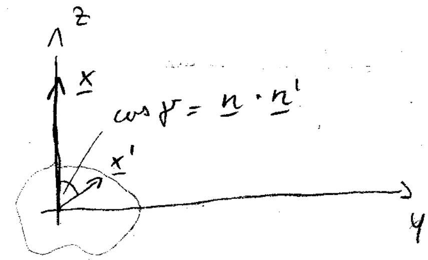
$\int_V \rho(\underline{x}') \cdot \downarrow\, d^3x' := Q_{ij}$
2 indexes mennyiség
kvadrupólmomentum mátrix

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\underline{n}\cdot\underline{p}}{r^2} + \frac{\underline{n}\,\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{n}}{2r^3}\right)$$

$$\underline{\underline{Q}} = \int_V \rho(\underline{x}')\left(3\,\underline{x}'\circ\underline{x}' - r'^2\,\underline{\underline{I}}\right) d^3x'$$

$$Q_{ij} = Q_{ji}, \qquad \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{Q}} = 0$$

Van-e kézenfekvőbb sorfejtés gömbfüggvényekkel ?



legyen $r > r'$

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a_\ell}{r^{\ell+1}} + b_\ell\, r^\ell\right)\cdot P_\ell(\cos\gamma)$$

$\phi(\infty)$-ben legyen 0, így $b_\ell = 0, \forall \ell$.

a_ℓ nem függvénye γ-nak, így spec. $\gamma=0$ választás mellett keressük a_ℓ értékét.

ekkor $\underline{n} = \underline{n}'$

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{1-r'/r} = \frac{1}{r}\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} \Rightarrow a_\ell = r'^\ell$$

Ha $r < r'$ lett volna a feltevés, $a_\ell = r^\ell$ lenne, $\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r^\ell}{r'^{\ell+1}}$

Tetszőleges γ-ra, $r > r'$ mellett

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\underline{n}\cdot\underline{n}') \qquad \phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \varrho(\underline{x}')\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d^3x'$$

Addíciós tétel

$$\phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi\int_V \varrho(\underline{x}')\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{r^{\ell+1}}\,Y_{\ell m}(\underline{n})\cdot r'^\ell\, Y^*_{\ell m}(\underline{n}')\cdot\frac{1}{2\ell+1}\,d^3x'$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{Y_{\ell m}(\underline{n})}{r^{\ell+1}}\cdot\frac{1}{2\ell+1}\underbrace{\int_V Y^*_{\ell m}(\underline{n}')\cdot r'^\ell\cdot\varrho(\underline{x}')\,d^3x'}_{:=\, q_{\ell m} \text{ multipólmomentum}}$$

Vizsgáljuk meg néhány konkrét értékre:

$\ell=0 \quad m=0 \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad q_{00} = \int_V \frac{\varrho(\underline{x}')}{\sqrt{4\pi}}\,d^3x' = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \qquad \phi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

$m=-1 \quad Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\gamma\, e^{-i\varphi} \qquad q_{1,-1} = -q^*_{1,1}$ kiszámolható

$\ell=1 \quad m=0 \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\gamma \qquad q_{1,0} = \int_V\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\gamma\cdot r'\,\varrho(\underline{x}')\,d^3x' =$

$m=1 \quad Y_{1,1} = -Y^*_{1,-1}$ kiszámolva $\qquad = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_V \varrho(\underline{x}')\cdot z'\,d^3x' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,p_z$

$$q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int_V \varrho(\underline{x}')\,r'\sin\gamma\,(\cos\varphi' - i\sin\varphi')\,d^3x' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(p_x - i p_y) = -q^*_{1,-1}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{3r^2}\left(\frac{3}{8\pi}\cdot\sin\vartheta\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)\left(p_x+ip_y\right) + \frac{3}{4\pi}\cos\vartheta\cdot p_z + \right.$$

$$\left. + (-1)\cdot(-1)\frac{3}{4\pi}\sin\vartheta\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\left(p_x - ip_y\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\cos\vartheta\cdot p_z + \frac{\sin\vartheta}{2}\left(2\cos\varphi\cdot p_x + 2\sin\varphi\cdot p_y\right)\right]}_{\underline{p}\cdot\underline{n}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,\underline{p}\cdot\underline{n} = \phi_1$$

$$\phi = \sum_l \phi_l$$

Elektrosztatika anyagi közegben, makroszkopikus elektrosztatika

$$\nabla\underline{e}(\underline{x}) = \left(\eta_{szabad}(\underline{x}) + \eta_{kötött}(\underline{x})\right)/\varepsilon_0$$

$$\eta_{kötött}(\underline{x}) = \sum_n\sum_{j_n} q_{j_n}\,\delta\left(\underline{x}-\underline{x}_n-\underline{x}_{j_n}\right) \qquad \sum_{j_n} q_{j_n} = 0$$

molekula indexe

molekula alkotóinak indexe

a molekulák semlegesek

Mikroszkopikus átlagolás (makroszkopikusan megmarad a helyfüggés)

$$H(\underline{x}) = \int_V h(\underline{x}')\,F(\underline{x}-\underline{x}')\,d^3x'$$

mikroszkopikus átlag

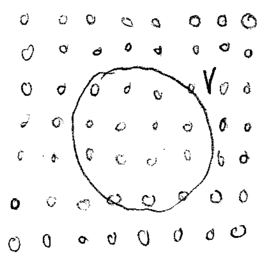
átlagolt mennyiség

mikroszkopikusan nagy, makroszkopikusan kicsiny

$$\int_V F(\underline{x}-\underline{x}')\,d^3x' = 1$$

F sima, izotróp, $F(\underline{x}-\underline{x}') = F(|\underline{x}-\underline{x}'|)$

V-n belül állandó,



$$\underline{x}'' := \underline{x} - \underline{x}'$$

$$\underline{E}(\underline{x}) = \int_V \underline{e}(\underline{x}')\,f(\underline{x}-\underline{x}')\,d^3x' = \langle\underline{e}\rangle(x) = \int_V e(\underline{x}-\underline{x}'')\,f(\underline{x}'')\,d^3x''$$

$$0 = \langle\underline{\nabla}\times\underline{e}\rangle(x) = \int_V \underline{\nabla}_{\underline{x}}\times\underline{e}(\underline{x}-\underline{x}'')\cdot f(\underline{x}'')\,d^3x'' = \underline{\nabla}\times\int_V \underline{e}(\underline{x}-\underline{x}'')\cdot f(\underline{x}'')\,d^3x'' =$$

$$= \underline{\nabla}\times\underline{E} = 0 \qquad \underline{E} = -\operatorname{grad}\phi$$

$$\langle\underline{\nabla}\,\underline{e}\rangle = \underline{\nabla}\,\underline{E}$$

$$\rho(\underline{x}) := \langle \eta_{szabad} \rangle (\underline{x})$$

$$\langle \eta_{kötött} \rangle (\underline{x}) = \int_V \sum_n \sum_{j_n} q_{jn}\, \underline{x}_{j_n}\, \delta\left(\underline{x} - \underline{x}'' - \underline{x}_n - \underline{x}_{j_n}\right) f(\underline{x}'')\, d^3x'' =$$

sorfejtés, $|\underline{x}_{jn}| < |\underline{x} - \underline{x}_n|$

$$= \sum_n \sum_{j_n} q_{j_n}\, f\left(\underline{x} - \underline{x}_n - \underline{x}_{j_n}\right) \qquad f\left(\underline{x} - \underline{x}_n - \underline{x}_{jn}\right) \approx$$

$$\approx f\left(\underline{x} - \underline{x}_n\right) - \underline{x}_{j_n} \underline{\nabla}_x f\left(\underline{x} - \underline{x}_n\right)$$

$$\langle \eta_{kötött} \rangle (x) = \sum_n \overbrace{\sum_{j_n} q_{jn}}^{0} f\left(\underline{x} - \underline{x}_n\right) -$$

$$- \sum_n \underbrace{\sum_{j_n} q_{jn}\, \underline{x}_{j_n}}_{\underline{p}_n(x_{j_n})} \underline{\nabla}_x f\left(\underline{x} - \underline{x}_n\right) = - \underline{\nabla}_x \sum_n \underline{p}_n\, f\left(\underline{x} - \underline{x}_n\right) =$$

$$= - \underline{\nabla}_x \sum_n \underline{p}_n \int_V f(\underline{x}'')\, \delta\left(\underline{x} - \underline{x}_n - \underline{x}''\right) d^3x'' =$$

polarizáció vektor

$$= - \underline{\nabla}_x \int_V f(x'') \sum_n \underline{p}_n\, \delta\left(\underline{x} - \underline{x}_n - \underline{x}''\right) d^3x'' := - \underline{\nabla}\, \underline{P}(\underline{x})$$

$$\underline{\nabla}\, \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho - \underline{\nabla}\, \underline{P}\right) \Rightarrow \rho = \underline{\nabla}\, \underline{P} + \varepsilon_0 \underline{\nabla}\, \underline{E} = \underline{\nabla} \underbrace{\left(\underline{P} + \varepsilon_0 \underline{E}\right)}_{:= \underline{D}}$$

$:= \underline{D}$ elektromos eltolásvektor

$\underline{P}$ jelen lehet az anyagban külső $\underline{E}$ nélkül is, de függ tőle, $\underline{P}(\underline{E})$ indukált dipólmomentum

Lineáris közelítés: $\underline{P}(\underline{E}) = \varepsilon_0 \cdot \underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{E}$

elektromos szuszceptibilitás

A közelítés kis $\underline{E}$-ben bőven igaz. Izotróp közegben $\underline{\underline{\chi}} = \underline{\underline{I}} \cdot \chi$

$\underline{D} = \underline{P} + \varepsilon_0 \underline{E} = \varepsilon_0 (\chi + 1)\, \underline{E} := \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \underline{E}$ $\qquad \varepsilon_r$: relatív dielektromos állandó

$\varepsilon_0 \varepsilon_r =: \varepsilon$ dielektromos állandó

Határfeltételek

Midőn a térfogat rásimul a felületre

$$\sigma \cdot dA = Q = \int_V \rho(\underline{x}') \, d^3x' = \oint_{\partial V} \underline{D}(\underline{x}') \, d\underline{F}' \xrightarrow{} (\underline{D}_2 - \underline{D}_1)\underline{n} \cdot dA$$

felületi töltéssűrűség

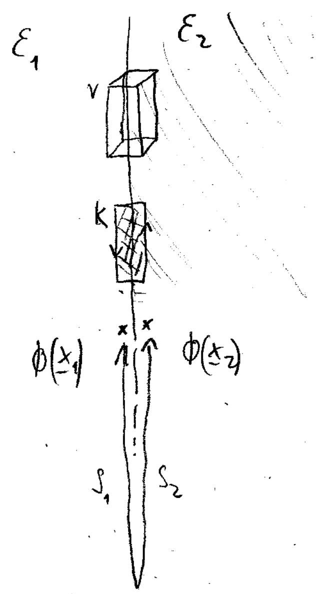
$$\boxed{D_{2,n} - D_{1,n} = \sigma}$$

Midőn a felnin rásimul a határvonalra

$$0 = \int_F \underbrace{\text{rot}\, \underline{E}}_{0} \, d\underline{F} = \oint_K \underline{E} \, d\underline{s} \longrightarrow \boxed{E_{1,t} = E_{2,t}}$$

Midőn $S_1 \to S_2 \Rightarrow \underline{x}_1 \to \underline{x}_2$

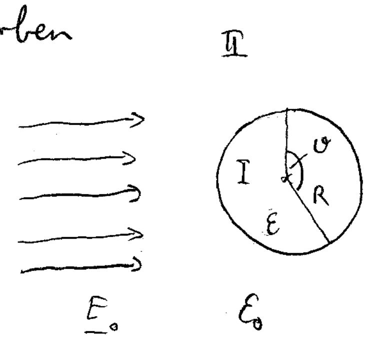
$$\left.\begin{aligned} \phi(\underline{x}) &= -\int_S \underline{E}(\underline{s}) \, d\underline{s} \\ \phi(\underline{x}_1) &= -\int_{S_1} E_{1,t}(\underline{s}) \, ds \\ \phi(\underline{x}_2) &= -\int_{S_2} E_{2,t}(\underline{s}) \, ds \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\phi(\underline{x}_1) = \phi(\underline{x}_2)} \text{ mert } E_{1,t} = E_{2,t}$$



$$D_{2,n} - D_{1,n} = \varepsilon_2 \frac{\partial -\phi_1}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial -\phi_2}{\partial n} = \boxed{\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \sigma}$$

alkalmazás:

1/ ε dielektromos állandójú gömb homogén elektromos térben



2. $\phi_I(R,\vartheta)$, $\forall \vartheta$
$\quad\|$
$\phi_{II}(R,\vartheta)$, $\forall \vartheta$

3. $\underline{D}$ normális komponense folytonos $\Leftarrow \sigma = 0$

határfeltételek

1. $\nabla \phi_{II}(\infty, \vartheta) = -\underline{E}_0 \, P_1(\cos\vartheta)$

próba függvények:

$$\phi_I = A \cdot r \, P_1(\cos\vartheta)$$

$$\phi_{II} = \left(-E_0 r + \frac{B}{r^2}\right) P_1(\cos\vartheta) = -\underline{E}_0 \underline{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{n}\,\underline{p}}{r^2}$$

1. feltételt teljesíti

2. feltételből:

$$A \cdot R = -E_0 R + \frac{B}{R^2}$$

3. feltételből

$$\varepsilon A = \varepsilon_0 \left[(-E_0) - 2\frac{B}{R^3}\right]$$

egyenlet A, B-re

$$A = \frac{B}{R^3} - E_0$$

$$\varepsilon \frac{B}{R^3} - \varepsilon E_0 = -\varepsilon_0 \left[E_0 + 2\frac{B}{R^3}\right]$$

$$A = E_0 \left[\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} - 1\right] = -\frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0$$

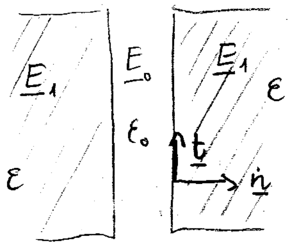
$$B = \frac{E_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r + 2\varepsilon_0} R^3 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} E_0 R^3$$

$$-\nabla\phi_I = \underline{E}_1 = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} \underline{E}_0$$

$$-\nabla\phi_{II} = \underline{E}_2 = \underline{E}_0 - 2\underline{E}_0 R^3 \frac{\varepsilon_r - 1}{r^3(\varepsilon_r + 2)}$$

$$\underline{p} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \underline{E}_0 R^3$$

2/ Anyagbeli térerősség mérése $\underline{E}_0$-t tudjuk mérni, $\underline{E}_1$-t nem

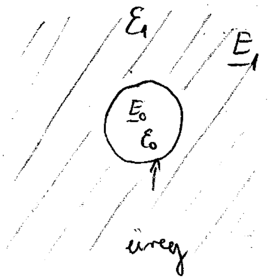


$$\underline{E}_0\cdot\underline{t} = \underline{E}_1\cdot\underline{t} \iff E_{0,t} = E_{1,t}$$

$$\sigma = 0 \qquad \underline{D}_1\cdot\underline{n} = \underline{D}_0\cdot\underline{n} \iff \varepsilon_1\cdot E_{1,n} = \varepsilon_0\cdot E_{0,n} \qquad E_{0,n} = \varepsilon_r\cdot E_{1,n}$$

$$\underline{E}_0 = \underline{n}\cdot E_{1,n}\cdot\varepsilon_r + \underline{t}\cdot E_{1,t}$$

3./



az 1/es példa fordítottja

$\varepsilon \mapsto \varepsilon_0 \qquad \varepsilon_r \mapsto \frac{1}{\varepsilon_r}$

$\varepsilon_0 \mapsto \varepsilon$

$\underline{E}_1 \mapsto \underline{E}_0$

$\underline{E}_0 \mapsto \underline{E}_1$

$$\underline{E}_0 = \frac{3}{1/\varepsilon_r + 2}\underline{E}_1 = \frac{3\cdot\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_r}\cdot\underline{E}_1$$

Polarizálható közeg elektrosztatikus energiája

Vákuumban $W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\underline{x})\,\phi(\underline{x})\,d^3x$, de nem a dielektrikumban. $\quad -\underline{\nabla}\phi = \underline{E}$

$$\delta W = \int_V \phi(\underline{x})\,\delta\rho(\underline{x})\,d^3x = \int_V \phi(\underline{x})\,\underline{\nabla}(\delta\underline{D})\,d^3x = \underbrace{\int_V \underline{\nabla}(\phi\,\delta\underline{D})\,d^3x}_{\oint_{\partial V}\phi\,\delta\underline{D}\,d\underline{F}} - \int_V \delta\underline{D}\,\underline{\nabla}\phi\,d^3x$$

$$\delta\rho(\underline{x}) = \underline{\nabla}(\delta\underline{D}(\underline{x}))$$

ha a töltés lokalizált, az integrandus $\sim \frac{1}{r^3} \Rightarrow \oint \xrightarrow[A]{\infty} 0$

$$\delta W = \int_V \underline{E}\cdot\delta\underline{D}\cdot d^3x \quad \text{általános}$$

linearitás

ha $\underline{D} = \varepsilon\underline{E} \Rightarrow \underline{E}\cdot\delta\underline{D} = \underline{E}\cdot\delta\underline{E}\cdot\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}\delta(\underline{E}^2)$

$$\delta W = \int_V \frac{\varepsilon}{2}\delta(\underline{E}^2)\,d^3x = \delta\left[\int_V \frac{\varepsilon}{2}\delta(\underline{E}^2)\,d^3x\right] \qquad W = \Sigma\,\delta W$$

$$W = \int_V \frac{\varepsilon}{2}E^2\,d^3x = \boxed{\frac{1}{2}\int_V \underline{E}\cdot\underline{D}\,d^3x}$$

Töltéssel kifejezve

$\oint_{\partial V}\phi\,\underline{D}\,d^3x \xrightarrow[A]{\infty} 0$ lokalizált töltésnél

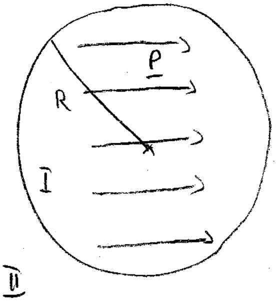
$$W = \frac{1}{2}\int_V -\underline{\nabla}\phi\cdot\underline{D}\,d^3x = \frac{1}{2}\int_V\Big[\overbrace{-\nabla(\phi\cdot\underline{D})}\, + \underbrace{\underline{\nabla}\,\underline{D}}_{\rho}\cdot\phi\Big]\,d^3x = \boxed{\frac{1}{2}\int_V \rho\cdot\phi\,d^3x}$$

ha a közeg lineáris!

Clausius - Mosotti egyenlet

$$\underline{p}_{atomi} = \chi_a \cdot \underline{e} = \gamma \cdot \underline{e} \qquad \underline{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \underline{E} \qquad \chi_a(\chi_e) = ?$$

$$\underline{e} = \underline{E} - \underline{E}_P + \underline{e}_{közeli} \qquad \underline{e}_{közeli} = 0$$ köbösben, de jó közelítéssel mindenhol



$$\phi_I = -\underline{E}_P \cdot \underline{x} = -\underline{E}_P\, r\, P_1(\cos\vartheta)$$

$$\phi_{II} = \frac{c}{r^2} P_1(\cos\vartheta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} R^3 \frac{\underline{P}\cdot\underline{x}}{r^3}$$

$$c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \qquad \underline{p} = \frac{4}{3} R^3 \pi \underline{P}$$

kiszámolható a peremfeltételekből is

$$\phi_I(R) = \phi_{II}(R) \qquad \underline{E}_P = \frac{-\underline{P}}{3\varepsilon_0} \qquad \underline{e} = \underline{E} + \frac{\underline{P}}{3\varepsilon_0}$$

Egységnyi térfogatban N db atom

$$\underline{P} = N \cdot \underline{p}_{atomi} = N \cdot \gamma \cdot \underline{e} = N \cdot \gamma \cdot \left(\underline{E} + \frac{\underline{P}}{3\varepsilon_0}\right) \qquad \underline{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \underline{E}$$

$$\varepsilon_0 \chi \cdot \underline{E} = N \cdot \gamma\, \underline{E}\left(1 + \frac{\chi}{3}\right) \qquad \boxed{N \cdot \gamma = \varepsilon_0 \frac{\chi}{1 + \frac{\chi}{3}}}$$

Atomi polarizáció modelljei

1/ rugalmasan kötött elektronok

$$m\omega_0^2 \underline{x} = q \cdot \underline{E}$$

$$\underline{p} = q \cdot \underline{x} = q \cdot \frac{q \cdot \underline{E}}{m\omega_0^2} = \frac{q^2}{m\omega_0^2}\underline{E} \qquad \gamma = \frac{q^2}{m\omega_0^2}$$

több alkotó esetén $\gamma = \sum_i \frac{q_i^2}{m_i \omega_i^2}$

2/ elektrét modell

nyugalomban is van dipólmomentum, de nagy hőmérsékleten a rendezetlenség miatt kiátlagolódik

$$w = e^{-\frac{W_n}{k_B T}} \qquad W_n = q\,\phi(\underline{x}+\underline{l}) - q\,\phi(\underline{x}) \approx \approx q\,\underline{l}\,\underline{\nabla}(\phi(\underline{x})) = -\underline{p}\cdot\underline{E} \qquad w = e^{\frac{pE\cos\vartheta}{k_B T}}$$

Boltzmann tényező

$$\alpha := \frac{pE}{k_B T}$$

$$\langle p_z\rangle = p\cdot\langle\cos\vartheta\rangle = p\,\frac{\int(\cos\vartheta)\cdot w\cdot d\Omega}{\int w\cdot d\Omega}$$

$$\langle p_z\rangle = p\,\frac{\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}(\cos\vartheta)\cdot w\cdot d(\cos\vartheta)\,\cancel{d\varphi}}{\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} w\cdot d(\cos\vartheta)\,\cancel{d\varphi}} = p\,\frac{\int_{-1}^{1} x\cdot e^{\alpha x}\,dx}{\int_{-1}^{1} e^{\alpha x}\,dx} =$$

$$= p\,\frac{\frac{d}{d\alpha}\int_{-1}^{1} e^{\alpha x}\,dx}{\int_{-1}^{1} e^{\alpha x}\,dx} = p\,\frac{d}{d\alpha}\ln\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{\alpha} = p\,\frac{d}{d\alpha}\left[\ln(e^{\alpha}-e^{-\alpha})-\ln\alpha\right] =$$

$$= p\cdot\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\right) \approx p\left[\frac{2\cdot\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)}{2\cdot\left(\alpha+\frac{\alpha^3}{6}\right)}-\frac{1}{\alpha}\right] \approx p\left[\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right)-\frac{1}{\alpha}\right] \approx$$

$$\approx \frac{p}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha^2}{3}-1\right) = \frac{p\,\alpha}{3} = \frac{p^2 E}{3 k_B T} \implies \gamma = \frac{p^2}{3 k_B T}$$

Magnetosztatika

$$\operatorname{div}\underline{B} = 0 \implies \operatorname{rot}\underline{A} = \underline{B}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{A} = (\operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta)\,\underline{A} \qquad \operatorname{div}\underline{A} = 0 \text{ Coulomb mérték}$$

$$\operatorname{rot}\underline{B} = -\Delta A = \mu_0\,\underline{j}$$

$$\boxed{\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d^3x'}$$

teljesül-e $\operatorname{div}\underline{A} = 0$?

$$\underline{\nabla}_x\,\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \underline{j}(\underline{x}')\,\underline{\nabla}_x\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d^3x' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \underline{j}(\underline{x}')(-1)\,\underline{\nabla}_{x'}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(\underbrace{\underline{\nabla}_{x'}\frac{-\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}}_{\text{lokalizált, }0} + \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,\underline{\nabla}_{x'}\,\underline{j}(\underline{x}')\right)d^3x'$$

$$\underline{\nabla}_x \underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla_{x'} \underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x' = 0$$ teljesül, ha $\operatorname{div} \underline{j} = 0$

$$\operatorname{div} \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ sztatika: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \underline{j} = 0$

$$B_i(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \varepsilon_{ijl} \underbrace{\partial_j}_{\text{vesszőtlen}} \frac{j_l(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \varepsilon_{ijl}\, j_l(\underline{x}') \frac{(\underline{x}'-\underline{x})_j}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} d^3x'$$

$$\boxed{\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\underline{j}(\underline{x}') \times (\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} d^3x'}$$

vékony áramvezetőre

1D-ban nem 0 az értéke, a vezetőn

$$\underline{j}(\underline{x}') = \underline{t}(\underline{x}_0) \cdot I \cdot \delta_\perp(\underline{x}'-\underline{x}_0)$$

$$d^3x' = ds \cdot d^2x'$$

$$\int_F \underline{j}(\underline{x}')\, d^2x' = I \cdot \underline{t}$$

$$\boxed{\underline{B}(\underline{x})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \int_F \frac{\underline{j}(\underline{x}') \times (\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} d^2x'\, ds =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S \frac{\underline{t}(\underline{x}_0) \times (\underline{x}-\underline{x}_0)}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} ds = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S \frac{d\underline{s} \times (\underline{x}-\underline{x}_0)}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}}$$ Biot-Savart

Multipól sorfejtés

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\underline{n}\cdot\underline{x}'}{r^2} + \dots$$

Állítás: $\int_V \nabla_{x'} \left[f(\underline{x}')\, g(\underline{x}')\, \underline{j}(\underline{x}') \right] d^3x' = 0$

$$0 = \int_V \Big[g(\underline{x}') \cdot \underline{j}(\underline{x}')\, \underline{\nabla}_{x'}\big(f(\underline{x}')\big) + f(\underline{x}')\, \underline{j}(\underline{x}')\, \underline{\nabla}_x\big(g(\underline{x}')\big) + f(\underline{x}')\, g(\underline{x}') \overbrace{\underline{\nabla}_x\big(\underline{j}(\underline{x}')\big)}^{0} \Big] d^3x'$$

$$0 = \int_V g(\underline{x}')\, j_i\, \partial_i f(\underline{x}') + f(\underline{x}')\, j_l\, \partial_l\, g(\underline{x}')$$ $f := x_i \quad g := 1$

$$0 = \int_V \underline{j}(\underline{x})\, d^3x$$

$$\underline{A}_0(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_V \underline{j}(x)\, d^3x = 0$$

↑

multipólsorfejtés 1. tagja

$$\underline{A}_{1,l}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n_e}{r^2}\int_V x_e' j_l(\underline{x}')\, d^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n_e}{r^2}\int_V \left[\frac{1}{2}\left(x_e' j_l + x_l' j_e\right) + \frac{1}{2}\left(x_e' j_l - x_l' j_e\right)\right] d^3x'$$

$$f := x_e' \qquad g := x_l'$$

$$0 = \int_V \left(x_e' j_i \underbrace{\partial_i x_l'}_{\delta_{il}} + x_l' j_i \underbrace{\partial_i x_e'}_{\delta_{ie}}\right) d^3x' = \int_V \left(x_e' j_l + x_l' j_e\right) d^3x$$

$$\underline{A}_{1,l}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot \int_V \frac{1}{2}\left(n_e x_e' j_l - x_l' n_e j_e\right) d^3x'$$

$$\underline{A}_1(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot \frac{1}{2}\int_V \Big[\underbrace{(\underline{n}\,\underline{x}')\,\underline{j}(\underline{x}') - \underline{x}'\cdot\left(\underline{n}\cdot\underline{j}(\underline{x}')\right)}_{\underline{n}\times\left(\underline{j}(\underline{x}')\times\underline{x}'\right)}\Big] d^3x' = \frac{-\mu_0}{4\pi r^2}\cdot \underline{n}\times \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \underline{x}'\times\underline{j}(\underline{x}')\, d^3x'}_{:=\underline{m}}$$

mágneses dipólmomentum

$$\underline{A}_1(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\underline{m}\times\underline{n}}{r^2}$$

Példa: 1/ q_i töltésű, $\underline{v}_i$ sebességű, M_i tömegű részecskék

$$\underline{j}(\underline{x}) = \sum_i q_i \underline{v}_i \,\delta(\underline{x}-\underline{x}_i)$$

lendület

$$\underline{m}(x) = \frac{1}{2}\int_V \left[\underline{x}'\times\sum_i q_i \underline{v}_i\,\delta(\underline{x}'-\underline{x}_i)\right] d^3x' = \frac{1}{2}\sum_i q_i\left(\underline{x}_i\times\underline{v}_i\right) = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{M_i}\left(\underline{x}_i\times\underline{p}_i\right)$$

perdület

$$\boxed{\underline{m}(\underline{x}) = \sum_i \frac{q_i}{2M_i}\underline{L}_i}$$

elektronra $L_z = n\cdot\hbar \quad n\in\mathbb{N} \Rightarrow m_z = \underbrace{\frac{e\cdot\hbar}{2m_e}}_{:=\mu_B \text{ Bohr magneton}}\cdot n$

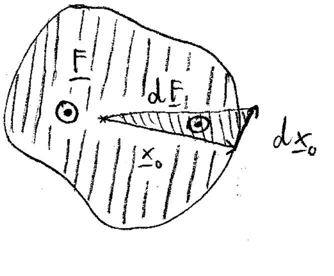
elektron tömege

2/ Vékony áramvezető

$$\underline{j}(\underline{x}') = I\cdot\underline{t}(\underline{x}_0)\,\delta(\underline{x}'-\underline{x}_0)$$

$$\underline{m} = \frac{1}{2}\int_V\left[\underline{x}'\times I\,\underline{t}(\underline{x}_0)\,\delta_\perp(\underline{x}'-\underline{x}_0)\right] d^3x' = \frac{I}{2}\int_S \underline{x}_0\times d\underline{x}_0 = I\cdot\underline{F}$$

$$2\cdot d\underline{F} = \underline{x}_0\times d\underline{x}_0$$



Magnetosztatika anyagi közegben

$$\underline{M} := \sum_i \underline{m}_i \, N_i$$

N_i: i-fajták száma egységnyi térfogatban

$\underline{m}_i$: i-fajta mágneses dipólmomentum

$$\underline{A}_{közeg} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\underline{j}_{sz}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\underline{M}(\underline{x}') \times (\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} d^3x'$$

$$\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}+\underline{x}'|^3} = \underline{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

$$\left[\int_V \underline{M}(\underline{x}') \times \underline{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x'\right]_i = \int_V \varepsilon_{ijl} M_j \partial_l \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x' =$$

$$= \int_V \varepsilon_{ijl} \left(\partial_l \left(M_j \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\right) - \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \partial_l M_j\right) d^3x' = \int_V \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \varepsilon_{ilj} \partial_l M_j \, d^3x'$$

indexpermutálás ε-ra

$\int_V \partial_l \frac{M_j}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x' = 0$ mert $\underline{M}$ lokalizált

$$\underline{A}_{közeg} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\underline{j}_{sz}(\underline{x}') + \text{rot}\, \underline{M}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \qquad \underline{j}_{eff} = \underline{j}_{sz} + \text{rot}\, \underline{M}$$

$\text{div}\, \underline{B} = 0$ továbbra is

$\text{rot}\, \underline{B} = \mu_0 \underline{j}_{eff} \neq \mu_0 \underline{j}$ mert van közeg

$$\text{rot}\, \underline{B} = \mu_0 (\underline{j}_{sz} + \text{rot}\, \underline{M}) \qquad \text{rot} \underbrace{\left(\frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M}\right)}_{:= \underline{H}} = \underline{j}_{sz}$$

$:= \underline{H}$ mágneses térerősség

Anyagegyenlet:

$\underline{M}(\underline{H}) = ?$ Para- és diamágnesre jó közelítés a skalár linearitás: $\underline{M} = \chi_m \underline{H}$

χ_m: mágneses szuszceptibilitás

para: $\chi_m > 0$

dia $\chi_m < 0$

$$\underline{B} = \mu_0(\underline{H} + \underline{M}) = \mu_0 \overbrace{(1 + \chi_m)}^{:= \mu_r} \underline{H} = \mu_0 \mu_r \underline{H} := \mu \cdot \underline{H}$$

$:= \mu_r$ relatív mágn. permeabilitás

μ: mágneses permeabilitás

Vannak anyagok, melyek akkor is mágnesesek, ha $\underline{j}_{sz}=0$

$$\text{rot}\,\underline{H}=0 \qquad \text{div}\,\underline{B}=\mu_0\left(\text{div}\,\underline{H}+\text{div}\,\underline{M}\right)=0$$

$$\text{div}\,\underline{H}=-\text{div}\,\underline{M}:=\rho_{mágn}$$

$$\underline{H}:=-\text{grad}\,\phi_{mágn} \qquad \Delta\phi_m=-\text{div}\,\underline{H}=\text{div}\,\underline{M}=-\rho_{mágn}$$

$$\phi_m(\underline{x})=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\rho_m(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}d^3x'=\frac{-1}{4\pi}\int_V\frac{\text{div}\,\underline{M}}{|\underline{x}-\underline{x}'|}d^3x'=$$

parciális integrálás, $\underline{M}$ lokalizált

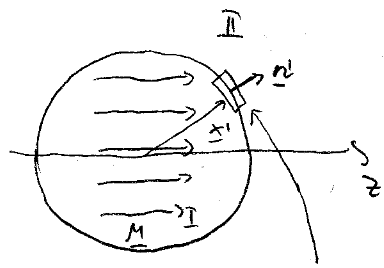
$$=\frac{1}{4\pi}\int_V\underline{M}(\underline{x}')\,\underline{\nabla}_{x'}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}d^3x'=\frac{-1}{4\pi}\underline{\nabla}_x\int_V\frac{\underline{M}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}d^3x'$$

$$\underline{\nabla}_{x'}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}=\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}=-\frac{\underline{x}'-\underline{x}}{|\underline{x}'-\underline{x}|^3}=-\underline{\nabla}_x\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

Ha $\underline{M}(\underline{x}')=\underline{m}\,\delta(\underline{x}')$ akkor mágneses dipól

$$\phi_m(\underline{x})=\frac{-1}{4\pi}\underline{\nabla}_x\frac{\underline{m}(\underline{x})}{|\underline{x}|}=\frac{1}{4\pi}\frac{\underline{m}\cdot\underline{x}}{|\underline{x}|^3}$$ analóg az elektromossal

<u>Határfeltételek</u>



$$\text{div}\,\underline{H}=-\text{div}\,\underline{M}=\rho_{mágn}$$

$$\int_V\rho_m(\underline{x}')\,d^3x'=-\int_V\text{div}\,\underline{M}\,d^3x'=-\oint_{\partial V}\underline{M}(\underline{x}')\,d\underline{F}=$$

$$=-\oint_{\partial V}\underline{M}(\underline{x}')\underline{n}\,dF=\int_{belső}\underline{M}(\underline{x}')\cdot\underline{n}\,dF=\int_{felület}\underbrace{\frac{d\rho_{sz}(\underline{x}')}{dA}}_{\sigma_m}dF$$

a külső lapon a járulék 0, a belsőn nem 0, de $\underline{n}'$ iránya miatt −

$$\sigma_m(\underline{x}')=\underline{M}(\underline{x}')\cdot\underline{n}$$

$$\Phi_m(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi}\oint \frac{\underline{n}\,\underline{M}}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,dF' = \frac{1}{4\pi}\oint \frac{M\cos\vartheta}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,R^2 d\Omega' = \frac{M R^2}{4\pi}\oint \frac{P_1(\underline{n}'\cdot\underline{M})}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d\Omega =$$

$dF = R^2\, d\Omega$ $\qquad r_< := \min(|\underline{x}|, |\underline{x}'|) \qquad r_> := \max(|\underline{x}|, |\underline{x}'|)$

$$= \frac{MR^2}{4\pi}\oint \underbrace{P_1(\cos\vartheta')}_{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_{1,0}(\underline{n}')} \sum_l \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \sum_m Y^*_{lm}(\underline{n}')\,Y_{lm}(\underline{n}) =$$

$$= \frac{MR^2}{4\pi}\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\,Y_{lm}(\underline{n}) \overbrace{\oint Y_{10}(\underline{n}')\,Y^*_{lm}(\underline{n}')\,d\Omega}^{\delta_{1l}\,\delta_{0m}} =$$

$$= \frac{MR^2}{\cancel{4\pi}}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,\frac{4\pi}{3}\,\frac{r_<}{r_>^2}\,Y_{10}(\underline{n}) = \frac{MR^2}{3}\frac{r_<}{r_>^2}\,P_1(\cos\vartheta)$$

Külső tér: $\phi_{II} = \frac{MR^2}{3}\frac{R}{r^2}\cos\vartheta = \frac{1}{4\pi}\frac{\underline{m}\cdot\underline{n}}{r^2}$ dipólusos

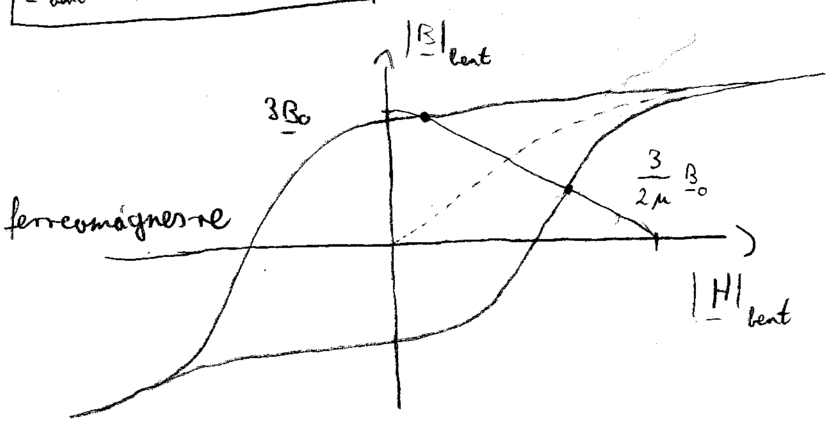
$$\underline{M} = \frac{\underline{m}}{\frac{4}{3}R^3\pi}$$

belső tér: $\phi_I = \frac{MR^{\cancel{2}}}{3}\frac{r}{\cancel{R^2}}\cos\vartheta = \frac{\underline{M}\cdot\underline{x}}{3}$

$$-\nabla\phi_I = \underline{H} = -\frac{\underline{M}}{3} \qquad \underline{B}_I = \mu_0(\underline{M}_I + \underline{H}_I) = \frac{2\mu_0}{3}\underline{M}$$

Töltse ki az egész teret $\underline{B}_0$, $\frac{1}{\mu_0}\underline{B}_0 = \underline{H}_0$

$$\left.\begin{aligned}\underline{B}_{bent} &= \underline{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\underline{M}\\ \underline{H}_{bent} &= \frac{1}{\mu_0}\underline{B}_0 - \frac{1}{3}\underline{M}\end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\underline{B}_{bent} + 2\mu_0\,\underline{H}_{bent} = 3\,\underline{B}_0}$$



Szupravezetők

$0 = \underline{B}_{bent} = \mu_0(\underline{H}+\underline{M})$ $\quad \underline{M} = -\underline{H}$ $\quad \chi_m = -1$ $\quad$ ez egy tökéletes diamágnes, szupravezető ilyen

Finomabb leírás: 1938, London fivérek

$$\underline{j} = \underline{j}_s + \underline{j}_n$$

$\underline{j}_s$: szabad, $\underline{j}_n$: ellenállásos

elektromos tér hatására szabadon gyorsulhatnak a töltéshordozók

$$\underline{j}_s = n_s \cdot e^* \cdot \dot{\underline{x}}$$

$$\dot{\underline{j}}_s = n_s e^* \ddot{\underline{x}} = n_s \frac{e^{*2} \underline{E}}{m^*} \qquad \rho = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$\underline{E} = -\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\phi$$

$$\dot{\underline{j}}_s = -n_s \frac{e^{*2}}{m^*} \dot{\underline{A}}_c$$

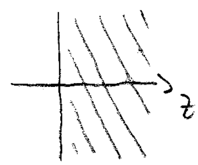
$$\boxed{\underline{j}_s = -n_s \frac{e^{*2}}{m^*} \underline{A}_c}$$

Coulomb mértékkel $\underline{E} = -\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$?

$\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j} + \dot{\underline{D}}$ elhanyagolható $\qquad \mu \underline{H} = \underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A}$

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \underline{A} = \frac{1}{\mu}(\operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta)\underline{A} = -n_s \frac{e^{*2}}{m^*} \underline{A} \qquad \operatorname{div}\underline{A} = 0 \text{ Coulomb mérték}$$

$$\Delta \underline{A} = \mu n_s \frac{e^{*2}}{m^*} \underline{A} \qquad \mu n_s \frac{e^{*2}}{m^*} := \frac{1}{\Lambda^2}$$



$$\Delta \underline{A} = \frac{1}{\Lambda^2} \underline{A} \Rightarrow \underline{A}(z) = \underline{A}(0) \cdot e^{-\frac{z}{\Lambda}}$$

Λ a behatolási mélység

Az ellenállás-nélküli töltéshordozó a Cooper-párok, $2n = n^*$, $e^* = 2e$, $m^* = 2m$

Indukció

$$\Psi_m = \int_F \underline{B}\, d\underline{F} \qquad \frac{d\Psi_m}{dt} = \int_F \overbrace{\left(\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + (\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{B}\right)}^{\frac{dB}{dt}} d\underline{F}$$

ez is mozoghat,

állandó $\underline{v}$ sebességgel

$$\left(\mathrm{rot}(\underline{v}\times\underline{B})\right)_i = \varepsilon_{ijl}\,\partial_j\,\varepsilon_{llm}(v_l B_m) = \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{lj}\right)\partial_j v_l B_m =$$

$$= v_i \partial_j B_j - v_j \partial_j B_i = \Big(\underline{v}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\underline{B}}_{0} - (\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{B}\Big)_i \qquad (\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{B} = -\mathrm{rot}(\underline{v}\times\underline{B})$$

$$\frac{d\Psi_m}{dt} = \int_F \left[-\mathrm{rot}\,\underline{E} - \mathrm{rot}(\underline{v}\times\underline{B})\right] d\underline{F} = -\oint_{\partial F}\left(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B}\right) d\underline{s}$$

nyugalmi indukció, adott felületen a változás nagysága

mozgási indukció adott fluxus mellett odébbhalad a felület

Áramkörhöz rögzített rendszerben

$$\frac{d\Psi_m'}{dt} = -\oint_{\partial F} \underline{E}'\, d\underline{s} \qquad \text{itt} \qquad \Psi_m' = \int_F \underline{B}'\, d\underline{F}$$

$$\underline{E}' = \underline{E} + \underline{v}\times\underline{B} \qquad\qquad \underline{B}' = \underline{B} \quad \text{feltevés}$$

$$\underline{F} = \underline{F}' = q\cdot\underline{E}' = q\left(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B}\right) \quad \text{Lorentz-erő}$$

Makroszkopikus mágnesezhető közeg energiája

$$\boxed{\delta W_M = -\int_V \varrho\,\underline{v}\,\underline{E}\,\delta t\; ds\,dF = I\left(-\int_{\partial F'} E\, ds\right)\delta t = I\,\frac{\delta\Psi_m}{\delta t}}$$

$$\delta W_M = I\int_F \delta\underline{B}\, d\underline{F} = I\int_F \mathrm{rot}\,\delta\underline{A}\; d\underline{F} = I\oint_{\partial F}\delta\underline{A}\cdot d\underline{s} = \int_V \underline{j}\,\delta\underline{A}\, d^3x = \int_V \mathrm{rot}\,\underline{H}\,\delta\underline{A}\, d^3x$$

$$\underline{\nabla}\left(\delta\underline{A}\times\underline{H}\right) = \partial_i\,\varepsilon_{ijl}\,\delta A_j H_l = \varepsilon_{ijl}\left(H_l\,\partial_i\delta A_j + \delta A_j\,\partial_i H_l\right) =$$

$$= \underline{H}\,\mathrm{rot}\,\delta\underline{A} - \delta\underline{A}\,\mathrm{rot}\,\underline{H}$$

$$\delta W_M = \underbrace{\int_V \mathrm{div}\left(\delta \underline{A}\times \underline{H}\right) d^3x}_{0} + \int_V \underline{H}\, \underbrace{\mathrm{rot}\,\delta\underline{A}}_{\delta \underline{B}}\, d^3x = \int_V \underline{H}\,\delta\underline{B}\, d^3x$$

általánosan igaz

$\underline{B}=\mu\underline{H}$ esetén $\underline{H}\,\delta\underline{B} = \frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{\mu} H^2\right)$

mágneses térben tárolt energiasűrűség $w_M : \frac{1}{2}\underline{H}\,\underline{B}$

$$W_M = \int_V \frac{1}{2}\frac{1}{\mu} H^2 d^3x = \int \frac{1}{2}\,\underline{H}\cdot\underline{B}\, d^3x$$

$$W_M = \int_V w_M\, d^3x$$

Frekvenciafüggő polarizálhatóság

$m(\ddot{\underline{x}}+\alpha\dot{\underline{x}}+\omega_0^2\underline{x}) = q\cdot\underline{E}(t)$ $\quad /\cdot e^{i\omega t}, \int . dt$

$m(-\omega^2 - \alpha i\omega + \omega_0^2)\,\tilde{\underline{x}}(\omega) = q\cdot\tilde{\underline{E}}(\omega)$

$\hat{\underline{p}}(\omega) = q\,\hat{\underline{x}}(\omega) = \underbrace{\frac{q^2}{m(\omega_0^2-\omega^2-\alpha i\omega)}}_{\tilde\gamma(\omega)}\, \hat{\underline{E}}(\omega)$

$\varepsilon_0\tilde\chi_e(\omega) \approx N\cdot\tilde\gamma(\omega) = \frac{N\cdot q^2}{m(\omega_0^2-\omega^2-\alpha i\omega)}$

$$\tilde{\underline{P}}(\omega) = \varepsilon_0\tilde\chi_e\tilde{\underline{E}}(\omega)$$

$$\underline{P}(t) = \int \varepsilon_0\, \tilde\chi_e(\omega)\,\tilde{\underline{E}}(\omega)\, e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi} \qquad \hat{\underline{E}}(\omega) = \int \underline{E}(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

$$\boxed{\underline{P}(t) = \int\varepsilon_0\, \underline{E}(\tau)\underbrace{\int\tilde\chi_e(\omega)\, e^{i\omega(\tau-t)}\frac{d\omega}{2\pi}}_{\chi_e(\tau-t)}\, d\tau} = \boxed{\int \varepsilon_0\,\chi_e(\tau-t)\,\underline{E}(\tau)\,d\tau}$$

$\chi_e(\tau)=0$ ha $\tau<0$ kauzalitás miatt, $\underline{P}$ csak $\underline{E}$ után változhat

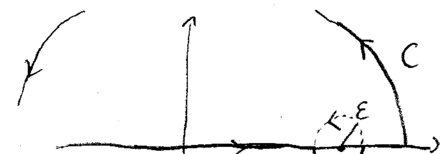
$$\tilde\chi_e(\omega) = \int_0^\infty \chi_e(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

$\omega = \omega' + i\omega''$

$e^{i\omega t} = e^{i\omega' t} + e^{-\omega'' t}$

Ha $0 \neq \omega' \neq \omega''$, akkor $t>0$ miatt szépen integrálható lesz

Ha $\omega\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \omega''=0$



$$\tilde\chi_e(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\tilde\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega'$$

$$P\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega' := \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon}+\int_{\omega+\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega'$$

$$\int_{\text{félkör}} \frac{\tilde\chi_e(\omega')}{\omega-\omega'}\,d\omega' = \frac{1}{2}\oint\frac{\chi_e(\omega')}{\omega-\omega'}\,d\omega' = \frac{1}{2}\,2\pi i\,\tilde\chi_e(\omega)$$

$$\chi_e(\omega) = \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_e(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{2} \chi_e(\omega)$$

$$\chi_e(\omega) = \frac{1}{\pi \cdot i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_e(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[\chi_e(\omega)\right] &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, \chi_e(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \mathrm{Im}\left[\chi_e(\omega)\right] &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\, \chi_e(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned}}$$

Közegbeli Maxwell-egyenletek

$$\rho_{\text{öss}} = \rho_{sz} + \rho_{pol} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \underline{j} = 0 \quad \text{Mindegyik tagra teljesül}$$

$$\underline{j}_{\text{öss}} = \underline{j}_{sz} + \underline{j}_{pol} + \underline{j}_{mágn}$$

$$\underline{j}_{mágn} = \mathrm{rot}\, \underline{M} \Rightarrow \mathrm{div}\, \underline{j}_{mágn} = 0$$

$$\rho_{pol} = -\mathrm{div}\, \underline{P} \Rightarrow \frac{\partial \rho_{pol}}{\partial t} + \mathrm{div}\, \underline{j}_{pol} = \mathrm{div}\left(\underline{j}_{pol} - \frac{\partial \underline{P}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\underline{j}_{pol} = \frac{\partial \underline{P}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\, \underline{B} = \mu_0 \left(\underline{j}_{sz} + \mathrm{rot}\, \underline{M} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right)$$

$$\mathrm{rot}\underbrace{\left(\frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M}\right)}_{\underline{H}} = \underline{j}_{sz} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}\right)}_{\underline{D}} \qquad \boxed{\mathrm{rot}\, \underline{H} = \underline{j}_{sz} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}}$$

$$\mathrm{div}\, \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{sz} - \mathrm{div}\, \underline{P}\right) \Rightarrow \mathrm{div}\underbrace{\left(\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}\right)}_{\underline{D}} = \rho_{sz} \qquad \boxed{\mathrm{div}\, \underline{D} = \rho_{sz}}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}} \qquad \boxed{\mathrm{div}\, \underline{B} = 0}$$

Időbeli Fourier-transzformáltjai

$$\mathrm{rot}\, \widehat{\underline{H}}(\underline{x},\omega) = \widetilde{\underline{j}}_{12}(\underline{x},\omega) - i\omega \widetilde{\underline{D}}(\underline{x},\omega) \qquad \mathrm{div}\, \widetilde{\underline{B}}(\underline{x},\omega) = 0$$

$$\mathrm{rot}\, \widetilde{\underline{E}}(\underline{x},\omega) = i\omega \widetilde{\underline{B}}(\underline{x},\omega) \qquad \mathrm{div}\, \widetilde{\underline{D}}(\underline{x},\omega) = \widetilde{\varrho}_{12}(\underline{x},\omega)$$

Anyagi egyenletek: $\widetilde{\underline{D}}(\underline{x},\omega) = \widetilde{\varepsilon}(\omega)\, \widetilde{\underline{E}}(\underline{x},\omega)$

$$\widetilde{\underline{B}}(\underline{x},\omega) = \widetilde{\mu}(\omega)\, \widehat{\underline{H}}(\underline{x},\omega)$$

Energiaviszonyok (adott frekvencián)

$$\frac{1}{T}\int_0^T \underline{j}(\underline{x},t)\, \underline{E}(\underline{x},t)\, dt = \frac{1}{4T}\int_0^T \left(\underline{j}_0(\underline{x})e^{-i\omega t} + \underline{j}_0^*(\underline{x})e^{i\omega t}\right)\left(\underline{E}_0(\underline{x})e^{-i\omega t} + \underline{E}_0^*(\underline{x})e^{i\omega t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underline{j}_0(\underline{x})\,\underline{E}_0^*(\underline{x}) + \underline{j}_0^*(\underline{x})\,\underline{E}_0(\underline{x})\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{j}_0^*(\underline{x})\,\underline{E}_0(\underline{x})\right)$$

$$\overline{\frac{dE_{mech}}{dt}} = \int_V \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{j}_0^*(\underline{x})\,\underline{E}_0(\underline{x})\right)d^3x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_V\left[\mathrm{rot}\,\underline{H}^*(\underline{x}) - i\omega\,\underline{D}^*(\underline{x})\right]\underline{E}(\underline{x})\, d^3x =$$

$$\mathrm{div}\left(\underline{E}\times\underline{H}^*\right) = \underline{H}^*\,\mathrm{rot}\,\underline{E} - \underline{E}\,\mathrm{rot}\,\underline{H}^*$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\left[\underbrace{\underline{H}^*\,\mathrm{rot}\,\underline{E}}_{i\omega\underline{B}} - i\omega\,\underline{D}^*(\underline{x})\underline{E}(\underline{x}) - \mathrm{div}\left(\underline{E}\times\underline{H}^*\right)\right]d^3x =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_V (i\omega)\left(\underline{H}^*\underline{B} - \underline{D}^*\underline{E}\right)d^3x - \oint_{\partial V}\underline{E}\times\underline{H}^*\, dF\right]$$

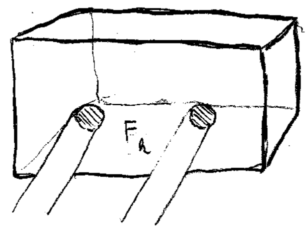
Ezzel egyúttal a számolásban azt is megmutattuk, hogy

$$\int_V \frac{1}{2}i\omega\left(\underline{E}\,\underline{D}^* - \underline{B}\,\underline{H}^*\right)d^3x + \oint_{\partial V}\frac{1}{2}\underline{E}\times\underline{H}^*\, d\underline{F} = -\int_V \frac{1}{2}\underline{j}^*(\underline{x})\cdot\underline{E}(\underline{x})\, d^3x$$

$$w_E = \frac{1}{4}\underline{E}\,\underline{D}^* \qquad w_M = \frac{1}{4}\underline{B}\,\underline{H}^* \qquad \underline{S} = \frac{1}{2}\underline{E}\times\underline{H}^*$$

$$\int_V \frac{1}{2}\underline{j}^*\underline{E}\, d^3x + \oint_{\partial V}\underline{S}\, dF + 2i\omega\int_V\left(w_E - w_M\right)d^3x' = 0$$

Kváziistacionárius közelítés



$$\frac{1}{2} I^* V = -\int_{F_k} \underline{S}\, d\underline{F} = \int_V \frac{1}{2} \underline{j}^* \underline{E}\, d^3x + \int_V 2i\omega \left(W_E - W_M\right) d^3x + \underbrace{\int_{\partial V - F_1} \underline{S}\, d\underline{F}\, d^3x}$$

$\uparrow$ elektronikai ismereteinkből

≈ 0, elhanyagoljuk a sugárzási veszteséget kváziistac. közelítésben

$$V = Z I = (R - iX) I \Rightarrow \frac{1}{2} I^* V = \frac{1}{2} |I|^2 (R - iX)$$

$$\mathbb{C} \ni Z := R - iX$$

$$|I|^2 (R - iX) = \int_V \underline{j}^* \underline{E}\, d^3x + 4i\omega \int_V \left(W_E - W_M\right) d^3x$$

A $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ és $W_E, W_M \in \mathbb{R}$ feltevésekkel a fenti egyenlet felbontható valósra és képzetesre:

$$R = \frac{1}{|I|^2} \int_V \sigma |\underline{E}|^2 d^3x \qquad X = \frac{1}{|I|^2} \int_V 4\omega \left(W_M - W_E\right) d^3x$$

<u>Megj.</u>: W_E, W_M valósak, ha $\underline{D}$ az $\underline{E}$-nek és $\underline{H}$ a $\underline{B}$-nek lineáris függvénye.

1/ Ohmikus ellenállás

$$R = \frac{1}{|I|^2} F \cdot l \cdot \sigma \cdot |\underline{E}|^2 \qquad |I| = |\underline{j}| \cdot F \qquad \underline{j} = \sigma \underline{E}$$

$$R = \frac{1}{F^2 |\underline{j}|^2} F l \sigma \frac{|\underline{j}|^2}{\sigma^2} = \frac{l}{F \cdot \sigma}$$

2/ Kapacitás

$$X_c := -\frac{1}{|I|^2} \int_V 4\omega W_E\, d^3x = -\frac{\omega}{|I|^2} \int_V \underline{E}\, \underline{D}^*\, d^3x = \frac{\omega}{|I|^2} \int_V \operatorname{grad}\phi \cdot \underline{D}^* =$$

$$= \frac{\omega}{|I|^2} \int_V \operatorname{grad}\left(\phi \cdot \underline{D}^*\right) d^3x - \frac{\omega}{|I|^2} \int_V \phi\, \nabla \underline{D}^*\, d^3x = -\frac{\omega}{|I|^2} \int_V \phi\, \rho^*\, d^3x$$

Feltevés: ha $\phi = \text{áll} \Rightarrow X_c = -\frac{\omega}{|I|^2} \phi \cdot Q^*$ (de akkor $\operatorname{grad}\phi = 0$ nem?)

$$\left.\begin{array}{l} C := \frac{Q}{\phi} \quad \text{elektronikából} \\ \frac{dQ}{dt} = I \qquad \Rightarrow I = -i\omega C \end{array}\right\} X_c = -\frac{1}{\omega C}$$

3/ Induktivitás

$$X_L := \frac{1}{|I|^2} \int_V 4\omega \, W_M \, d^3x = \frac{\omega}{|I|^2} \int_V \underline{B}\, \underline{H}^* \, d^3x = \frac{\omega}{|I|^2} \int_V \mathrm{rot}\, \underline{A} \cdot \underline{H}^* \, d^3x$$

$$\mathrm{div}\left(\underline{H}^* \times \underline{A}\right) = \underline{H}^* \, \mathrm{rot}\, \underline{A} - \underline{A}\, \overbrace{\mathrm{rot}\, \underline{H}^*}^{j^*}$$

$$X_L = \frac{\omega}{|I|^2} \int_V \mathrm{div}\left(\underline{H}^* \times \underline{A}\right) d^3x + \frac{\omega}{|I|^2} \int_V \underline{A}\, \underline{j}^* \, d^3x$$

ha $\underline{A}$ állandó a keresztmetszeten

$$X_L = \frac{\omega}{|I|^2} I^* \oint_{\partial F} \underline{A}\, d\underline{x} = \frac{\omega}{I} \int_F \overbrace{\mathrm{rot}\, \underline{A}}^{B} \, d\underline{F} = \frac{\omega}{I} \Psi_m \qquad L := \frac{\Psi_m}{I}$$

$$X_L = \omega L$$

Kvázistacionárius mágneses mezők

$\underline{j} = \sigma \cdot \underline{E}$ $\quad \rho = 0 \Rightarrow$ Coulomb mértékben $\phi = 0$

$$\mathrm{rot}\, \underline{H}(\underline{x}) = \sigma \underline{E}(x) - i\omega \underline{E}(\underline{x}, \omega)$$

ha $\sigma \gg \omega \cdot |\varepsilon(\omega)|$ $\qquad \mathrm{rot}\, \underline{B}(\underline{x}) = \mu \cdot \sigma \cdot \underline{E}(\underline{x})$

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = -\frac{\partial \underline{A}(\underline{x}, t)}{\partial t} \Rightarrow \underline{E}(\underline{x}) = i\omega \underline{A}(\underline{x})$$

$$(\underbrace{\mathrm{grad\,div}}_{0} - \Delta)\, \underline{A} = \mathrm{rot\,rot}\, \underline{A} = \mathrm{rot}\, \underline{B} = \mu\sigma\, \underline{E} = i\omega\mu\sigma\, \underline{A}$$

$$\boxed{-\Delta \underline{A} = i\omega \mu\sigma \underline{A}}$$

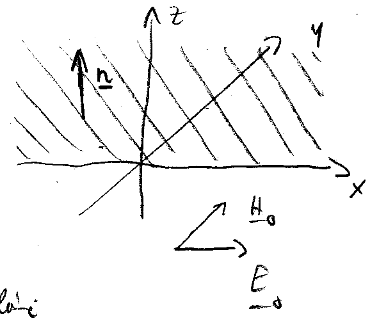
$\mathrm{rot}\, \underline{E} = i\omega \underline{B}$ $\qquad \mathrm{div}\, \underline{B} = 0$

$\mathrm{rot}\, \underline{H} = \sigma \cdot \underline{E}$ $\qquad \mathrm{div}\, \underline{D} = 0$

$$\underbrace{\mathrm{grad\,div}\, \underline{H}}_{0} - \Delta \underline{H} = \mathrm{rot\,rot}\, \underline{H} = \sigma\, \mathrm{rot}\, \underline{E} = i\omega\sigma \underline{B}$$

$$\boxed{-\Delta \underline{H} = i\omega\sigma\mu \underline{H}}$$

Skin effektus



$$\underline{H}(z) = \underline{H}_0 \, e^{ikz}$$

$$\Delta \underline{H} = -i\omega\mu\sigma \underline{H}$$

$$\delta := \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$ behatolási mélység

$$-k^2 = -i\omega\mu\sigma = -\omega\mu\sigma \, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$k = \pm\sqrt{\omega\mu\sigma}\, e^{i\pi/4} = \pm\sqrt{\omega\mu\sigma}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{i+1}{\delta}$$

$$\underline{H} = \underline{H}_0 \, e^{\frac{i-1}{\delta} z}$$ lecsengő megoldás

---

Forrásmentes, homogén szigetelőben terjedő
EM síkhullámok

$$\text{rot}\,\underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = -i\omega \underline{D} \qquad \text{div}\,\underline{B} = 0 \qquad \underline{B} = \mu \underline{H} \qquad \text{Im}(\mu) \approx 0, \; \text{Re}\,\mu \approx \mu_0$$

$$\text{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = i\omega \underline{B} \qquad \text{div}\,\underline{D} = 0 \qquad \underline{D} = \varepsilon(\omega)\underline{E} \qquad \varepsilon(\omega) \text{ komplex}$$

anyagi egyenletek

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\underline{H} = (\overbrace{\text{grad}\,\text{div}}^{=0 \text{ mert } \text{div}\underline{B} = \mu\,\text{div}\underline{H} = 0} - \Delta)\,\underline{H} = -i\omega\,\text{rot}\,\underline{D} = -i\omega\,\varepsilon(\omega)\, i\omega \underline{B} = \varepsilon(\omega)\mu\omega^2 \underline{H}$$

$$-\Delta \underline{H} = \varepsilon(\omega)\,\mu\,\omega^2 \underline{H}$$

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\underline{E} = (\overbrace{\text{grad}\,\text{div}}^{0} - \Delta)\,\underline{E} = i\omega\mu\,\text{rot}\,\underline{H} = i\omega\mu(-i\omega)\,\varepsilon(\omega)\,\underline{E} = \mu\,\varepsilon(\omega)\,\omega^2 \underline{E}$$

$$-\Delta \underline{E} = \varepsilon(\omega)\,\mu\,\omega^2 \underline{H} \qquad \underline{E} = \underline{E}_0 \, e^{i(k\underline{n}\underline{x} - \omega t)}$$

$$\underline{H} = \underline{H}_0 \cdot e^{i(k\underline{n}\underline{x} - \omega t)} \Rightarrow \boxed{\varepsilon \cdot \mu \cdot \omega^2 = k^2} \qquad \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \text{ kicsi} \qquad k = k' + ik''$$

valós

$$\varepsilon' \cdot \mu \cdot \omega^2 = k'^2 - \underset{\approx 0}{k''^2}$$

képzetes

$$\varepsilon'' \mu \omega^2 = 2k'k''$$

$$v_f = \frac{\omega}{k'} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'\mu}}$$

a törésmutató $n = \frac{c}{v_f} = \frac{1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{v_f} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_r}$ $\quad \mu \approx \mu_0$

$$\frac{k''}{k'} = \frac{\varepsilon'' \mu \omega^2}{2 \cdot k'^2} = \frac{1}{2} \varepsilon'' \mu v_f^2 = \frac{1}{2} \varepsilon'' \mu \frac{1}{\varepsilon' \mu} = \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}$$

$$\mathrm{div}\, \underline{D} = 0 = \mathrm{div}\, \underline{E} \qquad k \underline{n}\, \underline{E}_0 = 0 \Rightarrow \underline{n} \perp \underline{E}_0$$

$$\mathrm{div}\, \underline{B} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\, \underline{H} = 0 \quad k \underline{n}\, \underline{H}_0 = 0 \Rightarrow \underline{n} \perp \underline{H}_0$$

$$\mathrm{rot}\, \underline{E} = i\omega \underline{B} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \underline{\nabla} \times \underline{E} = \underbrace{\frac{1}{i\omega\mu} \underline{n} \times \underline{E}_0 \cdot i k}_{\underline{H}_0} \cdot e^{i(k\underline{n}\underline{x} - \omega t)}$$

$$\underline{H}_0 = \underline{n} \times \underline{E}_0 \frac{k}{\omega\mu} \Rightarrow \boxed{\underline{H}_0 \perp \underline{E}_0 \perp \underline{n} \perp \underline{H}_0}$$

$\ln(1+x) \approx x$ ha $x \ll 1$

$k''/k' \ll 1$.

$$H_0 = E_0 \frac{k}{\omega\mu} = \frac{k' + ik''}{\omega\mu} E_0 = \frac{k'}{\omega\mu}\left(1 + i\frac{k''}{k'}\right) E_0 = \frac{k'}{\omega\mu} e^{i\frac{k''}{k'}} E_0$$

$$k' = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}$$

$$\boxed{H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}\, E_0\, e^{i\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}}} = v_f \cdot \varepsilon\, E_0\, e^{i\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}}$$

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} |\underline{E}_0|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}\, e^{i\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}}\, \underline{n} = \frac{1}{2} \overbrace{v_f \cdot \varepsilon' |\underline{E}_0|^2}^{\text{energiaáram}} e^{i\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}} \cdot \underline{n}$$

$$w = \frac{1}{4}\left(\underline{E}\,\underline{D}^* + \underline{B}\,\underline{H}^*\right) = \frac{1}{4} \varepsilon' |\underline{E}_0|^2 + \frac{1}{4} \mu \cdot \left(\frac{\varepsilon'}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}\cdot 2} \cdot |\underline{E}_0|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon' |\underline{E}_0|^2$$

az energiaáramlás sebessége: $\underline{v}_W = \dfrac{\mathrm{Re}\, \underline{S}}{W} = v_f \cos\left(\dfrac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right) \cdot \underline{n} \qquad \varepsilon'' \ll \varepsilon'$

$$\underline{v}_W \approx v_f \cdot \underline{n}$$

Hullámcsomag

$c(k')$ komplex amplitudó, $c(k') = |c(k')|\, e^{i\delta(k')}$

$$f(\underline{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k')\, e^{i[(k'+ik'')\underline{n}\underline{x} - \omega t]}\, dk' = \int_{-\infty}^{\infty} |c(k')|\, e^{i[(k'+ik'')\underline{n}\underline{x} - \omega t]}\, dk'$$

csúcsoló: $\frac{d}{dk'}\left[(k'+ik'')\underline{n}\underline{x} - \omega t\right] = 0 \Rightarrow \underline{n}\underline{x} - \frac{d\omega}{dk'}t + \frac{d\delta(k')}{dk'} = 0$

időfüggő tag, csoportsebesség

$v_f = \frac{c}{n(\omega)} \Rightarrow \frac{dv_f}{d\omega} = -\frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\omega}$

$$v_f = \frac{\omega}{k'} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon' \mu}}$$

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{d}{dk}(v_f \cdot k') = v_f + k'\frac{dv_f}{dk'} = v_f + k'\frac{dv_f}{d\omega}\frac{d\omega}{dk'} = v_f + k'\frac{dv_f}{d\omega}v_{cs}$$

$v_f = \frac{c}{n}$

$$v_{cs} = v_f - k'\frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\omega}v_{cs} = v_f - k'\frac{v_f}{n}\frac{dn}{d\omega}v_{cs}$$

- ha $\frac{dn}{d\omega} > 0$ normális diszperzió, ekkor $v_{cs} < v_f$
- ha $\frac{dn}{d\omega} < 0$ anomális diszperzió, ekkor $v_{cs} > v_f$ (ilyen is létezik)

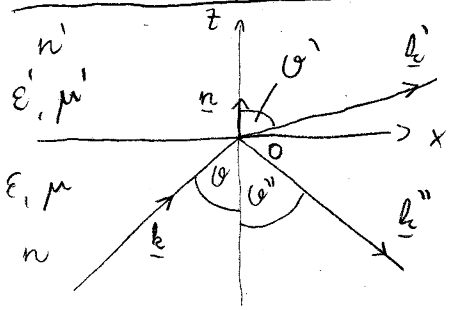
$$\boxed{v_{cs} = \frac{v_f}{1 + k'\frac{v_f}{n}\frac{dn}{d\omega}}}$$

vezetőképesség figyelembe vétele : $0 \neq \underline{j} = \sigma \underline{E}$

$$\text{rot}\,\underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \underline{j} - i\omega\underline{D} = \sigma\underline{E} - i\omega\varepsilon\underline{E} = (\sigma - i\omega\varepsilon)\underline{E} = -i\omega\underbrace{\left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}\right)}_{\varepsilon_{eff}}\underline{E}$$

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon\left(1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)$$ ettől lehet pl képzetes az ε

Fresnel képletek



$$\underline{E}(z>0) = \underline{E}_0' \, e^{i(\underline{k}'\underline{r} - \omega' t)}$$

$$\underline{E}(z<0) = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)} + \underline{E}_0'' \, e^{i(\underline{k}''\underline{r} - \omega'' t)}$$

peremfeltételek:

$\underline{n}\,\underline{D}$ folytonos $\iff$ $\underline{n}\left[\varepsilon' \underline{E}(z=+0) - \varepsilon \underline{E}(z=-0)\right] = 0$

$\underline{n}\,\underline{B}$ folytonos $\iff$ $\underline{n}\left[\mu' \underline{H}(z=0^+) - \mu \underline{H}(z=0^-)\right] = 0$

$\underline{n}\times\underline{E}$ folytonos $\iff$ $\underline{n}\times\left[\underline{E}(z=+0) - \underline{E}(z=-0)\right] = 0$

$\underline{n}\times\underline{H}$ folytonos $\iff$ $\underline{n}\times\left[\underline{H}(z=+0) - \underline{H}(z=-0)\right] = 0$

A peremfeltételek felteltt vannak $\underline{E}(\underline{r}, \omega, t)$-re. De

- minden t-re, ha $\underline{r}=0$ fenn kell álljon $\Rightarrow$ $\omega = \omega' = \omega''$
- minden $\underline{r}$-re, ha $t=0$ fenn kell álljon $\Rightarrow$ $\underline{k}\,\underline{r} = \underline{k}'\underline{r} = \underline{k}''\underline{r}$

a határon, ahol $(\underline{r})_z = 0 \Rightarrow \underline{r} = \underline{r}_\perp$

$$k \sin\vartheta = k' \sin\vartheta' = k'' \sin\vartheta''$$

$$k = \frac{\omega n}{c} \Leftarrow \omega = \frac{c}{n} k, \quad \omega = \omega'' \Rightarrow k = k'' \Rightarrow \boxed{\vartheta = \vartheta''}$$

$$\omega = \omega' \Rightarrow \frac{\omega n}{c} \sin\vartheta = \frac{\omega n'}{c} \sin\vartheta'$$

$$\boxed{n \sin\vartheta = n' \sin\vartheta'}$$

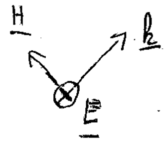
$$\operatorname{rot} \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \longrightarrow i\underline{k}\times\underline{H}_0 = -i\omega\varepsilon\underline{E}_0$$

$$\underline{E}_0 = -\frac{1}{\omega\varepsilon}\underline{k}\times\underline{H}_0 = -\frac{k}{\omega\varepsilon}\hat{\underline{k}}\times\underline{H}_0 = -\frac{1}{v_f\cdot\varepsilon}\hat{\underline{k}}\times\underline{H}_0 \qquad \hat{\underline{k}} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \qquad i\underline{k}\times\underline{E}_0 = i\omega\underline{B}_0 = i\omega\mu\underline{H}_0$$

$$\underline{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu}\underline{k}\times\underline{E}_0 = \frac{k}{\omega\mu}\hat{\underline{k}}\times\underline{E}_0 = \frac{1}{v_f\cdot\mu}\hat{\underline{k}}\times\underline{E}_0$$

Fresnel képlet speciális esete: síkra merőleges polarizáció (ábra síkjára ⊥)



$$\underline{E}_0 \underline{n} = 0 \Rightarrow \underline{E}_0' \underline{n} = \underline{E}_0'' \underline{n} = 0$$

$\underline{n}+\underline{E}$ folyt $\Rightarrow$ $\underline{E}_0 + \underline{E}_0'' = \underline{E}_0'$

$\underline{n}+\underline{H}$ folyt $\Rightarrow$ $\underline{n} \times \left[\frac{1}{\mu v_f}\left(\hat{\underline{l}} \times \underline{E}_0 + \hat{\underline{l}}'' \times \underline{E}_0''\right) - \frac{1}{\mu' v_f'} \hat{\underline{l}}' \times \underline{E}_0'\right] = 0$

$$\frac{1}{\mu v_f}\left[\underline{n}\times\left(\hat{\underline{l}} \times \underline{E}_0\right) + \underline{n}\times\left(\hat{\underline{l}}'' \times \underline{E}_0''\right)\right] = \frac{1}{\mu' v_f'} \underline{n}\times\left(\hat{\underline{l}}' \times \underline{E}_0'\right)$$

$$\frac{1}{\mu v_f}\left[\hat{\underline{l}} \underbrace{(\underline{n}\,\underline{E}_0)}_{0} - \underline{E}_0 \underbrace{(\hat{\underline{l}}\,\underline{n})}_{\cos\vartheta} + \hat{\underline{l}}'' \underbrace{(\underline{n}\,\underline{E}_0'')}_{0} - \underline{E}_0'' \underbrace{(\underline{n}\,\hat{\underline{l}}'')}_{-\cos\vartheta}\right] = \frac{1}{\mu' v_f'}\left[\hat{\underline{l}}' \underbrace{(\underline{n}\,\underline{E}_0')}_{0} - \underline{E}_0' \underbrace{(\underline{n}\,\hat{\underline{l}}')}_{\cos\vartheta'}\right]$$

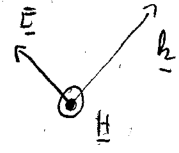
$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$$\frac{1}{\mu v_f}\left(\underline{E}_0'' - \underline{E}_0\right)\cos\vartheta = \frac{-1}{\mu' v_f'} \cos\vartheta' \, \underline{E}_0' \qquad \underline{E}_0'' + \underline{E}_0 = \underline{E}_0'$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\underline{E}_0'' - \underline{E}_0\right)\cos\vartheta = -\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\left(\underline{E}_0'' + \underline{E}_0\right)\cos\vartheta' \quad \Bigg| \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\underline{E}_0' - \underline{E}_0 - \underline{E}_0\right)\cos\vartheta = -\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta' \, \underline{E}_0'$$

$$\boxed{\underline{E}_0'' = \frac{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - \cos\vartheta'\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}}{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + \cos\vartheta'\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}}\,\underline{E}_0} \qquad \boxed{\underline{E}_0' = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta'}\,\underline{E}_0}$$

Fresnel képlet speciális esete: síkkal párhuzamos polarizáció



$\underline{E}$ és $\underline{H}$ felcserélésével az előzőt visszakapjuk, tehát ugyanazokat kapjuk, csak most $\underline{H}$-ra:

$$\underline{H}_0'' = \frac{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} - \cos\vartheta'\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}}}{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + \cos\vartheta'\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}}}\,\underline{H}_0 \qquad \underline{H}_0' = \frac{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} - \cos\vartheta'\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}}}{\cos\vartheta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + \cos\vartheta'\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}}}\,\underline{H}_0$$

Brewster szög: síkkal párhuzamos polarizáció esetén létezik olyan ϑ, hogy nincs visszavert hullám, azaz $\underline{H}''=0 \Leftrightarrow \cos\vartheta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\cos\vartheta'\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}}$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\cos\vartheta}{n}=\frac{\cos\vartheta'}{n'} \quad /\cdot\ n\sin\vartheta=n'\sin\vartheta'$$

$$\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta=\sin\vartheta'\cos\vartheta' \Rightarrow \sin 2\vartheta=\sin 2\vartheta'$$

$$\Downarrow$$

$$2\vartheta+2\vartheta'=n\pi \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\vartheta'=\frac{\pi}{2}-\vartheta \qquad n=1 \text{ mert } \vartheta\le 90^\circ$$

$$n\sin\vartheta=n'\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)}^{\cos\vartheta}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{n'}{n}$$

Teljes visszaverődés: léteznek olyan paraméterek, hogy nincsen törő, csak visszaverődő hullámok, mindkét esetben. A hullám behatol, $\underline{E}_0'\neq 0$ de lecseng.

$$n\sin\vartheta=n'\sin\vartheta'=n'\sqrt{1-\cos^2\vartheta'}$$

$$\cos\vartheta'=\sqrt{1-\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\vartheta} \qquad \text{ha } \frac{n\sin\vartheta}{n'}>1, \text{ akkor képzetes lesz } \cos\vartheta$$

$$\cos\vartheta'=i\sqrt{\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\vartheta-1}$$

$$e^{i\underline{k}'\underline{r}}=e^{ik'\sin\vartheta'x}\cdot e^{ik'\sqrt{\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\vartheta-1}\cdot z} \qquad \left(\underline{E}=\underline{E}_0\,e^{i(\underline{k}'\underline{r}-\omega t)}\right)$$

$$\underline{k}'=k'\begin{pmatrix}\sin\vartheta'\\0\\\cos\vartheta'\end{pmatrix} \qquad \underline{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

behatolási mélység $\left(A=\frac{A_0}{e}\right)$: $\delta=\dfrac{1}{k'\sqrt{\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\vartheta-1}}$

Kirchhoff-féle elhajlási elmélet

Skalár elmélet, polarizációval nem foglalkozik. ψ valamelyik potenciál, régebben f.

$\Box \psi(\underline{x},t) = 0$ megoldás keresés $\psi(\underline{x},t) = \psi_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t}$

$$\boxed{\Delta \psi_\omega(\underline{x}) + k^2 \psi_\omega(\underline{x}) = 0}$$ Helmholtz egyenlet, $k = \frac{\omega}{v_f}$

$\Box G(\underline{x},t,\underline{x}',t') = \delta(\underline{x}-\underline{x}')\,\delta(t-t')$ A probléma Green függvénye.

A Green függvény Fourier transzformáltja: $G(\underline{x},t,\underline{x}',t') = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, G_\omega(\underline{x},\underline{x}')\, e^{-i\omega(t-t')}$ $\Big\downarrow \Box$

$$\Box G(\underline{x},t,\underline{x}',t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\left(-k^2-\Delta\right) G_\omega(\underline{x},\underline{x}')}_{=}\, e^{-i\omega(t-t')}$$

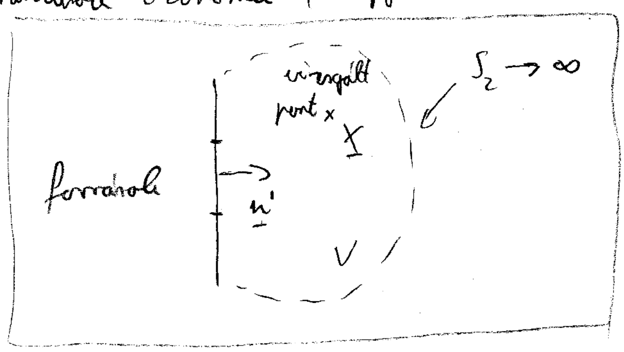
$$\|$$

$$\delta(\underline{x}-\underline{x}')\,\delta(t-t') = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \overbrace{\delta(\underline{x}-\underline{x}')}\, e^{-i\omega(t-t')}$$

Fourier transzformációs előállítása

Az egyenlőségből következik, hogy az integrandusok azonosak, vagyis

$$\boxed{\left(k^2+\Delta\right) G_\omega(\underline{x},\underline{x}') = -\delta(\underline{x}-\underline{x}')}$$



Green-tétel: $\int_V \left(f\,\Delta' g - g\,\Delta' f\right) d^3x' = \oint_{S_1+S_2} \left(f\,\nabla' g - g\,\nabla' f\right) d\underline{F}'$

Ezt használva, helyettesítsük be: $f(\underline{x}') = \psi_\omega(\underline{x}')$ és $g(\underline{x}') = G_\omega(\underline{x},\underline{x}')$

$$\int_V d^3x' \Big(\psi_\omega(\underline{x}') \underbrace{\Delta' G_\omega(\underline{x},\underline{x}')}_{-\delta(\underline{x}-\underline{x}') - k^2 G_\omega(\underline{x},\underline{x}')} - G_\omega(\underline{x},\underline{x}') \underbrace{\Delta \psi_\omega(\underline{x}')}_{-k^2\psi_\omega(\underline{x}')} \Big) =$$

$$= \int_V d^3x' \Big(-\psi_\omega(\underline{x}')\delta(\underline{x}-\underline{x}') - \psi_\omega(\underline{x}')\, k^2 G_\omega(\underline{x},\underline{x}') + G_\omega(\underline{x},\underline{x}')\, k^2 \psi_\omega(\underline{x}') \Big) =$$

$$= -\int_V d^3x'\, \psi_\omega(\underline{x}')\, \delta(\underline{x}-\underline{x}') = -\psi_\omega(\underline{x})$$

$$\boxed{\Psi_\omega(\underline{x}) = \oint_{S_1+S_2} dF'\, \underline{n}' \left(\Psi_\omega(\underline{x}')\, \underline{\nabla}' G_\omega - G_\omega \underline{\nabla}' \Psi_\omega(\underline{x}')\right)} \qquad G_\omega = G_\omega(\underline{x}, \underline{x}')$$

befele mutat, ezért tűnik el az előjel

$\underline{R} := \underline{x} - \underline{x}'$

$R := |\underline{x} - \underline{x}'|$

- Kirchoff azt mondta, számoljuk G_ω-t a szabad térből!

$$G^{(\infty)}(\underline{x}, t, \underline{x}', t) = \frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|}\, \delta\left(t - t' - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{v_f}\right) =: \frac{1}{4\pi R}\, \delta\left(t - t' - \frac{R}{v_f}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi R} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega\left(t - t' - \frac{R}{v_f}\right)} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \underbrace{\frac{e^{ikR}}{4\pi R}}\, e^{-i\omega(t - t')}$$

$$\boxed{G_\omega^{(\infty)}(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}}$$

$$\underline{\nabla}' G_\omega^{(\infty)}(\underline{x}, \underline{x}') = \left(ik - \frac{1}{R}\right) \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\, \underline{\nabla}' R \qquad \underline{\nabla}' |\underline{x} - \underline{x}'| = -\frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = -\frac{\underline{R}}{R} := -\hat{\underline{R}}$$

állítás: S_2-re vett rész $\to 0$

$$\boxed{\Psi_\omega^{k}(\underline{x}) = -\int_{S_1} dF'\, \underline{n}' \left(\Psi_\omega(\underline{x}') \left(ik - \frac{1}{R}\right) + \underline{\nabla}' \Psi_\omega(\underline{x}')\right) \cdot \frac{e^{ikR}}{4\pi R}}$$

Kirchoff

Ez $\Psi_\omega(\underline{x})$ csak úgy tudná kiszámítani, ha $\Psi_\omega(\underline{x}')$ és $\underline{\nabla}\Psi_\omega(\underline{x}')$ is adva lenne, pedig csak egyikre írhatunk elő feltételt.

- Dirichlet azt mondta, $G_\omega^{D}(\underline{x}, \underline{x}') = 0$ ha $\underline{x}' \in S_1$ $\qquad \underline{n}' \underline{\nabla}' = \frac{\partial}{\partial n'}$

$$\boxed{\Psi_\omega^{D}(\underline{x}) = \int_{S_1} dF'\, \Psi_\omega(\underline{x}')\, \frac{\partial G_\omega^{D}(\underline{x}, \underline{x}')}{\partial n}}$$

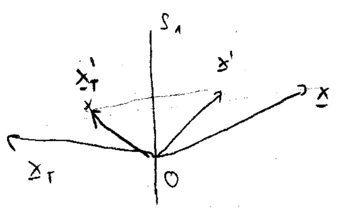
S_2-n most is eltűnik

- Neumann azt mondta, $\frac{\partial G_\omega^{N}(\underline{x}, \underline{x}')}{\partial n'} = 0$ ha $\underline{x}' \in S_1$

$$\boxed{\Psi_\omega^{N}(\underline{x}) = -\int_{S_1} dF'\, \frac{\partial \Psi_\omega^{N}(\underline{x}')}{\partial n}\, G_\omega^{N}(\underline{x}, \underline{x}')}$$

Ezekben az esetekben hogyan adjuk meg $G_\omega^{N,D}(\underline{x}, \underline{x}')$-t, ha nem a szabad térből?

Tükörtöltések módszerével állítjuk elő.



$\underline{x}'$ befutja a belső teret

$R = |\underline{x} - \underline{x}'|$

$R_T := |\underline{x} - \underline{x}'_T| = |\underline{x}_T - \underline{x}'|$

Állítás: $G_\omega^{D,N}(\underline{x},\underline{x}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{ikR}}{R} \mp \frac{e^{ikR_T}}{R_T}\right)$ pont kielégíti a $\underset{(-)}{D}$ és $\underset{(+)}{N}$ feltételeket

Ha $\underline{x}' \in S_1$, $\underline{x}' = \underline{x}'_T \Rightarrow \boxed{R = R_T}$, akkor

$$G_\omega^D(\underline{x},\underline{x}') = 0 \checkmark \quad \boxed{G_\omega^N(\underline{x},\underline{x}') = \frac{2}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}} \quad (x \in S_1)$$

$$\frac{\partial G_\omega^{D,N}}{\partial n'} = \underline{n}'\underline{\nabla}' G_\omega^{D,N} = \underline{n}\,\frac{1}{4\pi}\left[\left(ik - \frac{1}{R}\right)\frac{e^{ikR}}{R}(-\hat{\underline{R}}) \mp \left(ik - \frac{1}{R_T}\right)\frac{e^{ikR_T}}{R_T}(-\hat{\underline{R}}_T)\right]$$

$$\underline{n}\,\hat{\underline{R}} = -\underline{n}\,\hat{\underline{R}}_T$$

$$\frac{\partial G_\omega^{D,N}}{\partial n'} = \frac{-1}{4\pi}\left[\left(ik - \frac{1}{R}\right)e^{ikR} \pm \left(ik - \frac{1}{R_T}\right)e^{ikR_T}\right]\underline{n}\,\hat{\underline{R}}$$

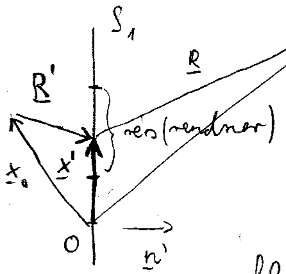
$$\boxed{\frac{\partial G_\omega^D}{\partial n'}(\underline{x},\underline{x}' \in S_1) = \frac{-2}{4\pi}\left(ik - \frac{1}{R}\right)\frac{e^{ikR}}{R}\,\underline{n}\,\hat{\underline{R}}}$$

$\frac{\partial G_\omega^N}{\partial n'}(\underline{x},\underline{x}' \in S_1) = 0$ ✓ (kielégíti az előírt Neumann peremfeltételt)

Ekkor a megoldások:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_\omega^D(\underline{x}) &= \int_{S_1} dF\, \psi_\omega^0(\underline{x}')\, \frac{-1}{2\pi}\left(ik - \frac{1}{R}\right)\frac{e^{ikR}}{R}\,\underline{n}\,\hat{\underline{R}} \\ \psi_\omega^N(\underline{x}) &= \int_{S_1} dF\, \frac{\partial \psi_\omega^N}{\partial n'}(\underline{x}')\, \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{ikR}}{R} \end{aligned}}$$

Ez nem foglalkozik azzal, hogy a források milyen ψ-t csinálnak a felületen. A közelítésekben azt nézzük, mikor 1 db pontszerű forrás van $\underline{x}_0$-ban. Megnézzük, milyen ψ-t kelt S_1-en, és kiszámoljuk ψ-t egy $\underline{x}$ helyen. Közelítésekkel és élünk majd.



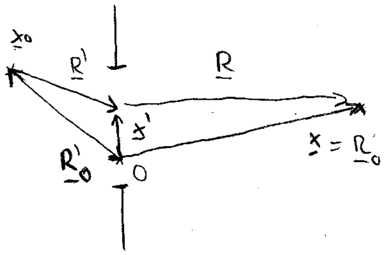
$\underline{R} = \underline{x} - \underline{x}'$ $\qquad$ $\underline{R}' = \underline{x}' - \underline{x}_0$

$$\Psi_\omega(\underline{x}') = A\,\frac{e^{ikR'}}{R'} \Rightarrow \frac{\partial \Psi_\omega}{\partial n'}(\underline{x}') = A\left(ik - \frac{1}{R'}\right) e^{ikR'}\,\hat{\underline{R}}'\,\underline{n}'$$

feltevések: $kR \gg 1$, $\left(ik - \frac{1}{R}\right) = ik\left(1 + \frac{i}{kR}\right) \approx ik$

$$\boxed{\Psi_\omega(\underline{x}) = -\frac{ik}{2\pi} A \int_{rés} \frac{e^{ik(R+R')}}{R\,R'} \cdot f(\vartheta,\vartheta')\,dF \qquad f(\vartheta,\vartheta') = \begin{cases} \underline{n}'\hat{\underline{R}} =: \cos\vartheta & \text{Dirichlet} \\ \underline{n}'\hat{\underline{R}}' =: \cos\vartheta' & \text{Neuman} \\ \dfrac{\cos\vartheta + \cos\vartheta'}{2} & \text{Kirchoff} \end{cases}}$$

Ha a résrendszer egy db rés



$\underline{x}' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\underline{x}'| \ll R, R'$, $\quad R_0 \approx R \qquad R_0' \approx R_0'$

$$\boxed{\Psi_\omega(\underline{x}) = -\frac{ik}{2\pi} A \frac{f(\vartheta,\vartheta')}{R_0 R_0'} \int_{rés} e^{ik(R+R')}\,d\xi\,d\eta}$$

$$R'^2 = (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + z_0^2 = \underbrace{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}_{R_0'^2} + \xi^2 + \eta^2 - 2(x_0\xi + y_0\eta)$$

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 = \overbrace{x^2 + y^2 + z^2}^{R_0^2} + \xi^2 + \eta^2 - 2(x\xi + y\eta)$$

$$R' = R_0'\sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{R_0'^2} - 2\,\frac{x_0\xi + y_0\eta}{R_0'^2}} \qquad R_0^2 \gg \xi^2 + \eta^2,\ \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

legkisebb tag

$$R' \approx R_0'\left(1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0'^2} - \frac{x_0\xi + y_0\eta}{R_0'^2} + \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2R_0'^4}\right)$$

$$R \approx R_0\left(1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0^2} - \frac{x\xi + y\eta}{R_0^2} + \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R_0^4}\right)$$

Spec eset: közelről, szemből: $x_0 = y_0 = x = y = 0$, $f(\vartheta,\vartheta') \approx 1$ (Fresnel)

$$R' \approx R_0'\left(1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0'^2}\right) \qquad R \approx R_0\left(1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0^2}\right)$$

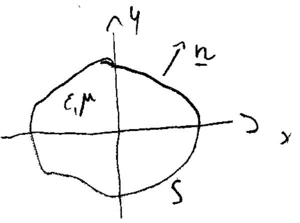
$$\Psi_\omega(\underline{x}) = -\frac{ik}{2\pi}\frac{A}{R_0R_0'}\,e^{ik(R_0 + R_0')}\int_{rés} e^{ik\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\left(\frac{1}{R_0'^2} + \frac{1}{R_0^2}\right)}\,d\xi\,d\eta$$

Spec eset: messziről (Fraunhofer)

$$R \approx R_0\left(1-\frac{x\xi+y\eta}{R_0^2}\right) \qquad R' \approx R_0'\left(1-\frac{x_0\xi+y\eta}{R_0'^2}\right)$$

$$\psi_\omega(\underline{x}) = \frac{-ik}{2\pi} A\, f(\vartheta,\vartheta')\, \frac{e^{ik(R_0+R_0')}}{R_0 R_0'} \int_{\text{rés}} e^{-ik\left(\xi\left(\frac{x}{R_0}+\frac{x_0}{R_0'}\right)+\eta\left(\frac{y}{R_0}+\frac{y_0}{R_0'}\right)\right)} d\xi\, d\eta$$

Állandó keresztmetszetű hullámvezető



$$\underline{E}(\underline{x},t) = \underline{E}(x,y)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\underline{E} = \underline{E}_\ell + \underline{E}_t = E_\ell\, \underline{e}_z + \underline{E}_t$$

longi. transz.

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_z \partial_z + \underline{\nabla}_t = ik\, \underline{e}_z + \underline{\nabla}_t$$

$$0 = \Box \underline{E} = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} + \Delta\right)\underline{E} = \left(\varepsilon\mu(-i\omega)^2 + k^2 + \Delta_T\right)\underline{E} \qquad \boxed{\gamma^2 := \varepsilon\mu\omega^2 - k^2}$$

$$\boxed{\Delta_T\, \underline{E} = -\gamma^2\, \underline{E}}$$ $\underline{B}$-re ugyanez

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = i\omega\underline{B} \qquad (\nabla\underline{B}=0\ \checkmark)$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\cdot\mu\varepsilon = -i\omega\mu\varepsilon\,\underline{E} \qquad (\nabla\underline{E}=0\ \checkmark \text{ forrásmentes})$$

$\underline{e}_z\times\underline{e}_z = 0$ $\qquad \underbrace{\underline{\nabla}_t E_\ell \times \underline{e}_z}$ $\Rightarrow (x,y)$ síkban

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = (ik\,\underline{e}_z + \underline{\nabla}_t)\times(E_\ell\,\underline{e}_z + \underline{E}_t) = \underbrace{ik\,\underline{e}_z\times\underline{E}_t}_{(x,y)\text{ síkban}} + \underline{\nabla}_t\times(E_\ell\,\underline{e}_z) + \underbrace{\underline{\nabla}_t\times\underline{E}_t}_{\text{tengely irányú}}$$

1. $(\underline{\nabla}\times\underline{E})_\ell = \underline{\nabla}_t\times\underline{E}_t = (i\omega\,\underline{B})_\ell = i\omega\,\underline{B}_\ell$
2. $(\underline{\nabla}\times\underline{E})_t = ik\,\underline{e}_z\times\underline{E}_t + \underline{\nabla}_t E_\ell \times\underline{e}_z = (i\omega\underline{B})_t = i\omega\,\underline{B}_t$
3. $(\underline{\nabla}\times\underline{B})_\ell = \underline{\nabla}_t\times\underline{B}_t = -i\omega\mu\varepsilon\,\underline{E}_\ell$
4. $(\underline{\nabla}\times\underline{B})_t = ik\,\underline{e}_z\times\underline{B}_t + \underline{\nabla}_t B_\ell\times\underline{e}_z = -i\omega\mu\varepsilon\,\underline{E}_t$

longitudinális

transzverzális

Adjuk meg $\underline{E}_t$ és $\underline{B}_t$ értékeit E_ℓ és B_ℓ-lel kifejezve!

2-ből $\underline{B}_t$-t írjuk 4-be, $\cdot(i\omega)$ (x,y) síkban

$$-(i\omega)^2\mu\varepsilon\underline{E}_t = (ik)^2 \underbrace{\underline{e}_z\times(\underline{e}_z\times\underline{E}_t)}_{} + ik\,\underline{e}_z\times(\underline{\nabla}_t E_\ell\times\underline{e}_z) + \underline{\nabla}_t B_\ell\times\underline{e}_z\cdot i\omega$$

$$-1 = \underline{e}_z\underbrace{(\underline{e}_z\underline{E}_t)}_{0} - \underline{E}_t\underbrace{\underline{e}_z\underline{e}_z}_{1}$$

$$\omega^2\mu\varepsilon\underline{E}_t = k^2\underline{E}_t + ik\,\underline{\nabla}_t E_\ell + i\omega\,\underline{\nabla}_t B_\ell\times\underline{e}_z \qquad \omega^2\mu\varepsilon - k^2 = \gamma^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{E}_t &= \frac{1}{\gamma^2}\left(ik\,\underline{\nabla}_t E_\ell + i\omega\,\underline{\nabla}_t B_\ell\times\underline{e}_z\right)\\ \underline{B}_t &= \frac{1}{\gamma^2}\left(ik\,\underline{\nabla}_t B_\ell + i\omega\mu\varepsilon\,\underline{\nabla}_t E_\ell\times\underline{e}_z\right)\end{aligned}}$$

hasonlóképp

Határfeltételek: S-en $\underline{E}$ tangenciális (nem transz.!) komponense 0: $\underline{n}_t\times\underline{E}=0$, $\underline{n}_t\cdot\underline{B}=0$

E-re vonatkozóhoz kell (de nem elég) ha $\underline{e}_z\times\underline{E}_t=0 \Rightarrow E_\ell=0$

$\underline{B}$-re szintén kell, hogy $\underline{n}_t\cdot\underline{B}_t=0$ legyen, $\underline{B}_t = \frac{1}{\gamma^2}ik\,\underline{\nabla}_t B_\ell$ $(E_\ell=0)$

$$\underline{n}_t\underline{B}_t = \frac{ik}{\gamma^2}\underline{n}_t\underline{\nabla}_t B_\ell = \frac{ik}{\gamma^2}\frac{\partial B_\ell}{\partial n_t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_\ell}{\partial n_t}=0$$

Kétféle módus lineárkombinációjaként előáll az ált. megoldás:

I: TM hullámok : $E_\ell = \Psi$, $B_\ell = 0$

$\Delta_T\Psi = -\gamma^2\Psi$, S-en $\Psi=0$ (ekkor $\Delta_T\underline{E} = -\gamma^2\underline{E}$ kielégül, ha $\underline{E}_t$ a fenti.)

II: TE hullámok : $B_\ell = \Psi$, $E_\ell = 0$

$\Delta_T\Psi = -\gamma^2\Psi$, S-en $\frac{\partial\Psi}{\partial n_t}=0$ ($\underline{B}_t$ a fenti)

A diszperziós reláció: $\mathbb{R}^+\ni\boxed{\gamma^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - k^2}$

$$0 = \varepsilon\mu\,2\omega\,d\omega - 2k\,dk$$

$$1 = \varepsilon\mu\frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk} \Rightarrow \boxed{c^2 = v_{cs}\cdot v_f}$$

Energiaáramlás a hullámvezetőben

$$S_z = \frac{1}{2}\left(\underline{E}\times\underline{H}^*\right)_z = \frac{1}{2}\left(\underline{E}_T\times\underline{H}_T^*\right)_z$$

TM módust számoljuk: $\underline{E}_t = \frac{ih}{\gamma^2}\nabla_t\psi$, $\underline{E}_\ell = \psi$

$$\underline{H}_t = \frac{i\omega\varepsilon}{\gamma^2}\,\underline{e}_z\times\underline{\nabla}_t\psi \qquad \underline{H}_\ell = 0$$

$$S_z = \frac{1}{2}\frac{\omega\varepsilon h}{\gamma^4}\left(\nabla_t\psi\times\left(e_z\times\underline{\nabla}_t\psi^*\right)\right)_z = \frac{1}{2}\frac{\omega\varepsilon h}{\gamma^4}\left|\underline{\nabla}_t\psi\right|^2$$

$$\underline{\nabla}_t\psi\,\underline{e}_z = 0$$

Teljesítményáram (a felületre jutó teljesítmény)

$$P = \int_F S_z\,dF = \frac{\varepsilon\omega h}{2\gamma^4}\int_F\left(\underline{\nabla}_t\psi\right)\left(\underline{\nabla}_t\psi^*\right)dF = \frac{\varepsilon\omega h}{2\gamma^4}\int_F \underbrace{\nabla\left(\psi^*\underline{\nabla}\psi\right)}_{\int_s \psi^*\underline{n}\underline{\nabla}\psi\,ds\,=\,\int_s\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial n_t}ds} - \psi^*\overbrace{\Delta\psi}^{-\gamma^2\psi}\,dF =$$

TM-ben 0 TE-ben 0

$$= \boxed{\frac{\varepsilon\omega h}{2\gamma^2}\int_F|\psi|^2dF = P}$$

TE móduma: $P = \frac{\omega h}{2\mu\gamma^2}\int_F|\psi|^2dF$

Egységnyi hosszra jutó energia

$$U = \int w\,dF = \frac{1}{4}\varepsilon\left[\int|\psi|^2dF + \frac{h^2+\mu\omega^2\varepsilon}{\gamma^4}\overbrace{\int\left|\underline{\nabla}_t\psi\right|^2dF}^{\gamma^2\int|\psi|^2dF}\right] = \frac{1}{4}\varepsilon\left(\frac{\gamma^2}{\gamma^2}+\frac{h^2+\mu\omega^2\varepsilon}{\gamma^2}\right)\int|\psi|^2dF$$

$$w = \frac{1}{4}\left(\varepsilon|E|^2+\mu|H|^2\right) = \frac{1}{4}\left[\varepsilon\left(|E_\ell|^2+|E_t|^2\right)+\mu\left(|H_\ell|^2+|H_t|^2\right)\right]$$

TE-ben 0 TM-ben 0

$\underline{H}_t = \frac{i\omega\varepsilon}{\gamma^2}\underline{e}_z\times\underline{\nabla}_t\psi$

$|\underline{H}_t|^2 = \frac{\omega^2\varepsilon^2}{\gamma^4}\left|\underline{\nabla}_t\psi\right|^2$

$$w = \frac{1}{4}\varepsilon\left(|\psi|^2+\frac{h^2}{\gamma^4}\left|\underline{\nabla}_t\psi\right|^2+\mu\frac{\omega^2\varepsilon}{\gamma^4}\left|\underline{\nabla}_t\psi\right|^2\right)$$

$\underline{E}_t = \frac{ih}{\gamma^2}\underline{\nabla}_t\psi$

$\gamma = \mu\varepsilon\omega^2 - h^2$

$$\boxed{U = \cancel{\frac{1}{4}}\frac{\cancel{2}\varepsilon^2\mu\omega^2}{2\gamma^2}\int|\psi|^2dF}$$

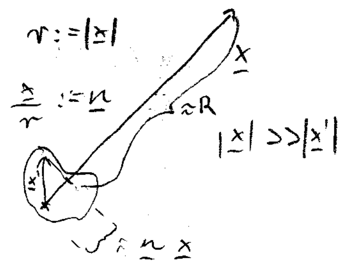
TE-re: $U = \frac{\varepsilon\omega^2}{2\gamma^2}\int|\psi|^2dF$

Energiaterjedés sebessége

$$\frac{P\cdot t}{U\cdot l} = 1 \qquad \left[\boxed{\frac{P}{U} = v_E} = \frac{\frac{\varepsilon\omega k}{2\gamma^2}\int_F |\psi|^2 dF}{\frac{\varepsilon^2\omega^2\mu}{2\gamma^2}\int_F |\psi|^2 dF} = \frac{k}{\omega\mu\varepsilon} = \frac{c^2}{v_f} = v_{cs}\right]$$

TE-re ugyanígy: $\frac{P}{E} = v_{cs}$

Sugárzások multipól sorfejtése



$\Box \underline{A} = \mu_0 \underline{j}$ Milyen $\underline{E}$ és $\underline{B}$ távol a forrásoktól?

$\Box \phi = \frac{1}{\varepsilon}\rho$ Oldjuk meg először $\underline{A}$-ra ($\to \underline{B} \to \underline{E}$)

$|\underline{x} - \underline{x}'| = R$

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\underline{j}\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x' \qquad \underline{j}(\underline{x},t) = \underline{j}(\underline{x})\, e^{-i\omega t}$$

$R \approx r - \underline{n}\,\underline{x}$

$$\underline{A}(\underline{x},t) = e^{-i\omega t} \overbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\underline{j}(\underline{x})\, e^{i|\underline{x}-\underline{x}'|\omega/c}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x'}^{\underline{A}(\underline{x})} := e^{-i\omega t}\, \underline{A}(\underline{x})$$

közelítések $r \gg \lambda = \frac{2\pi}{k} \gg r' = |\underline{x}'| \Rightarrow \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \approx \frac{1}{r}$, $e^{|\underline{x}-\underline{x}'|} \approx e^{r - \underline{n}\,\underline{x}}$

$$\underline{A}(\underline{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_V e^{-i\underline{n}\,\underline{x}' k}\cdot \underline{j}(\underline{x}')\, d^3x'$$

$$e^{-i\underline{n}\underline{x}'k} \approx 1 + (-i\underline{n}\,\underline{x}' k) + \frac{1}{2}(ik)^2(\underline{n}\,\underline{x}')^2 = 1 - i\underline{n}\,\underline{x}' k - \frac{1}{2}k^2(\underline{n}\,\underline{x}')^2 \approx 1 - i\underline{n}\,\underline{x}' k$$

$\underline{A}(\underline{x}) \approx \underline{A}_0(\underline{x}) + \underline{A}_1(\underline{x})$ nullad és elsőrendű tagok

nulladrendű

$$\underline{A}_0(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_V \underline{j}(\underline{x}')\, d^3x'$$

$$j_k(\underline{x}) = j_l\, \partial'_l x'_k = \underbrace{\partial'_l j_l x_k}_{\text{integrálja Gauss-sal felületi lesz, } F\to\infty,\ \int\to 0} - x'_k \underbrace{\partial'_l j_l}_{\text{div}\,\underline{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = i\omega\rho}$$

$$\underline{A}_0(\underline{x}) = \frac{-\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\int_V \underline{x}'\, i\omega\,\rho(\underline{x}')\, d^3x'}_{:= \underline{p}\, i\omega}$$

$$\underline{A}_0(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\cdot \underline{p}\, i\omega$$

$$\underline{B}_0(\underline{x}) = \underline{\nabla}\times\underline{A}_0(\underline{x}) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\omega\, \underline{\nabla}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\times\underline{p} \approx -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\omega\frac{ik}{r}e^{ikr}\, \underline{n}\times\underline{p}$$

$$\underline{B}_0(\underline{x}) = \frac{\mu_0 k}{4\pi}\omega\frac{e^{ikr}}{r}\, \underline{n}\times\underline{p}$$

$\underline{E}_0$-t kiszámolhatnánk: $\underline{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\phi$ -ből, de inkább Maxwellel:

$$\underline{\nabla}\times\underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \qquad \underline{j} \text{ a vizsgált helyen } 0$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = -\mu\varepsilon\, i\omega\, \underline{E} = ik\,\underline{n}\times\underline{B} \qquad \omega = ck\,,\ \mu\varepsilon = \frac{1}{c^2}$$

$$\underline{E} = -c\, \underline{n}\times\underline{B}$$

$$\underline{E}_0 = -c\frac{\mu_0 k}{4\pi}\omega\frac{e^{ikr}}{r}\, n\times(\underline{n}\times\underline{p}) = -\frac{\omega^2\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,\underline{n}(\underline{n}\times\underline{p})$$

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{E}\times\underline{H}^* = -\frac{c}{2\mu_0}(\underline{n}\times\underline{B})\times\underline{B}^* = \frac{c}{2\mu_0}\,\underline{B}^*\times(\underline{n}\times\underline{B}) = \frac{c}{2\mu_0}\Big(\underline{n}(\underline{B}\,\underline{B}^*) - \underline{B}\underbrace{(\underline{n}\,\underline{B}^*)}_{0}\Big) =$$

$$= \frac{c}{2\mu_0}\left|\frac{\mu_0 k}{4\pi}\omega\frac{e^{ikr}}{r}\right|^2 \underline{n}\cdot\Big|\underbrace{(\underline{n}\times\underline{p})}_{=p\sin\vartheta}\Big|^2 = \frac{\omega^4\mu_0}{c\cdot 32\pi^2}\frac{1}{r^2}|p|^2\cos^2\vartheta\ \underline{n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$P = \oint_F \underline{S}\,\underline{n}\,dF = \frac{\omega^4\mu_0}{32\pi^2 c}|p|^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1}\sin^2\vartheta\, d(\cos\vartheta)\, d\varphi = \frac{\omega^4\mu_0}{16\pi c}|p|^2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx =$$

$$\frac{1}{r^2}dF = d\Omega = d(\cos\vartheta)\,d\varphi$$

$$= \frac{\omega^4\mu_0}{16\pi c}|p|^2\,\frac{4}{3}$$

---

elsőrendű

$$\underline{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int(-ik)(\underline{n}\,\underline{x}')\,\underline{j}(\underline{x}')\,d^3x'$$

$$(\underline{n}\,\underline{x}')\,\underline{j}(\underline{x}') = \frac{1}{2}\Big[(\underline{n}\,\underline{x}')\,\underline{j}(\underline{x}') + \underline{x}'(\underline{n}\,\underline{j}(\underline{x}'))\Big] + \overbrace{\frac{1}{2}\Big[(\underline{n}\,\underline{x}')\,\underline{j}(\underline{x}') - \underline{x}'(\underline{n}\,\underline{j}(\underline{x}'))\Big]}^{\underline{n}\times(\underline{j}\times\underline{x}')}$$

md: mágneses dipól

$$\underline{A}_{md} := -\frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,n\times\overbrace{\int \underline{j}(\underline{x}')\times\underline{x}'\,d^3x'}^{=-\underline{m}} = \frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,\underline{n}\times\underline{m}$$

$$\underline{B}_{md} = \underline{\nabla}\times\underline{A}_{md} = \frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\,ik\,e^{ikr}\,\underline{n}\times(\underline{n}\times\underline{m})$$

$$\underline{E}_{md} = -c\,\underline{n}\times\underline{B}_{md}$$

$\vdots$

elektromos kvadrupól ...

Előírt pályán mozgó töltés tere

Lienard-Wiechert potenciál

A töltés az $\underline{x}_0(t)$ görbén mozogjon!

$$\rho(\underline{x},t) = \delta\left(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\right) q$$

$$\underline{j}(\underline{x},t) = \underline{v}\rho = \dot{\underline{x}}_0 q \,\delta\left(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\right)$$

$$\Box\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\underline{x}',t')\,\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x'\,dt'$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}{c}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|} dt' \qquad -t_0 := t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}{c}$$

$$\frac{dt_0}{dt'} = 1 + \frac{1}{c}\overbrace{\frac{\underline{x}-\underline{x}_0}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}}^{n}(-\dot{\underline{x}}_0) = 1 - \underline{n}\dot{\underline{x}}_0$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\delta(t_0)}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t'(t_0))|}\frac{dt_0}{\left(1-\frac{1}{c}\underline{n}\dot{\underline{x}}(t'(t_0))\right)}$$

Legyen $t_0(t')=0$ megoldása t_{ret}!

$$\boxed{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_{ret})|}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{c}\underline{n}\dot{\underline{x}}(t_{ret})}} \qquad \frac{1}{R} := \frac{1}{\underbrace{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_{ret})|}_{r}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{c}\underline{n}\dot{\underline{x}}_0(t_{ret})}$$

$$\Box\underline{A} = \mu_0\underline{j} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{\underline{A} = \frac{q\mu\dot{\underline{x}}_0(t_{ret})}{4\pi}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_{ret})|}\frac{1}{1-\frac{1}{c}\underline{n}\dot{\underline{x}}_0(t_{ret})}} = \varepsilon_0\mu_0\dot{\underline{x}}_0(t_{ret})\phi$$

$$\underline{E} = -\frac{\partial\underline{A}}{\partial t} - \nabla\phi = -\frac{1}{c^2}\ddot{\underline{x}}_0\phi\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\dot{\underline{x}}_0\frac{\partial\phi}{\partial t_{ret}}\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} - \underline{\nabla}\phi$$

Már csak ki kell számolni a deriváltakat.

$$t - t_{ret} - \frac{\overbrace{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_{ret})|}^{r}}{c} = 0 \Rightarrow r = c(t-t_{ret}) = |\underline{x}-\underline{x}_0(t_{ret})|$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c\left(1-\frac{\partial t_{ret}}{\partial t}\right) = \underline{n}(-\dot{\underline{x}}_0)\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} \qquad \boxed{\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{1}{c}\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}}$$

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t_{ret}}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial t_{ret}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\boxed{\left(-\underline{n}\dot{\underline{x}}_0 - \frac{1}{c}\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0 - \frac{1}{c}\dot{\underline{x}}(-\dot{\underline{x}}_0)\right)}$$

$$\underline{\nabla}_x \phi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\underline{\nabla}_x R = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\underline{\nabla} R_x$$

$$\underline{R} = R(\underline{x}, t_{ret}) \quad \underline{\nabla} R = \underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c} + \frac{\partial R}{\partial t_{ret}} \underline{\nabla}_x t_{ret}$$

$$r = r(\underline{x}, t_{ret}) \qquad \underline{\nabla}_x r = \underline{n} + \underline{n}(-\dot{\underline{x}}_0)\nabla_x t_{ret} = c\, \nabla_x(-t_{ret})$$

$$r = |\underline{x} - \underline{x}_0(t_{ret})| = c(t - t_{ret}) \qquad \underline{\nabla}_x t_{ret}(c - \underline{n}\dot{\underline{x}}_0) = -\underline{n} \quad \Rightarrow \nabla_x t_{ret} = \frac{-\underline{n}/c}{1 - \frac{\underline{n}}{c}\dot{\underline{x}}_0}$$

$$\underline{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\ddot{\underline{x}}_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{c}\underline{n}\dot{\underline{x}}_0} + \frac{1}{c^2}\dot{\underline{x}}_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\left(-\underline{n}\dot{\underline{x}}_0 - \frac{1}{c}\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0 + \frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^2\right)\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{c}\underline{n}\dot{\underline{x}}_0} +$$

$$+ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\left(\underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c} + \left(-\underline{n}\dot{\underline{x}}_0 - \frac{1}{c}\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0 + \frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^2\right)\frac{-\underline{n}/c}{1 - \frac{1}{c}\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}\right) \qquad 1 - \frac{1}{c}\underline{n}\dot{\underline{x}}_0 = \frac{R}{r}$$

$$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(-\frac{r\ddot{\underline{x}}_0}{c^2} + \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c^2}\left(\frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^2 - \frac{1}{c}\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0 - \underline{n}\dot{\underline{x}}_0\right)\cdot\frac{r}{R} + \underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c} - \left(\frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^2 - \frac{1}{c}\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0 - \underline{n}\dot{\underline{x}}_0\right)\frac{\underline{n}r}{cR}\right)$$

$$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\left(\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c} - \underline{n}\right)\frac{r}{Rc}\left(\frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^2 - \frac{1}{c}\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0 - \underline{n}\dot{\underline{x}}_0\right) - \frac{r\ddot{\underline{x}}_0}{c^2} + \underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)$$

$$\underline{n}\underline{R} := R \quad \Rightarrow \quad \underline{R} = r\left(\underline{n} - \frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0\right)$$

$$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{-\underline{R}}{Rc}\left(\frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^2 - \frac{1}{c}\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0 - \underline{n}\dot{\underline{x}}_0\right) - \frac{r\ddot{\underline{x}}_0}{c^2} + \frac{\underline{R}}{r}\right)$$

$$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\underbrace{\frac{r}{Rc^2}(\underline{n}\ddot{\underline{x}}_0)\underline{R} - \frac{r}{c^2}\ddot{\underline{x}}_0}_{\frac{r}{Rc^2}\left[(\underline{n}\ddot{\underline{x}}_0)\underline{R} - R\ddot{\underline{x}}_0\right] = \frac{r}{Rc^2}\left[(\underline{n}\ddot{\underline{x}}_0)\underline{R} - (\underline{n}\underline{R})\ddot{\underline{x}}_0\right] = \frac{r}{Rc^2}\left(\underline{n}\times(\underline{R}\times\ddot{\underline{x}}_0)\right)} + \frac{\underline{R}(\underline{n}\dot{\underline{x}}_0)}{Rc} - \frac{1}{c^2}\frac{\underline{R}}{R}\dot{\underline{x}}_0^2 + \frac{\underline{R}}{r}\right)$$

$$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{r}{Rc^2}\left(\underline{n}\times(\underline{R}\times\ddot{\underline{x}}_0)\right) + \frac{\underline{R}}{R}\left(\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c} - \frac{1}{c^2}\dot{\underline{x}}_0^2 + \frac{R}{r}\right)\right) \qquad \frac{R}{r} = 1 - \frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}}{c}$$

torzult coulomb-tér

$$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\underbrace{\frac{r}{Rc^2}\underline{n}\times(\underline{R}\times\ddot{\underline{x}}_0)}_{\text{sugárzási tér}} + \frac{\underline{R}}{R}\left(1 - \frac{1}{c^2}\dot{\underline{x}}_0^2\right)\right)$$

$$\underline{B}_{sug} = \frac{1}{c}\left(\underline{n} \times \underline{E}_{sug}\right)$$

$$\underline{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\underline{E}_{sug} \times \underline{B}_{sug}\right) = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{c}\left(\underline{E}_{sug} \times \left(\underline{n} \times \underline{E}_{sug}\right)\right) = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\underline{n}\left|\underline{E}_{sug}\right|^2 - \underline{E}_{sug}\overbrace{\left(\underline{n}\,\underline{E}_{sug}\right)}^{0}\right)$$

$$\underline{S} = \frac{\underline{n}}{\mu_0 c}\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 R^4}\frac{r^2}{R^2 c^4}\left|\underline{n}\times\left(\underline{R}\times\underline{\ddot{x}}_0\right)\right|^2 = \underline{n}\frac{q^2 r^2}{\varepsilon_0 c^3 R^6 \cdot 16\pi^2}\left|\underline{n}\times\left(\underline{R}\times\underline{\ddot{x}}_0\right)\right|^2$$

<u>nemrelativisztikus határeset:</u> $\dot{x}_0 << c \Rightarrow R = r\left(1 - \frac{\underline{n}\,\underline{\dot{x}}_0}{c}\right) \approx r$

$$\underline{R} = r\left(\underline{n} - \frac{\underline{\dot{x}}_0}{c}\right) \approx r\underline{n}$$

$$\underset{t_{ret}\downarrow}{\underline{S}} = \frac{q^2}{16\pi^2 r^2 c^3 \varepsilon}\left|\underline{n}\times\left(\underline{n}\times\underline{\ddot{x}}_0\right)\right|^2 \cdot \underline{n} = \frac{q^2}{16\pi^2 r^2 c^3 \varepsilon}\left|\underline{\ddot{x}}_0\right|^2 \sin^2\vartheta\,\underline{n}$$

$$\left|\underline{n}\times\underline{\ddot{x}}_0\right|^2 := \left|\underline{\ddot{x}}_0\right|\sin^2\vartheta$$

$$P = \int \underline{S}\,\underline{n}\,dF = \frac{q^2}{16\pi^2 c^3 \varepsilon}\left|\underline{\ddot{x}}_0\right|^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} \sin^2\vartheta\, d(\cos\vartheta)\, d\varphi = \boxed{\frac{q^2}{6\pi c^3 \varepsilon}\left|\underline{\ddot{x}}_0\right|^2}$$

$$\frac{1}{r^2}dF = d\Omega = d(\cos\vartheta)\,d\varphi$$

Larmor - képlet

<u>ultrarelativisztikus eset</u>

$$\underline{\beta} := \frac{\underline{\dot{x}}_0}{c} \lesssim 1 \qquad \underline{R} = r\left(\underline{n} - \underline{\beta}\right) \qquad R = r\left(1 - \underline{n}\,\underline{\beta}\right)$$

$$\underline{S} = \frac{q^2}{16\pi^2 c^3 \varepsilon}\cdot\left[\underline{n}\times\left(\left(\underline{n}-\underline{\beta}\right)\times\underline{\ddot{x}}_0\right)\right]^2 \underline{n}\,\frac{1}{\left(1-\underline{n}\,\underline{\beta}\right)^6}\cdot\frac{1}{r^2} \qquad \left(\frac{\underline{\ddot{x}}_0}{c}\right)^2 = \underline{\dot{\beta}}^2$$

$$\frac{dW}{dF} = \int_{T_1+\frac{r(T_1)}{c}}^{T_2+\frac{r(T_2)}{c}} \underline{n}\,\underline{S}(t)\,dt = \int_{T_1}^{T_2} \underline{n}\,\underset{t_{ret}\downarrow}{\underline{S}}\,\frac{dt}{dt_{ret}}\,dt_{ret} = \boxed{\int_{T_1}^{T_2}\frac{q^2}{16\pi^2 c\,\varepsilon r^2}\left[\underline{n}\times\left(\left(\underline{n}-\underline{\beta}\right)\times\underline{\dot{\beta}}\right)\right]^2\frac{1}{\left(1-\underline{n}\,\underline{\beta}\right)^5}\,dt_{ret}}$$

Lineáris gyorsító: $\underline{\beta} \parallel \underline{\dot{\beta}} \Leftrightarrow \underline{x} \parallel \underline{\dot{x}} \Rightarrow \underline{n}\times\left(\left(\underline{n}-\underline{\beta}\right)\times\underline{\dot{\beta}}\right) = \underline{n}\times\left(\underline{n}\times\underline{\dot{\beta}}\right) - \underline{n}\times\overbrace{\left(\underline{\beta}\times\underline{\dot{\beta}}\right)}^{0}$

$$\sphericalangle\left(\underline{n}, \underline{\dot{\beta}}\right) =: \vartheta$$

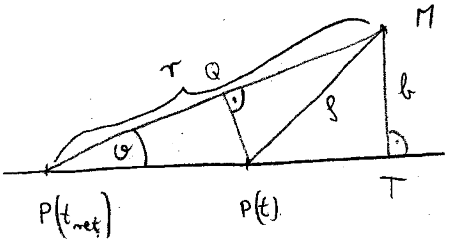
$$\boxed{\frac{dW}{d\Omega} = \int_{T_1}^{T_2}\frac{q^2}{16\pi^2 c\,\varepsilon_0}\left|\underline{\dot{\beta}}\right|^2 \sin^2\vartheta\,\frac{1}{\left(1-\beta\cos\vartheta\right)^5}\,dt_{ret}}$$

Maximális ϑ-ban, ha

$$\cos\vartheta = \frac{1}{3\beta}\left(\sqrt{1+15\beta^2} - 1\right)$$

Egyenesvonalú, egyenletes mozgást végző ponttöltés ekvipotenciális felületeinek dilatációja

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \qquad R = r(1-\underline{n}\underline{\beta})$$



$$\overline{P(t_{ret})\,P(t)} = \frac{r}{c}v = r\beta$$

$$\overline{P(t_{ret})\,Q} = \underline{v}\frac{r}{c}\underline{n} = \underline{\beta}\,\underline{n}\,r$$

$$\overline{QM} = r - \underline{\beta}\,\underline{n}\,r = r(1-\underline{\beta}\,\underline{n}) = R$$

$$\overline{P(t)T} = z - vt$$

$$P(t_{ret})\,TM_\Delta \sim P(t_{ret})\,P(t)\,Q_\Delta$$

$$\frac{\overline{Q\,P(t)}}{b} = \frac{r\beta}{r} \Rightarrow \overline{Q\,P(t)} = b\beta$$

$$(z-vt)^2 + b^2 = \rho^2 = (b\beta)^2 + R^2$$

$$R = \sqrt{(z-vt)^2 + b^2 - (b\beta)^2} = \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{\frac{(z-vt)^2}{1-\beta^2} + b^2}$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{(z-vt)^2}{1-\beta^2} + b^2}}$$

$\phi =$ áll vonalak a $\frac{(z-vt)^2}{1-\beta^2} + b^2 =$ áll

Cserenkov sugárzás

$$\Box\phi(\underline{k},\omega) = \frac{1}{\varepsilon(\omega)}\rho(\underline{k},\omega)$$

$$\left(-\varepsilon(\omega)\mu_0\omega^2 + k^2\right)\phi(\underline{k},\omega) = \frac{1}{\varepsilon(\omega)}\rho(\underline{k},\omega)$$

$$\left(-\varepsilon(\omega)\mu_0\omega^2 + k^2\right)\underline{A}(\underline{k},\omega) = \mu_0\underline{j}(\underline{k},\omega)$$

$$\rho(\underline{r},t) = q\cdot\delta(\underline{r}-\underline{v}t)$$

$$\underline{j}(\underline{r},t) = q\,\underline{v}\,\delta(\underline{r}-\underline{v}t)$$

$$\rho(\underline{k},\omega) = \int d^3x \int dt\ \rho(\underline{x},t)\, e^{-i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} = \int d^3x \int dt\ q\,\delta(\underline{x}-\underline{v}t)\, e^{-i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} =$$

$$= q\int dt\ e^{-i(\underline{k}\underline{v}-\omega)t} = q\,2\pi\,\delta(\underline{k}\underline{v}-\omega).$$

$$\underline{j}(\underline{k},\omega) = 2\pi q\,\underline{v}\,\delta(\underline{k}\underline{v}-\omega)$$

$$\boxed{\phi(\underline{k},\omega) = \frac{2\pi q}{\varepsilon(\omega)}\ \frac{\delta(\omega-\underline{k}\underline{v})}{k^2-\varepsilon(\omega)\mu_0\omega^2}}$$

A következő több, mint 1 oldalon keresztül ennek a Fourier transzformáltját számoljuk

$$\underline{A}(\underline{k},\omega) = \frac{2\pi q}{\varepsilon(\omega)}\ \frac{\delta(\omega-\underline{k}\underline{v})}{k^2-\varepsilon(\omega)\mu_0\omega^2}\cdot\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\,\underline{v}$$

$$\phi(\underline{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int \frac{d\omega}{\cancel{2\pi}}\ \frac{\cancel{2\pi} q}{\varepsilon(\omega)}\ \frac{\delta(\omega-\underline{k}\underline{v})}{k^2-\varepsilon(\omega)\mu_0\omega^2}\ e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}$$

$$\phi(\underline{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ \frac{q}{\varepsilon(\underline{k}\underline{v})}\ \frac{e^{i(\underline{k}\underline{x}-\underline{k}\underline{v}t)}}{k^2-\varepsilon(\underline{k}\underline{v})\mu_0(\underline{k}\underline{v})^2}$$

- tfh $\varepsilon(\underline{k}\underline{v}) = \varepsilon$
- $\underline{k} = \underline{k}_\parallel + \underline{k}_\perp$ felbontjuk $\underline{k}$-t $\underline{v}$-re $\perp$ és $\parallel$ részre $\Rightarrow d^3k = d^2k_\perp\, dk_\parallel$

$$\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{(2\pi)^3\varepsilon}\int d^2k_\perp\int dk_\parallel\ \frac{e^{i(\underline{k}_\perp\underline{x}_\perp + \underline{k}_\parallel(\underline{x}_\parallel-\underline{v}t))}}{\underline{k}_\perp^2-(\varepsilon\mu v^2-1)k_\parallel^2}$$

- $\underline{x}_\parallel-\underline{v}t := \xi$, $\beta^2 := \varepsilon\mu v^2 = \frac{v^2}{v_f^2}$, $\frac{k_\perp^2}{\beta^2-1} := k_\perp'^2 \Rightarrow d^2k'_\perp = \frac{1}{\beta^2-1}\,d^2k_\perp$

$$\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{(2\pi)^3\varepsilon}\int d^2k'_\perp(\beta^2-1)\cdot\int dk_\parallel\ \frac{1}{\beta^2-1}\ \frac{e^{i(\underline{k}_\perp\underline{x}_\perp+k_\parallel\xi)}}{\underline{k}_\perp'^2-\underline{k}_\parallel^2}$$

$$\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{(2\pi)^3\varepsilon}\int d^2k'_\perp\int dk_\parallel\ \frac{e^{i(\underline{k}_\perp\underline{x}_\perp+k_\parallel\xi)}}{\underline{k}_\perp'^2-\underline{k}_\parallel^2}$$

- parciális törtekre bontjuk a nevezőt, hogy külön integrálhassunk $k'_\perp = a$, $k_\parallel = b$

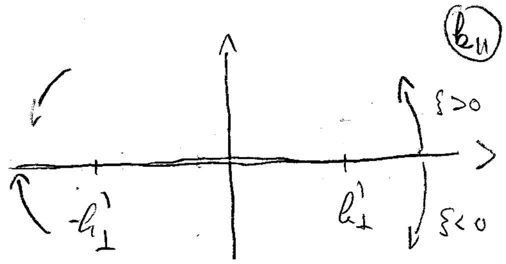
$$\frac{1}{a^2-b^2} = \frac{1}{(a-b)(a+b)} = \frac{A}{a-b}+\frac{B}{a+b}$$

$A(a+b)+B(a-b) \doteq 1$

$(A+B)\,a = 1 \qquad \overset{\textstyle A = \frac{1}{2a}}{\Uparrow}$

$A-B = 0 \quad \Rightarrow B = A$

$$\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{(2\pi)^3\varepsilon}\int d^2k'_\perp \, \frac{e^{i\underline{k}_\perp\underline{x}_\perp}}{2k'_\perp}\int dk_\parallel\left(\frac{1}{k'_\perp-k_\parallel}+\frac{1}{k_\parallel+k'_\perp}\right)e^{ik_\parallel\xi}$$



- integrál elvégzése reziduum tétellel:

Merre zárjuk? Ha $\xi>0$, felfele,

ha $\xi<0$ lefele, így lesz a járulék 0.

Merre toljuk a pólusokat? Ha $\xi = x_\parallel - vt > 0$ akkor legyen 0 az integrál,

hogy előre ne sugározzon! Tehát toljuk lefele!.

$$\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{(2\pi)^3\varepsilon}\int d^2k'_\perp \, \frac{e^{i\underline{k}_\perp\underline{x}_\perp}}{2k'_\perp}(-2\pi i)\left(-e^{ik'_\perp\xi}+e^{-ik_\perp\xi}\right)$$

- térjünk át polárba! $\underline{k}'_\perp = k'_\perp\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$, $\underline{x}_\perp = x_\perp\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $d^2k'_\perp = dk_\perp\, k_\perp\, d\varphi$

$$\phi(\underline{x},t) = \frac{\frac{1}{2}q\,i}{(2\pi)^2\varepsilon}\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^\infty dk'_\perp\; e^{i\sqrt{\beta^2-1}\,k'_\perp x_\perp\cos\varphi}\left(e^{ik'_\perp\xi}-e^{-ik'_\perp\xi}\right)$$

- Most ezek $e^\wedge$-ot kell integrálni regularizációval:

$$\int_0^\infty e^{iax}dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_0^\infty e^{(ia-\varepsilon)x}dx = \lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{e^{(ia-\varepsilon)x}}{ia-\varepsilon}\right]_0^\infty = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1}{ia-\varepsilon} = \frac{-1}{ia}$$

$$\phi(\underline{x},t) = \frac{-q}{8\pi^2\varepsilon}\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}\,x_\perp\cos\varphi+\xi}-\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}\,x_\perp\cos\varphi-\xi}\right)$$

$$\phi(\underline{x},t) = \frac{-q}{8\pi^2\varepsilon}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-2\xi}{(\beta^2-1)x_\perp^2\cos^2\varphi-\xi^2}\,d\varphi = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon}\,2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\xi}{(\beta^2-1)x_\perp^2\cos^2\varphi-\xi^2}\,d\varphi$$

- vezessük be a $u=\mathrm{tg}\,\varphi$ helyettesítést!

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1+\mathrm{tg}^2\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{1}{1+u^2}\,du$$

- vezessük be a $u|\xi| = w$ helyettesítést! $du = \frac{dw}{|\xi|}$, $|\xi| = -\xi$

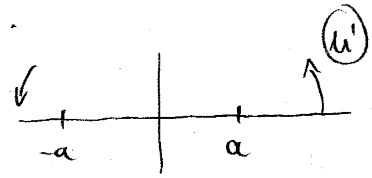
$$\phi(\underline{x},t)=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(\beta^2-1)x_\perp^2\frac{1}{1+u'^2/\xi^2}-\xi^2}\,\frac{1}{1+u'^2/\xi^2}\,\frac{du'}{-\xi}$$

$$\phi(\underline{x},t)=\frac{-q}{2\pi^2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\beta^2-1)x_\perp^2-\xi^2-u'^2}\,du'$$

- ismét reziduumtétel:

az, hogy az integrandus szinguláris-e, függ a nevezőtől.

– Ha $(\beta^2-1)x_\perp^2-\xi^2:=a^2>0$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2-u'^2}\,du'$

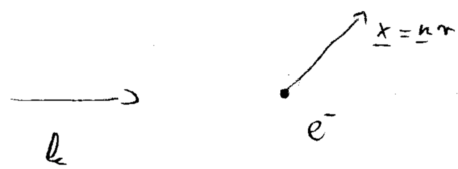


A pólusokat pl. lefelé tolva az integrál 0 lesz. Másmerre is tolhatnánk, de az más esetet tárgyalna.

– ha $(\beta^2-1)x_\perp^2-\xi^2:=-b^2<0$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-1}{b^2+u'^2}\,du'=-\frac{1}{b}\left[\operatorname{arctg}\frac{u'}{b}\right]_{-\infty}^{\infty}=-\frac{\pi}{b}$

$$\phi(\underline{x},t)=\phi\left(\underline{x}_\perp(\underline{x}),\ \xi(t)<0\right)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\,\frac{1}{\sqrt{\xi^2-x_\perp^2(\beta^2-1)}}$$ ez egy kúp.

Elektromágneses sugárzás szóródása ponttöltésen (Thomson szórás)



Liénard-Wiechert alapján, nemrelativisztikusan:

$$\underline{E}_{sug}=\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0c^2}\frac{1}{r}\underbrace{\underline{n}\times(\underline{n}\times\ddot{\underline{x}}_0)}_{\underline{n}(\underline{n}\ddot{\underline{x}})-\ddot{\underline{x}}_0}=\underline{E}_{szórt}$$

$$\underline{E}=\underline{E}_0e^{-i\omega t}=E_0\,\underline{\varepsilon}_{be}\,e^{-i\omega t}$$

polarizált fény jön

Newton modellje:

$$m\ddot{\underline{x}}_0=-e\,E_0\,\underline{\varepsilon}_{be}\,e^{-i\omega t}$$

Egészítsük $\underline{n}$-t ortonormált bázissá, $(\underline{n},\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2)$ ahol ε_1 és ε_2 tetszőlegesek!

$$\underline{\varepsilon}_i^*\underline{E}_{sug}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2}\frac{1}{r}\,\underline{\varepsilon}_i^*\ddot{\underline{x}}_0\qquad i\in\{1,2\}$$

$$\left(\frac{dP}{dF}\right)_i^{\text{szórt}} = \frac{1}{2\mu_0 c}\left|\underline{\varepsilon}_i^* \underline{E}_{\text{szórt}}\right|^2 = \frac{1}{2\mu_0 c}\,\frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^4}\,\frac{1}{r^2}\left|\underline{\varepsilon}_i^* \cdot \ddot{\underline{x}}_0\right|^2$$

$\underline{\varepsilon}_i$ által

$$= \frac{e^2}{32\pi^2 c^3 \varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}\left|\frac{e\,\underline{E}_0\, e^{-i\omega t}}{m}\right|^2 \left|\underline{\varepsilon}_i^* \cdot \underline{\varepsilon}_{be}\right|^2 = \frac{e^4 |E_0|^2}{32\pi^2 c^3 \varepsilon m^2 r^2}\left|\underline{\varepsilon}_i^* \cdot \underline{\varepsilon}_{be}\right|^2$$

klasszikus elektronsugár: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r_e} = m_e c^2 \qquad r_e = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_i^{\text{szórt}} = \left(\frac{dP}{dF}\right)_i^{\text{szórt}} \cdot r^2 = \frac{\varepsilon c}{2}\cdot r_e^2\, |E_0|^2 \left|\underline{\varepsilon}_i^* \underline{\varepsilon}_{be}\right|$$

kimenő teljesítmény

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_i = \frac{\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_i}{\frac{1}{2\mu_0 c}|E_0|^2} = r_e^2 \left|\underline{\varepsilon}_i^* \underline{\varepsilon}_{be}\right|^2 \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_i \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_i$$

bejövő teljesítmény

Most válasszuk $\underline{\varepsilon}_2 \perp (\underline{e}, \underline{n}) \Rightarrow \underline{\varepsilon}_2 = \frac{\underline{e}_z \times \underline{n}}{\sin\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$

$$\underline{\varepsilon}_1 \perp (\underline{\varepsilon}_2, \underline{n}) \Rightarrow \underline{\varepsilon}_1 = \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{n} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix}$$

ha $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ azaz x irányú a bejövő pol.

$$\left|\underline{\varepsilon}_1^* \underline{e}_x\right|^2 = \cos^2\varphi \cos^2\vartheta$$

$$\left|\underline{\varepsilon}_2^* \underline{e}_x\right|^2 = \sin^2\varphi$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\vartheta\right)$$

ha $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ azaz y irányú a bejövő pol.

$$\left|\underline{\varepsilon}_1^* \underline{e}_y\right|^2 = \sin^2\varphi\cos^2\vartheta$$

$$\left|\underline{\varepsilon}_2^* \underline{e}_y\right|^2 = \cos^2\varphi$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta\right)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{átlag}} = r_e^2\,\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}$$

polarizálatlan

$$\sigma = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} r_e^2\,\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\, d(\cos\vartheta)\, d\varphi = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

Sugárzási visszahatás

$$\dot{v}\dot{v} = (v\dot{v})^{\cdot} - v\ddot{v}$$

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{v}^2 \quad \text{Larmor képletből}$$

visszahatási tag

$$m\underline{\dot{v}} = \underline{F} + \underline{F}_{\text{sug}}$$

$$\int_0^T \underline{F}_{\text{sug}}\underline{v}\,dt = -\int_0^T P\,dt = -\int_0^T \frac{q^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,dt =$$

ez 0, ha T periódusidő

$$= -\left[\frac{q\,\underline{v}\,\underline{\dot{v}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\right]_0^T + \int_0^T \frac{q^2\,\underline{v}\,\underline{\ddot{v}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,dt$$

elektronra

$$:= \tau \approx 10^{-24}\,s \qquad \underline{F}_{\text{sug}} = \frac{q^2\ddot{v}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

$$m\left(\underline{\dot{v}} - \overbrace{\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}}\underline{\ddot{v}}\right) = \underline{F}$$

$$m\left(\underline{\dot{v}} - \tau\underline{\ddot{v}}\right) = \underline{F}$$

Ez nem olyan, mint a Newtoni, mert $\underline{F}$ függ $\underline{\ddot{v}}$-től.

Hülyeséget is ad, ha $\underline{F} = 0 \Rightarrow \underline{\dot{v}} = \tau\underline{\ddot{v}} \Rightarrow \underline{\dot{v}} = \underline{a}\,e^{t/\tau}$

Alakítsuk a differenciálegyenletet integrálegyenletté! Oldjuk meg $\underline{\dot{v}}$-re az együtthatók variálásának módszerével. $\underline{\dot{v}} = \underline{a}(t)\,e^{t/\tau}$

$$m\left(\underline{a} - \tau\underline{\dot{a}} - \tau\frac{t}{\tau}\underline{a}\right)e^{t/\tau} = \underline{F}$$

$$\underline{\dot{a}}(t) = \frac{-1}{m\tau}e^{-t/\tau}\underline{F}(t)$$

$$\underline{a}(t) = \frac{-1}{m\tau}\int_{t_0}^{t}\underline{F}(t')\,e^{-t'/\tau}\,dt' + C$$

öngyorsító rész, legyen 0

$$\underline{\dot{v}}(t) = \frac{-1}{m\tau}\left[\int_{t_0}^{t}\underline{F}(t')\,e^{-t'/\tau}\,dt' + C\right]e^{t/\tau}$$

$$\underline{\dot{v}}(t) = \frac{-1}{m\tau}\int_{t_0}^{t}\underline{F}(t')\,e^{\frac{t-t'}{\tau}}\,dt' \qquad -s := \frac{t-t'}{\tau} \qquad t + \tau s = t'$$

$$s_0 := \frac{t-t_0}{\tau} \qquad \frac{dt'}{ds} = \tau$$

$$\underline{\dot{v}}(t) = \frac{-1}{m\tau}\int_{s_0}^{0}\underline{F}(t+\tau s)\,e^{-s}\,\frac{ds}{\tau} = \frac{1}{m}\int_0^{s_0}\underline{F}(t+\tau s)\,e^{-s}\,ds$$

Mennyi s_0? Ha $\tau = 0$, kapjuk vissza a Newtont! $\underline{F} = m\,\dot{\underline{v}}$

$$\dot{\underline{v}} = \frac{1}{m}\int_0^{s_0} \underline{F}(t+0s)\,e^{-s}\,ds = \frac{\underline{F}(t)}{m}\int_0^{s_0} e^{-s}\,ds = \frac{\underline{F}(t)}{m}\left(1-e^{-s_0}\right) \Rightarrow s_0 \to \infty$$

spec eset

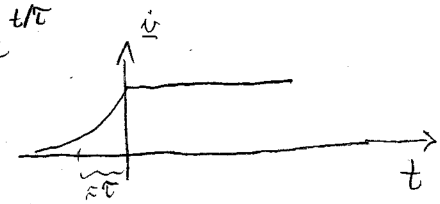
---

pl: $\underline{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ \underline{F}_0 & \text{ha } t>0 \end{cases}$

$$\dot{\underline{v}} = \frac{1}{m}\int_0^{\infty} \underline{F}(t+\tau s)\,e^{-s}\,ds =$$

$t<0$: $\frac{1}{m}\int_{-t/\tau}^{\infty} \underline{F}_0\, e^{-s}\,ds = \frac{\underline{F}_0}{m}\, e^{t/\tau}$

$t>0$: $\frac{1}{m}\int_0^{\infty} \underline{F}_0\, e^{-s}\,ds = \frac{\underline{F}_0}{m}\cdot 1$



---

körpályán keringő töltés

$$\underline{F}(t) = -m\omega_0^2\, \underline{x}(t)$$

$$\ddot{\underline{x}}(t) + \omega_0^2 \int_0^{\infty} \underline{x}(t+\tau s)\, e^{-s}\,ds = 0 \qquad \underline{x}(t) = \underline{x}_0\, e^{-\alpha t}$$

$$e^{-\alpha t}\cdot\alpha^2 + \omega_0^2\, \underline{x}_0 \int_0^{\infty} e^{-\alpha(t+\tau s)}\, e^{-s}\,ds = 0$$

$$\alpha^2 + \omega_0^2\, \underline{x}_0 \int_0^{\infty} e^{-(\alpha\tau+1)s}\,ds = 0$$ ha $Re(\alpha\tau+1)>0$ az integrál $\frac{1}{\alpha\tau+1}$

(öngyorsítás kiszűrve)

$$\alpha^2 + \omega_0^2\,\frac{1}{\alpha\tau+1} = 0$$

$\alpha^3\tau + \alpha^2 + \omega_0^2 = 0$ perturbációszámítással oldjuk meg α-ra

ha $\tau = 0$, $\alpha = \pm i\omega_0$ nulladrendű tag.

$$\alpha = i\omega_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \dots$$

$$\tau\left(i\omega_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2\right)^3 + \left(i\omega_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2\right)^2 + \omega_0^2 = 0$$

τ-ban másodrendűeket tartjuk meg

$$\left((i\omega_0)^3 + 3(i\omega_0)^2\alpha_1\tau\right)\tau + \cancel{(i\omega_0)^2} + (\alpha_1\tau)^2 + 2i\omega_0\alpha_1\tau + 2i\omega_0\alpha_2\tau^2 + \cancel{\omega_0^2} = 0$$

τ együtthatóira: $-i\omega_0^3 + 2i\omega\alpha = 0$ $\qquad \alpha_1 = \frac{1}{2}\omega_0^2$

τ² együtthatóira: $-3\omega_0^2\alpha_1 + \alpha_1^2 + 2i\omega_0\alpha_2 = 0$

$$\alpha_2 = \frac{3\omega_0^2\alpha_1 - \alpha_1^2}{2i\omega_0} = \omega_0^4\,\frac{3 - 1/2}{4i\omega_0} = -i\,\frac{5}{8}\,\omega_0^3$$

$$\alpha = i\Big(\omega_0 \underbrace{-\frac{5}{8}\omega_0^3\tau^2}_{:=\Delta\omega}\Big) + \frac{1}{2}\underbrace{\omega_0^2\tau}_{:=\Gamma}$$

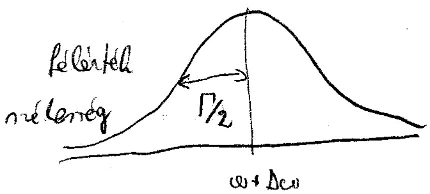
csillapodás

frekvencia eltolódás

$$\underline{x}(\omega) = \int \underline{x}(t)\,e^{i\omega t}\,dt = \underline{x}_0\underbrace{\int e^{(i\omega-\alpha)t}\,dt}_{\frac{1}{\alpha - i\omega}} = \frac{\underline{x}_0}{\alpha - i\omega} = \frac{\underline{x}_0}{i(\omega_0 - \Delta\omega - \omega) + \frac{1}{2}\Gamma}$$

$$E \sim |\underline{x}(\omega)|^2 = \frac{\underline{x}_0^2}{\left|\frac{1}{2}\Gamma + (i\,\omega_0 + \Delta\omega - \omega)\right|^2} \sim \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2 + (\omega_0 + \Delta\omega - \omega)^2}$$

Lorentz görbe



$$\underline{F}_0(t + \tau s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau s)^n}{n!}\,\frac{d^n \underline{F}(t)}{dt^n}$$

$$\underline{v}(t) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\,\frac{d^n\underline{F}(t)}{dt^n}\underbrace{\int_0^\infty s^n e^{-s}\,ds}_{\Gamma(n+1) = n!} = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{1}\,\frac{d^n\underline{F}(t)}{dt^n}$$

$$m\underline{v}(t) = \underline{F} + \tau\frac{d\underline{F}}{dt} + \cancel{\tau^2\frac{d^2\underline{F}}{dt^2}} \qquad \tau \ll 1,\ \tau^2 \approx 0$$

Az Abraham–Lorentz elektronmodell

A modell arról is szól, hogy a mechanikában megismert fogalmak (impulzus, energia) mind levezethetőek az elektrodinamikából, és csak az EM kölcsönhatás létezik, és az, ami az EM tér csomósságait (részecskéket) összetartják.

$$\underline{E} = \underline{E}_s + \underline{E}_{külső} \qquad \underline{E}_s: \text{saját elektromos tere}$$

$$\underline{B} = \underline{B}_s + \underline{B}_{külső}$$

Az impulzus kontinuitási egyenlete:
$$\frac{\partial \overset{\text{impulzussűrűség}}{\underline{g}}}{\partial t} + \operatorname{div} \overset{\text{feszültségtenzor}}{\underline{\underline{\Pi}}} = -\underline{f} = -\left(\rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B}\right)$$

$$\int_V \operatorname{div} \underline{\underline{\Pi}} \, dV = \oint_{\partial V} \underline{\underline{\Pi}} \, d\underline{F} = 0 \text{ ha } V \to \infty$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \underline{g} \, dV = \frac{d}{dt} \underline{G}_{össz} = 0 \quad \text{vagyis az egész rendszer impulzusa nem változik.}$$

$$\underbrace{-\int_V \rho \, \underline{E}_s + \underline{j} \times \underline{B}_s \, dV}_{\frac{d\underline{p}}{dt}} = \underbrace{\int_V \rho \underline{E}_{külső} + \underline{j} \times \underline{B}_{külső} \, dV}_{\underline{F}_{külső}}$$

Válasszunk olyan vonatkoztatási rendszert, melyben épp áll a részecske:

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = -\int_V \rho(\underline{x},t)\, \underline{E}_s(\underline{x},t) \, d^3x = \int_V \rho(\underline{x},t)\left[\nabla_x \phi_s(\underline{x},t) + \frac{\partial \underline{A}_s}{\partial t}(\underline{x},t)\right] d^3x$$

① Csak akkor nem nulla, ha $\underline{x}$ az elektron sugarán belül van.

$$\phi_s(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \, d^3x'$$

$$\underline{A}_s(\underline{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\underline{j}\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \, d^3x'$$

Ezekben az integrandus csak akkor nem 0, ha $\underline{x}'$ az elektron belsejébe mutat.

①-es miatt így $|\underline{x}-\underline{x}'|$ nagyon kicsi, sorfejthetjük a forrásokat t körül.

$$\rho(\underline{x}',t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \rho(\underline{x}',t)\left(\frac{R}{c}\right)^n$$

ahol bevezettük az $|\underline{x}-\underline{x}'| = |\underline{R}| = R$ jelölést.

$$\underline{j}(\underline{x}',t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \underline{j}(\underline{x}',t)\left(\frac{R}{c}\right)^n$$

$$\phi_1(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{c^n}\int_V \frac{\partial^n}{\partial t^n}\rho(\underline{x}',t)\, R^{n-1} d^3x'$$

$\underline{A}_1$-ben μ_0 van, mi pedig ϕ_1-el összevethető mennyiséget szeretnénk: $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

$$\boxed{\underline{A}_1(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{c^{n+2}}\int_V \frac{\partial^n}{\partial t^n}\underline{j}(\underline{x}',t)\, R^{n-1} d^3x'}$$

$\underline{A}_1$-nek idôderiváltja n-hez 1-et hozzáad

- $\phi_1(\underline{x},t)$ sorfejtésének $n=0$-ik tagjának járuléka $\frac{d\underline{p}}{dt}$-be:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\int_V \underbrace{\rho(\underline{x}',t)\,\rho(\underline{x},t)}_{\text{szimmetrikus } \underline{x} \text{ és } \underline{x}'\text{-re}}\,\underline{\nabla}_x R^{-1}\, d^3x'\, d^3x \qquad \underline{\nabla}_x R^{-1} = \underline{\nabla}_x \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = -\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}$$

antiszimmetrikus $\underline{x}$ és $\underline{x}'$-re

az integrál értéke 0

- $\phi_1(\underline{x},t)$ sorfejtésének $n=1$ tagjának járuléka

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ldots\underline{\nabla}_x R^0 = \ldots\cdot 0 = 0$$

- tehát az első két tag (jelöljük $\mathcal{L}$-lel) járuléka 0; $n \mapsto n+2$

$$\boxed{\phi_1(\underline{x},t) = \mathcal{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)!\,c^{n+2}}\int_V\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n+2}\rho(\underline{x}',t)\, R^{n+1} d^3x}$$

$\underline{\nabla}_x$ csak erre hat

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,c^{n+2}}\int_V \rho(\underline{x},t)\int_V\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n+1} R^{n-1}}^{\text{Kónya-féle } \int \text{ lineáris szuperoperátor}}\left[\underline{j}(\underline{x}',t) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho(\underline{x}',t)}{(n+1)(n+2)}\frac{\underline{\nabla}_x R^{n+1}}{R^{n-1}}\right] d^3x'\, d^3x$$

$$\frac{\underline{\nabla}_x R^{n+1}}{R^{n-1}} = (n+1)\frac{R^n}{R^{n-1}}\underline{\nabla}_x R = (n+1)\, R\,\frac{\underline{R}}{R}$$

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \int\left[\underline{j}(\underline{x}',t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x}',t)\frac{\underline{R}}{n+2}\right] \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}(\underline{x}',t) = -\underline{\nabla}_{x'}\,\underline{j}(\underline{x}',t)$$

Számoljuk ki a $\nabla_{x'}$-s kifejezést!

$$\left[\int_V R^{n-1}\underline{R}\cdot\nabla_{x'}\,\underline{j}(\underline{x}',t)\,d^3x'\right]_k = \int_V R^{n-1}\,R_k\,\partial_\ell'\,j_\ell(\underline{x}',t)\,d^3x' = \text{parc. int, Gauss}=0\ldots$$

$$= -\int_V j_\ell(\underline{x}',t)\,\partial_\ell'\left(R^{n-1}R_k\right)d^3x' = -\int_V j_\ell(\underline{x}',t)\left[(n-1)R^{n-2}\partial_\ell' R\cdot R_k + R^{n-1}\partial_\ell' R_k\right]d^3x'$$

$$= -\int_V j_\ell(\underline{x}',t)\left[(n-1)R^{n-2}\frac{-R_\ell}{R}R_k + R^{n-1}\left(-\delta_{\ell k}\right)\right]d^3x' = -\left[\int_V\left((n-1)\frac{1}{R^2}\left(\underline{j}(\underline{x}',t)\,\underline{R}\right)\underline{R} + \underline{j}(\underline{x}',t)\right)d^3x'\right]_k$$

bevezetve a $\frac{\underline{R}}{R} := \hat{\underline{R}}$ jelölést:

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \int\left\{\underline{j}(\underline{x}',t) - \frac{1}{n+2}\left[\underline{j}(\underline{x}',t) + \left(\underline{j}(\underline{x}',t)\cdot\hat{\underline{R}}\right)\cdot\hat{\underline{R}}\,(n-1)\right]\right\} = \int\left[\frac{n+1}{n+2}\,\underline{j}(\underline{x}',t) - \frac{n-1}{n+2}\,\hat{\underline{R}}\left(\hat{\underline{R}}\cdot\underline{j}\right)\right]$$

- Tegyük fel, hogy $\underline{j}(\underline{x}',t) = \rho(\underline{x}',t)\,\underline{v}(t)$ vagyis merev testként mozog!
- Ekkor csak 1 kitüntetett irány van, $\underline{v}$, így az integrál értéke is csak $\underline{v}$ irányú lehet, tehát egy $\int \to \int\circ(\hat{\underline{v}}\circ\hat{\underline{v}})$ függvény identitás.

$$I\left(\hat{\underline{R}}\left(\hat{\underline{R}}\,\underline{j}\right)\right) = I\left(\rho(\underline{x}',t)\,\hat{\underline{R}}\left(\hat{\underline{R}}\,\underline{v}\right)\right) = \rho(\underline{x}',t)\left(\hat{\underline{v}}\circ\hat{\underline{v}}\circ\hat{\underline{R}}\circ\hat{\underline{R}}\right)\underline{v} =$$

$$= \rho(\underline{x}',t)\,\hat{\underline{v}}\left(\hat{\underline{v}}\hat{\underline{R}}\right)\left(\hat{\underline{R}}\,\underline{v}\right) = \rho(\underline{x}',t)\,\hat{\underline{v}}\left(\hat{\underline{v}}\,\hat{\underline{R}}\right)\left(\hat{\underline{R}}\,\hat{\underline{v}}\right)|\underline{v}| =$$

$$= \rho(\underline{x}',t)\,\underline{v}\cdot\left(\hat{\underline{v}}\,\hat{\underline{R}}\right)^2$$

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \int\left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n-1}{n+2}\left(\hat{\underline{v}}\,\hat{\underline{R}}\right)^2\right)\underline{v}(t)\,\rho(\underline{x}',t)$$

Miközben az integrál hat $\left(\hat{\underline{v}}\hat{\underline{R}}\right)^2$-re, bejárja a teljes térszöget:

$$\left|\hat{\underline{R}}\,\hat{\underline{v}}\right|^2 = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \left|\hat{\underline{R}}\,\hat{\underline{v}}\right|^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1}\cos^2\vartheta\,d(\cos\vartheta)\,d\varphi = \frac{1}{4\pi}\,\frac{2}{3}\cdot 2\pi = \frac{1}{3}$$

$$\sphericalangle\left(\hat{\underline{R}},\hat{\underline{v}}\right) := \vartheta$$

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n-1}{n+2}\,\frac{1}{3} = \frac{3n+3-n+1}{3(n+2)} = \frac{2n+4}{3(n+2)} = 2/3$$

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,c^{n+2}}\int_V \rho(\underline{x},t)\int_V R^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\,\rho(\underline{x}',t)\,\underline{v}(t)\right) d^3x'\,d^3x$$

- Mikor ρ-t idő szerint deriváljuk, a kontinuitási egyenlettel visszavezethető $\underline{v}$-re, az viszont mivel kezdetben 0, ezért később a magasabbrendű tagjai is 0-k lesznek.

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,c^{n+2}}\int_V \rho(\underline{x},t)\int_V R^{n-1}\,\frac{2}{3}\,\rho(\underline{x}',t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n+1}\underline{v}(t)\; d^3x'\,d^3x$$

- R nagyon kicsi, így $n>1$-re elhanyagoljuk.

- ha $n=0$

$$\frac{d\underline{p}_0}{dt} = \frac{1}{c^2}\,\overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\int_V \frac{\rho(\underline{x},t)\,\rho(\underline{x}',t)}{R}}^{2W_{el.sztat}}\,\frac{2}{3}\,\frac{d\underline{v}}{dt}\; d^3x'\,d^3x$$

$$\underline{F}_{q,0} = \frac{d\underline{p}_0}{dt} = \frac{1}{c^2}\,\frac{4}{3}\,W_{el.sztat}\,\frac{d\underline{v}}{dt} = m_0\,\underline{a} \qquad m_0 = \frac{4}{3c^2}\,\underset{\underset{E}{\parallel}}{W_{el.sztat}}$$

$$m_0 c^2 = \frac{4}{3}E \qquad m_0 = m_e$$

- ha $n=1$

$$\frac{d\underline{p}_1}{dt} = \frac{1}{c^3}\,\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\int_V \overbrace{\rho(\underline{x},t)\;\rho(\underline{x}',t)}^{(-e)\cdot(-e)}\;\frac{2}{3}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\underline{v}(t)\; d^3x'\;d^3x$$

$$\frac{d\underline{p}_1}{dt} = \frac{-e^2}{\underbrace{6\pi\varepsilon_0 c^3}_{m_e\tau}}\,\ddot{\underline{v}} = \underline{F}_{külső,1}$$

$$\frac{d\underline{p}_{1,0}}{dt} = m_e\left(\dot{\underline{v}} - \tau\,\ddot{\underline{v}}\right) = \underline{F}_{külső,1,0}$$ Most jól megmutattuk.