Bevezetés

Az elektromos tér jellemzéséhez elegendő két mennyiség,

- az elektromos térerősség

$$\underline{F} = q\underline{E}$$

- és a mágneses indukció

$$\underline{F} = q(\underline{v} \times \underline{B})$$

Ha megadjuk a rotációjukat és a divergenciájukat, akkor az már egyértelműen megadja a két mennyiséget.

Maxwell-egyenletek

$\mathrm{div}E(x,t) = \nabla E(x,t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,t)$ Gauss – tétel	$\mathrm{rot}E(x,t) = \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ Faraday – törvény
$\mathrm{div}B(x,t) = \nabla B(x,t) = 0$	$\mathrm{rot}B(x,t) = \nabla \times B (=) \mu_0 j(x,t)$ Gerjesztési – törvény

Eltolási áram

A (IV), Gerjesztési-törvényt leíró egyenletet Ampere és Biot-Savart tanulmányozta, és azt vették észre, hogy ha ennek veszik a divergenciáját, akkor

$$\nabla(\nabla \times B) \overset{mat.m}{=} 0 = \nabla(\mu_0 j)$$

Ha a jobb oldali egyenlőség igaz lenne akkor nem lenne töltésmegmaradás! Tehát valamivel ki kell egészíteni az egyenletet, de mivel?

Nézzük meg egy *a* mennyiség megmaradásának mérlegegyenletét

$$\frac{\partial a}{\partial t} + divj_a = 0$$

térfogatra integrálva

$$\int_V d^3x \frac{\partial a}{\partial t} + \int_V d^3x\,divj_a = 0$$

ez első tagban az integrál és a deriválás átalakítható, mivel tudjuk, hogy az integrálási térfogat nem függ *a*-tól. A második tag a Gauss-tétel segítségével a következőképpen néz ki:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3xa + \int_F dFj_a = 0$$
$$\frac{d}{dt}A + \int_F dFj_a = 0$$

ennek alapján a (IV) egyenletet kiegészíthetjük egy eltolási árammal.
Így a következőképpen fest:

$$\boxed{\mathrm{rot}B = \nabla \times B = \mu_0\left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right)}$$

Ellenőrizzük le, hogy tényleg helyesen egészítettük-e ki. Vegyük az új (IV) egyenletünk divergenciáját:

$$divrotB \overset{mat.m}{=} 0 = \mu_0\left(divj + \varepsilon_0 div\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

Az (I), azaz a Gauss-tétel felhasználásával azt kapjuk

$$divj + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ami nem más, mint az elektromos töltés megmaradás.

1 A hullámegyenlet
és általános megoldása

1.1.Vektor- és skalár potenciál

Csökkentsük az ismeretlen mennyiségeink számát, úgy hogy a homogén egyenletek teljesüljenek.

Vezessünk be egy $A(x,t)$ vektorpotenciált, amit a következőképpen definiálunk

$$\boxed{\mathrm{rot}A(x,t)=B(x,t)} \tag{1.1.1}$$

így automatikusan teljesül a (III), azaz $divB=0$ egyenletünk.
Ezt az új mennyiséget beleírom a (II), azaz a Indukció-törvénybe

$$rotE=-rot\frac{\partial A}{\partial t}$$
$$rot\left(E+\frac{\partial A}{\partial t}\right)=0$$

mat. módszerekből megtanultuk, hogy ha valaminek a rotációja nulla, akkor a valami előállítható egy skalár függvény gradienseként.

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t}+E=-\mathrm{grad}\varphi} \tag{1.1.2}$$

Tehát most 4db mennyiséggel ($A(x,t)$ vektorpotenciál 3db és $\phi(x,t)$ skalárpotenciál 1db) kell foglalkoznunk, az eddigi 6db helyett ($E(x,t)$ és $B(x,t)$).

Már csak az vár ránk, hogy $A(x,t)$ és $\phi(x,t)$ mennyiségeket definiáljam, de nem egyértelműek, mert

$$A'=A+grad\Lambda \tag{1.1.3}$$

is használhatnám, mivel a második tag eltűnik mikor veszem a rotációját. De E-t megváltoztatná.

Követeljük meg, hogy $E=E'$. És írjuk bele a (1.1.2) egyenletbe

$$\begin{aligned} E=E'&=-\dot{A}'-grad\phi' \\ &=-\dot{A}-grad\dot{\Lambda}-grad\phi' \\ &=-\dot{A}-grad\left(\dot{\Lambda}+\phi'\right) \\ &=-\dot{A}-grad\phi \end{aligned}$$

tehát ebből az következik, hogy ϕ is transzformálódik

$$\phi'=\phi-\dot{\Lambda} \tag{1.1.4}$$

Az (1.1.3) és az (1.1.4) összefüggéseket mérték transzformációknak nevezzük. $\Lambda(x,t)$ tetszőleges skalárfüggvénnyel lehet transzformálni, amelyre mértékinvariáns az $E(x,t)$ és $B(x,t)$ mérhető mennyiségek.

1.2.Mértékrögzítő feltételek

Konkrét számolások esetén nagyon kényelmes sokszor bevezetni egy olyan feltételt, ami a mértékszabadságot korlátozza, a mértéket rögzíti. Ez a fizikai végeredményt nem befolyásolja, de leegyszerűsíti a számolást, mert bizonyos változókra könnyebben megoldhatóvá teszi az egyenleteket és így a maradék probléma is leegyszerűsödik.

Végtelen sok mérték transzformációt lehetne megemlíteni, de kettőt emelnék itt ki

- Coulomb mérték: sztatikai jelenségek leírására alkalmas

$$divA = 0$$

- Lorentz mérték: relativisztikus jelenségeknél alkalmas

$$\varepsilon_0 \mu_0 \dot{\phi} + divA = 0$$

1.3.Hullámegyenletek

1.3.1. $A(x,t)$ -re egyenlet

A (IV) egyenletet írjuk át vektorpotenciálos alakra az (1.1.1) felhasználásával.

$$rotrotA = \mu_0 \left[j + \varepsilon_0 \left(-\ddot{A} - grad\dot{\phi} \right) \right]$$

A kerek zárójelek közti kifejezés nem más, mint $\dot{E}$ (lsd. (1.1.2)). A bal oldalt vektoranalízis (lsd. *függelék*) módszerekkel átalakítva azt kapjuk hogy

$$\mathrm{grad(divA)} - \Delta \mathrm{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\mathrm{A}} + \mu_0 \mathrm{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \mathrm{grad}\dot{\varphi}$$

$$\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathrm{A(x,t)} = \mu_0 \mathrm{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \dot{\varphi} - \nabla \left(\nabla \mathrm{A} \right)$$

A kerek zárójelben lévő operátort D'Alambert operátornak nevezzük

$$\Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

A vektorpotenciálra kapott egyenlet

$$\Box\, A(x,t) = \mu_0 j - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \dot{\phi} - \nabla \left(\nabla A \right) \qquad (1.3.1.1)$$

Amíg nem vezetünk be mértékrögzítő feltételeket addig az nem hullámegyenlet. Ha a jobb oldalon nulla állna akkor síkhullám megoldást kapnánk.

1.3.2. $\phi(x,t)$ -re a Poisson egyenlet

A (I) egyenletet írjuk át skalárpotenciálos alakra az (1.1.2) felhasználásával.

$$div\left(-\dot{A}-\nabla\phi\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$
$$-\Delta\phi = div\dot{A}+\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

1.3.2.1.Coulomb mérték $\left(divA=0\right)$ felhasználásával tovább alakítható

$$-\Delta\phi_{Coulomb}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Aminek a megoldása a Coulomb potenciál

$$\phi_{Coulomb}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x\frac{\rho(x,t)}{|x-x'|}$$

A-ra a hullámegyenlet az (1.3.1.1) felhasználásával

$$\Box\, A(x,t)=\mu_0 j-\mu_0\varepsilon_0\nabla\dot{\varphi}$$

1.3.2.1.Lorentz mérték $\left(\varepsilon_0\mu_0\dot{\phi}+divA=0\right)$ felhasználásával tovább alakítható

$$-\Delta\phi_{Lorentz}=-\varepsilon_0\mu_0\ddot{\phi}+\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

hullámegyenletté átrendezve

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_{Lorentz}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

és A-ra a hullám egyenlet (1.3.1.1.) alapján

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)A_{Lorentz}=\mu_0 j$$

1.4.A hullámegyenletek megoldása a Green-függvény módszerével.

A következő hullámegyenlet megoldásait keressük:

$$\Box f(x,t) = s(x,t)$$

Az egyenlet linearitása miatt

$$f(x,t) = \int d^3x' \int dt' G(x,t,x',t')s(x',t')$$

Ha ezt beleírom a hullám egyenletbe

$$\int d^3x' \int dt' \Box G(x,t,x',t')s(x',t') = s(x,t) \tag{1.4.1}$$

A δ tulajdonságait felhasználva

$$\int d^3x' \int dt' \Box G(x,t,x',t')s(x',t') = \int d^3x' \int dt' \delta(x-x')\delta(t-t')s(x',t')$$

Látszik, hogy a Green-függvény a következővel egyenlő

$$\Box G(x,t,x',t') = \Box G(x-x',t-t') = \delta^3(x-x')\delta(t-t')$$

1.4.1.fourier transzformáció

Fourier módszerrel oldjuk meg az egyenletünket. Részszámításnak nézzük meg, hogy mi az $f(x,t)$ és $s(x,t)$ Fourier transzformáltja

$$f \xrightarrow{F} f(x,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(k,\omega) e^{i(kx-\omega t)}$$

$$s \xrightarrow{F} s(x,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{s}(k,\omega) e^{i(kx-\omega t)}$$

Így a hullámegyenletünk Fourier transzformációja

$$\Box f = s \xrightarrow{F} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(k,\omega) \Box e^{i(kx-\omega t)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{s}(k,\omega) e^{i(kx-\omega t)}$$

Most már ki tudjuk számolni a D'Alambert operátor hatását

$$\Box e^{i(kx-\omega t)} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) e^{i(kx-\omega t)}$$

Kihasználjuk, hogy minden függvény Fourier integrálja egyértelmű és a nullát nullával tudjuk előállítani, és az egyenletet nullára rendezve

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{f}(k,\omega)-\tilde{s}(k,\omega)=0 \qquad (1.4.1.1)$$

Készen is vagyunk mivel $s(k,\omega)$-t ismerem és abból $f(x,t)$-t ki tudom számolni.

1.4.2. $f(x,t)$ visszahelyettesítéssel való értéke

A (1.4.1.1) összefüggés az $f(x,t)$-re a következő adja

$$f(x,t)=\int d^3x'\int dt'G(x-x',t-t')s(x',t')=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\tilde{s}(k,\omega)e^{i(kx-\omega t)}$$

$$=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\int d^3x'\int dt'e^{-i(kx'-\omega t')}s(x',t')e^{i(kx-\omega t)}$$

A (1.4.1) összefüggést felhasználva

$$G(x-x',t-t')=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}e^{i[k(x-x')-\omega(t-t')]} \qquad (1.4.2.1)$$

Felírtuk a Green-függvényt, de el kell végeznünk az integrálást, ahol szingularitás is van. Függ az integrál értéke attól hogy értelmezzük, végtelen sok értéket adhatunk neki, de fizikai értelemhez kell majd illesztenünk.

1.4.3.retardált és avangált potenciálok

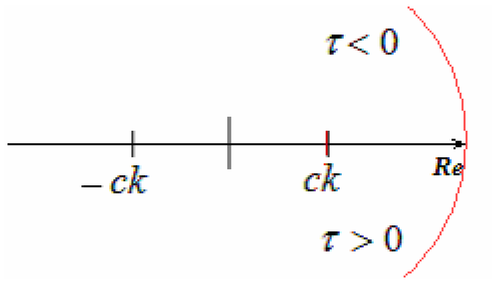
Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessünk be egy új változót

$$[\tau=t-t']$$

A (1.4.2.1) integráljával számítsuk ki, fizikai tartalom felhasználásával. Bontjuk parciális törtekre, úgy hogy a szingularitások, jó látszódjanak

$$G(x-x',t-t')=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{ik(x-x')}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{c}{2k}\left[\frac{1}{\omega+ck}-\frac{1}{\omega-ck}\right]e^{-i\omega\tau} \qquad (1.4.3.1)$$

Tehát ez egy két pólussal rendelkező analitikai függvény amit a komplex számsíkon körintegrállá lehet átalakítani.



Most kell beletenni a fizikát, mégpedig úgy hogy *ck* pólusokat megfelelően kell infitezimálisan fel, illetve lefelé tolni, attól függően, hogy milyen esetben szeretnénk járulékot kapni.

Elvárjuk a megoldástól, hogy $\tau < 0$-ra nulla legyen, azaz a hatás után történjen valami. Ehhez a két pólust lefele kell tolni, matematikailag: $\omega \to \omega - i\varepsilon$, ahol $\varepsilon \to 0$-hoz.

Tehát a (1.4.3.1) összefüggés $\tau < 0$-ra nullát ad és $\tau > 0$-ra pedig, a Reziduum tétel segítségével

$$G(x-x',t-t') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-x')} \left(-\frac{c}{2k} i\right) \left(e^{ick\tau} - e^{-ick\tau}\right)$$

Az integrál kiszámításához áttérek polárkoordinátákra.

$$\begin{bmatrix} d^3k = dkk^2 - d\cos\Theta d\varphi \\ \underline{k}(\underline{x}-\underline{x}') = k\,|\,\underline{x}-\underline{x}'\,|\cos\Theta \end{bmatrix}$$

Áttérés után a következő képen néz ki az egyenletünk

$$G(x-x',\tau > 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dkk^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\cos\Theta \left(\frac{c}{2ki}\right) e^{ik|x-x'|\cos\Theta} \left(e^{ick\tau} - e^{-ick\tau}\right)$$

Az integrálás során felhasználjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \int d\varphi = 2\pi \\ \int d\cos\Theta = \int d\frac{k}{|x-x'|} \\ \delta(|x-x'| - c\tau) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(|x-x'|-c\tau)} \end{bmatrix}$$

Tehát azt kapjuk a Green-függvényre

$$G(x-x',t-t'>0) = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{|x-x'|}\delta\left(|x-x'| - c(t-t')\right) - \frac{c}{4\pi}\frac{1}{|x-x'|}\delta\left(|x-x'| + c(t-t')\right)$$

A második δ eltűnik az adott térrészben.
Éivel a δ páros függvény ezért

$$G(x-x',t-t'>0)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-x'|}\delta\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{c}\right)$$

Retardálás: $\frac{x-x'}{c}$ idővel korábbi esemény hat az adott helyre.
Avangálás: mind a két pólust felfele toljuk és akkor a jövő hat a jelenre

1.4.4.megoldások csoportosítása

A partikuláris megoldása a retardált potenciálnak a következő

$$f_{\mathrm{Re}atardált}(x,t)=\int d^3x'\int dt'\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-x'|}\delta\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{c}\right)s(x',t')$$

$$\boxed{f_{\mathrm{Retardált}}(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\frac{s\left(x',t-\frac{|x-x'|}{c}\right)}{|x-x'|}}$$

Homogén egyenlet megoldása (általános megoldás)

$$\Box f(x,t)=0$$

ha megnézem az operátor hatását, akkor könnyen belátható, hogy ennek csak akkor lehet megoldása, ha fenáll a következő diszperziós reláció

$$\omega=\pm c|k|$$

$f_{homogén}$-t a Bernoulli módszer (változók szétválasztása) segítségével határozhatjuk meg, lsd. Diff II. vagy Eldin gyak.

2 A mechanikai megmaradási tételeinek kiterjesztése elektromechanikai rendszerekre

2.1.Megmaradási tételek

Általában a következő alakba írható fel egy *A* mennyiség megmaradása

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \mathrm{div} j_A = 0$$

ahol ρ_A a fizikai mennyiség sűrűsége és j_A az áramsűrűsége.

2.1.1.elektromos részecskére ható erők

Elektromos töltéssel rendelkező mozgó töltéssel a mágneses és az elektromos tér is kölcsön hat, mégpedig az x_i helyen lévő és $\dot{x}_i$ sebességgel mozgó részecskére

$$F_i = e_i E(x_i, t) + \dot{x}_i \times B(\dot{x}_i t)$$

erő hat. Folytonos töltés eloszlásra

$$f(x,t) = \rho(x,t)E(x,t) + j(x,t) \times B(x,t) \qquad (2.1.1.1)$$

ahol $f(x,t)$ az erő sűrűség, $\rho(x,t)$ a töltés sűrűség és $j(x,t) = \rho(x,t)v(x,t)$ áramsűrűség.

2.1.2.a mechanikai energia-megmaradás általánosítása

A munka tételt alkalmazva

$$\frac{dE_{mechanikai}}{d} = \int_V d^3 x v(x,t) f(x,t) \qquad \leftarrow \text{teljesítmény sűrűség}$$

$$= \int_V d^3 x v(x,t)\rho(x,t)E(x,t) + v(x,t)\big(j(x,t) \times B(x,t)\big)$$

a második tag nulla mivel, $v(x,t) \perp j(x,t) \times B(x,t)$, tehát azt kapjuk

$$= \int_V d^3 x j(x,t)E(x,t) \qquad (2.1.2.1)$$

Ebből kell kiküszöbölnünk a $j(x,t)$-et, hogy csak térmennyiségek maradjanak.

A (IV)-ből az áramsűrűség kifejezhető

$$j = \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times B - \varepsilon_0 \mu_0 \dot{E}\right)$$

Ezt felhasználva a (2.1.2.1) összefüggés a következő képen módosul

$$= \int_V d^3x \left[\frac{1}{\mu_0} rotB - \varepsilon_0 \dot{E}\right] E \qquad (2.1.2.2)$$

A két tag tovább alakítva

a (2.1.2.2) egyenlet két tagjának a részletszámítását, itt külön végzem el.

– első tag:

$$-\varepsilon_0 \int_V d^3x E\dot{E} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V d^3x \frac{\partial E^2}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{d}{dt}\int_V d^3x E^2$$

– második tag

$$\frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x ErotB = \frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x E_i \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k$$

az E-t beviszem a B mellé és az így hozzá adott járulékot levonom, ezt a trükköt még sokszor fel fogjuk használni a későbbiekben.

$$= \frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x \varepsilon_{ijk} \partial_j (E_i B_k) - \frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x B_k \varepsilon_{ijk} \partial_j E_i$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x \left[-\partial_j \left(\varepsilon_{ijk} E_i B_k\right)\right] + \frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x \varepsilon_{kji} \partial_j E_i B_k$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x div(E \times B) + \frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x BrotE$$

az indukciós törvény felhasználásával

$$= \frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x div(E \times B) - \frac{1}{2\mu_0}\frac{d}{dt}\int_V d^3x B^2$$

Tehát a munkatételből azt kaptuk

$$\frac{dE_{mech}}{dt} = -\frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x div(E\times B) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_V d^3x\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)$$

átcsoportosítva

$$\frac{d}{dt}\left[E_{mech} + \frac{1}{2}\int_V d^3x\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)\right] + \frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x div(E\times B) = 0$$

Gauss tétel alkalmazása után

$$\frac{d}{dt}\left[E_{mech} + \frac{1}{2}\int_V d^3x\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)\right] + \frac{1}{\mu_0}\int_F dF(E\times B) = 0$$

A második tag:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_V d^3x\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)\right]$$

az elektromágneses tér által hordozott energiának az időegységre jutó megváltozásaként értelmezhetjük.

A harmadig tag:

$$\frac{1}{\mu_0}\int_F dF(E\times B)$$

időegység alatt a térfogatból kiáramló energia, elektromágneses sugárzás formájában.

Végtelenül ki térfogatot vizsgálva, megkapjuk az elektromágneses energia sűrűséget és az elektromágneses energiaáram-sűrűséget.

$$\rho^{(em.)}_{E(x,t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right) \qquad (2.1.2.3)$$

$$j^{em.}_{E(x,t)} = \frac{1}{\mu_0}(E\times B) = S = Poynting - vektor \qquad (2.1.2.4)$$

2.1.3.az elektromos tér impulzusa és impulzus árama

A mechanikai impulzus tétel segítségével. Mivel az impulzus vektormennyiség, ezért áramsűrűsége kétindexes tenzor. Tehát érdemes komponensenként számolni.

A mechanikai impulzustétel az i-edik komplonensre

$$\left(\frac{d}{dt}P_{mech.}\right)_i = \int_V d^3x\left(\rho E_i + \varepsilon_{ijk} j_j B_k\right)$$

A cél megint a források kiirtása, térerőségekkel helyettesítve. A Gauss és a gerjesztési törvényt segítségével

$$\rho = \varepsilon_0 \mathrm{div}E \qquad \text{és} \qquad j = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}B - \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

ezeket beírva az eredeti egyenletünkbe

$$= \int_V d^3x\left[\varepsilon_0 E_i \partial_j E_j + \frac{1}{\mu_0}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn}\partial_m B_n B_k - \varepsilon_0\varepsilon_{ijk}\dot{E}_j B_k\right]$$

az utolsó tagot tovább alakíthatom teljes idő deriváltá, úgy hogy levonom azt a részt amivel elrontanám

$$-\varepsilon_0\varepsilon_{ijk}\dot{E}_j B_k = -\varepsilon_0\varepsilon_{ijk}\left[\frac{d}{dt}\left(E_j B_k\right) - E_j\dot{B}_k\right]$$

A $\dot{B} = -\mathrm{rot}E$ felhasználásával azt kapom, az egész jobb oldalra, hogy

$$= \int_V d^3x\left[\varepsilon_0 E_i \partial_j E_j + \frac{1}{\mu_0}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn}\partial_m B_n B_k - \varepsilon_0\varepsilon_{ijk}\left[\frac{d}{dt}\left(E_j B_k\right) - E_j\left(\mathrm{rot}E\right)_k\right]\right]$$

Tehát arra jutunk

$$\frac{d}{dt}\left[\left(P_{mech.}\right)_i + \varepsilon_0\mu_0\int_V d^3x\frac{1}{\mu_0}\left(E\times B\right)_i\right] = \int_V d^3x\left[\varepsilon_0 E_i \partial_j E_j - \varepsilon_0\varepsilon_{ijk}E_j\varepsilon_{kmn}\partial_m E_n\right]$$
$$+\int_V d^3x\left[\frac{1}{\mu_0}B_i\partial_j B_j - \frac{1}{\mu_0}\varepsilon_{ijk}B_k\varepsilon_{jmn}\partial_m B_n\right]$$

A $divB$-t tartalmazó tagot csak azért adtuk hozzá, hogy szimmetrikus legyen, a két térerősségre az összefüggésünk. Mivel $divB = 0$ ezért nem rontja el az egyenletünket.

A szimmetria miatt elegendő E-re megnézni, hogy mivé alakítható és utána az állandók cseréjével már B-t is tudom.

$$\varepsilon_0 E_i \partial_j E_j - \varepsilon_0 \varepsilon_{ijk} E_j \varepsilon_{kmn} \partial_n \partial_m E_n = \varepsilon_0 \left\lfloor E_i \partial_j E_j - \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) E_j \partial_m E_n \right\rfloor$$

$$= \varepsilon_0 \left(E_i \partial_j E_j - E_j \partial_j E_i\right)$$
$$= \varepsilon_0 \left[\partial_j \left(E_j E_i\right) - \partial_i \left(\frac{1}{2} E_j^2\right)\right]$$

Az elektromos tér impulzus áramsűrűségére bevezethető a következő kétindexes tenzor, a divergenciát azért emeljük ki belőle hogy mikor mérlegegyenlet alakra hozzuk, akkor szebb legyen.

$$\pi_{ij}^{(El.)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(E_l^2 \delta_{ij} - 2 E_i E_j\right) \tag{2.1.3.1}$$

Hasonló képen a mágneses tér impulzus áramsűrűségére is bevezethető egy kétindexes tenzor

$$\pi_{ij}^{(Mágn.)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \left(B_l^2 \delta_{ij} - 2 B_i B_j\right) \tag{2.1.3.2}$$

Tehát a mechanikai impulzus tételből azt kapjuk

$$\frac{d}{dt}\left(P_i^{mech.} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_V d^3x \frac{1}{\mu_0} \left(E \times B\right)_i\right) = -\int_V d^3x \partial_j \left(\pi_{ij}^{(El.)} + \pi_{ij}^{(Mágn.)}\right)$$

A Gauss tétel segítségével alakítsuk mérlegegyenlet alakúra az előbb kapott összefüggésünket.

$$\frac{d}{dt}\left(P_i^{mech.} + P_i^{em.}\right) = -\int_F dF \pi_i^{em.}$$

ahol a

$$P_i^{em.} = \frac{1}{c^2} \int_V d^3x \left(E \times B\right) = \frac{1}{c^2} j_E = S$$

és

$$\pi_{ij}^{(El.)} + \pi_{ij}^{(Mágn.)} = \pi_{ij}^{(em.)}$$

tenzort Maxwell-féle feszültségtenzornak nevezzük.

Megjegyzés

A foton hipotézis az elektromágneses sugárzást elemi energia csomagok áramlásaként értelmezi. Eszerint, ha egységnyi felületen, időegység alatt n foton halad át, akkor

$$p^{em.} = \frac{1}{c^2} j_E$$

Felhasználva a foton hipotézist

$$np^{em.} = \frac{1}{c^2} n\hbar\omega c$$

$$p^{em.} = \frac{1}{c}\hbar\omega$$

A diszperziós relációból

$$p^{em.} = \hbar k$$

Ezt az összefüggést de Broglie javaslatára minden impulzust hordozó objektumra általánosítva használják 1924 óra.

Tekintsünk, egy V térfogatú dielektrikumot pl. gravitációs erőtérben, amelyre külső elektrosztatikai tér is hat. A mechanikai egyensúly feltétele:

$$\int_V \mathrm{d}^3x f_i^{\mathrm{grav.}} + \int_F \mathrm{d}F_j \pi_{ij}^{\mathrm{em.}} = 0$$

Ez a feltétel alaktanilag a rugalmas anyagok egyensúlyának feltételével azonos, amennyiben a Maxwell-féle feszültségtenzor, a rugalmasságtanban megismert feszültségtenzorral azonosítjuk.

Maxwell felismerte ezt a megfeleltetést, és az elektromos, valamint a mágneses tér keltette felületi erők egy speciális rugalmas közeg, az éter hatásának tulajdonította. De ezt a speciális közeget, nem sikerült kísérletileg kimutatni.

Az elektrodinamikai hatások értelmezéséhez nincs szükség éter létezésére.

2.2.Fizikai mennyiségek spektrális felbontása periódusidőre átlagolva

Fourier transzformációval így írhatóak le a fizikai mennyiségek

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_\omega(x,t) e^{-i\omega t}$$

A transzformáció után a térerősségek a következő alakot öltik

$$\mathrm{E}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \mathrm{E}_\omega(\mathrm{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \quad \mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \mathrm{B}_\omega(\mathrm{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}$$

A valósrész adja a térerőségek "amplitúdóját", mint optikában.
A Maxwell egyenletek a következőképpen módosulnak

$$divE_w(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_\omega(x,t) \quad \rightarrow \quad rotE_\omega(x) = -(-i\omega) B_\omega(x)$$
$$divB_\omega(x) = 0 \quad \rightarrow \quad rotB_\omega(x) = \mu_0 j_\omega(x) + \varepsilon_0 \mu_0 (-i\omega) E_\omega(x)$$

Mivel fourier térben az időszerinti deriválás egy $-i\omega$ szorzót hoz le.

2.2.1.periódusidőre átlagolt energia sűrűség

Energia sűrűség spektrális felbontása periódusidőre átlagolva

$$\bar{\varepsilon}_\omega^T = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_V d^3x \frac{1}{2}\left(E_\omega e^{-i\omega t} + E_\omega^* e^{i\omega t}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(E_\omega e^{-i\omega t} + E_\omega^* e^{i\omega t}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} 2\varepsilon_0 \int_V d^3x \,|\, E_\omega^2 \,|$$

Ami már tisztán valós.

3 Az elektrosztatikai feladatok megoldási módszerei

3.1.Elektrosztatikai feladatok

Idő független töltéseloszlások elektromos potenciáljának meghatározásához, a Poisson kell megoldanunk.

$$\Delta\phi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{3.1.1}$$

A linearitás miatt, egy sztatikus Green függvény segítségével kereshetjük a megoldást

$$\phi(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3x' G(x,x')\rho(x')$$

Ezt visszaírva a hullámegyenletbe

$$\int_V d^3x' \Delta G(x,x')\rho(x') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3x \delta^3(x-x')\rho(x') \tag{3.1.2}$$

Az egyértelműség és linearitás miatt

$$\Delta G(x,x') = -\delta^3(x-x')$$

Ahhoz, hogy a határfeltételeket is meg tudjuk adni használjuk fel a következő matematikai összefüggést, ami fennáll minden elegendő számúszor deriválható, egyébként tetszőleges $f(x)$ és $g(x)$ függvényre

$$\int_V d^3x\left[f(x')\Delta g(x') - g(x')\Delta f(x')\right] =$$

antiszimmetriazált alakot – a plusz járulékokat levonom – alakítom felületi integrállá.

$$\begin{aligned}
&= \int_V d^3x' \{[\nabla(f\nabla g) - \nabla f\nabla g] - [\nabla(g\nabla f) - \nabla f\nabla g]\} \\
&= \int_F dF\left(f\nabla g - g\nabla f\right)
\end{aligned}$$

fizika ebből úgy lesz, hogy f az elektrosztatikai feladat Green függvénye és g, pedig a Poisson-egyenlet keresett megoldása.

Ezt az azonosságot felhasználva a (3.1.2.) egyenletbe

$$\int_V d^3x' \left\{ \phi\left[-\delta^3(x-x')\right] + G(x,x')\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \right\} = \int_F dF\left[\phi(x_F)\nabla_{x_F} G(x_F,x') - G(x_F,x')\nabla_{x_F}\phi(x_F)\right]$$

ahol x_F befutja a felületet

$$\phi(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3x' G(x,x')\rho(x') - \int_F dF\left[\phi(x_f)\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \phi}{\partial n}\right] \qquad (3.1.3)$$

ahol n a felület normálisa, $\partial/\partial n = n\nabla$ pedig a felületi pontban kiszámolt gradiens vektornak a felület külső normális irányára számított vetülete.

A (3.1.3) első tagja kielégíti a Poisson egyenletet, a második tag a peremfeltételt tartalmazza.

Két fontos peremfeltételt probléma van, melyre egyértelmű a Poisson egyenlet

Dirichlet-peremfeltétel:

$$G_{Dirichlet}(x_F, x) = 0 \qquad (3.1.4.)$$

azaz, a felületen tűnjön el.

Neumann-féle határfeltétel:

$$\frac{\partial}{\partial n} G_{Neumann} = C \qquad (3.1.5)$$

ahol C egy nullától különböző tetszőleges konstant, mert ha nulla lenne akkor ellentmondást kapnánk mégpedig a következőt:

$$\int_F dF \frac{\partial}{\partial n} G_{Neumann} = 0 = \int_F dF \nabla G(x_F, x) = \int_V d^3x' G(x,x') = -\int_V d^3x\delta(x-x') = -1$$

3.2.Elektrosztatikai feladatok megoldása

3.2.1.a Dirichlet-feladat megoldása

Az előbb említettek szerint a (3.1.4.) határfeltételnek kell teljesülnie. A (3.1.2) egyenletet kielégítő függvény egy x' pontban elhelyezett egységnyi nagyságú ponttöltés tere, amely a vizsgált tartományon kívül elhelyezkedő, úgynevezett tükörtöltések terével kombinálva képes a (3.1.4.) határfeltétel kielégítésére.

Tehát a megoldás ennek alapján

$$\varphi_{\text{Dirichlet}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3x' G_{\text{Dirichlet}}(x,x')\rho(x') + \int_F dF\varphi(x_F)\frac{\partial}{\partial n'}G_{\text{Dirichlet}}(x,x_F)$$

Példa:

Földelt ideális fémsík által határolt tartományban a síktól *d* távolságra elhelyezkedő *Q* ponttöltés potenciálja

A potenciál következő lesz

$$\phi_{\text{Dirichlet}_{\text{példa}}}(x,x') = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{|x-x'|} + \frac{1}{4\pi}\frac{-Q}{|x-x'_T|}$$