Elektrodinamika

1. óra

0) El. din.

- térelmélet: $\underline{x}, t$ $\quad \underbrace{E(\underline{x}, t),\ \underline{B}(\underline{x}, t)}$

ezek a tér $\forall$ pontjában
értelmezhetőek $\forall$ időpontban
$\Downarrow$

- ezek változásával foglalkozik az eldin., a hatások lokális terjedésével, nem egy adott részecske mozgásával
- folytonos (nem pontszerű) dinamikai változók

1) Maxwell (James Clark) - egyenletek:

I. $\operatorname{div} \underline{E}(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}$ $\quad$ ε_0: vákuum diel. állandó

II. $\operatorname{div} \underline{B}(\underline{x}, t) = 0$ $\quad$ (mágneses töltés tap. szerint nincs)

de a fizika nem zárja ki elvileg
(mágneses monopólus létezhet)
↳ Dirac (1931): a mágneses monopólus nem vezet ellentmondáshoz a kvantummech.-ban

tfh. voltak → ←
→ hova tűntek?
kozmológiai inflációs elmélet: úgy „felhígultak" a mágneses mon.-ok az univ. tágulásánál, hogy eltűntek

III. $\operatorname{rot} \underline{E}(\underline{x},t) = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}(\underline{x},t)$

IV. $\operatorname{rot} \underline{B}(\underline{x},t) = \left(\underline{j}(\underline{x},t) \cdot \cancel{\mu_0} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \underline{E}(\underline{x},t)}{\partial t}\right) \cdot \mu_0$

~~töltés~~megmaradás (mérleg / kontinuitási egyenlet)

– ~ div. egyenletből következik!

$$I \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \rho(\underline{x},t)}{\partial t} = \varepsilon_0 \cdot \operatorname{div} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}(\underline{x},t) = \cancel{\varepsilon_0} \operatorname{div}\left[\frac{1}{\mu_0} \cdot \operatorname{rot} \underline{B}(\underline{x},t) - \underline{j}(\underline{x},t)\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho(\underline{x},t)}{\partial t} = -\cancel{\ } \cdot \operatorname{div} \underline{j}(\underline{x},t)}$$

(ha a IV. tv.-ből $\frac{\partial E}{\partial t}$-t kihagyjuk $\Rightarrow \operatorname{div} \underline{j} = 0$ lesz

$\Downarrow$

Maxwell felfedezte az ellentmondást $\Leftarrow$ ez csak forrásmentes áramokra (áramkörökre) igaz

$\frac{\partial E}{\partial t}$

2) Mértéktranszformáció, vektorpot. ~~Homogén egyenlet megoldása~~:

a) $\operatorname{div} \underline{B} = 0 \rightarrow \underline{B}(\underline{x},t) = \operatorname{rot} \underline{A}(\underline{x},t)$ alakban írható

$$\operatorname{rot}\left(\underline{E}(\underline{x},t) + \frac{\partial \underline{A}(\underline{x},t)}{\partial t}\right) = 0 \Leftarrow \text{III}$$

$\Downarrow$

konzervatív erőtér → grad.-e valamilyen skalárpot.-nak

$$\underline{E} + \underline{\dot{A}} = -\operatorname{grad} \phi(\underline{x},t)$$

$$\operatorname{div} \underline{E} = -\operatorname{div}\left(\operatorname{grad} \phi(\underline{x},t) + \underline{\dot{A}}\right) = -\Delta\phi - \operatorname{div} \dot{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho(\underline{x},t)$$

$$-\Delta\phi = \operatorname{div} \dot{A} + \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho(\underline{x},t)$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{A}(\underline{x},t) = \mu_0 \cdot \left[\underline{j}(\underline{x},t) - \varepsilon_0 \cdot \left(\underline{\ddot{A}} + \mathrm{grad}\,\dot{\phi}\right)\right]$$

⇓

b) ?: Egyértelmű-e $\underline{E}$ és $\underline{B}$ adott ϕ és $\underline{A}$ esetén? Nem.

pl. $\underline{A}' := \underline{A} + \underline{\nabla}\Lambda$ (lambda) ← nem derivált

$$\mathrm{rot}\,\underline{A}' = \underline{B}' = \mathrm{rot}\,\underline{A} + \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla}\Lambda) = \mathrm{rot}\,\underline{A} = \underline{B}$$

⇓

<u>mértékszabadság</u> (mértékinvariancia)

DE ilyenkor $\underline{E}$ megvált. !! , ha ϕ változatlan

$$\underline{E}' = -\underline{\dot{A}}' - \mathrm{grad}\,\phi + ? = -\underline{\dot{A}} - \mathrm{grad}\,\phi - \mathrm{grad}\,\dot{\Lambda} + ? = \underline{E} - \mathrm{grad}\,\dot{\Lambda} + ?$$

DE $\phi'(\underline{x},t) = \phi - \dot{\Lambda}$ esetén $? = \mathrm{grad}\,\dot{\Lambda} \Rightarrow \underline{E}' = \underline{E}$

$$\boxed{\underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}\Lambda(\underline{x},t);\quad \phi'(\underline{x},t) = \phi - \dot{\Lambda}}$$ <u>mértéktranszformáció</u>

↓

ilyenkor $\underline{E}$ és $\underline{B}$ = áll

⇓

c) <u>Mértékfeltétel</u>: $\Lambda(\underline{x},t)$ megválasztása

↓

ez tetszőleges lehet, de hagyományosan 2-t szoktunk

– Coulomb-mérték: $\mathrm{div}\,\underline{A}(\underline{x},t) = 0$ ← így választjuk meg Λ-t

$$\Delta\phi_c(\underline{x},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\underline{x},t)$$ ← statika esetében (időfüggetlen esetben) is ezt kaptuk (Poisson-egyenlet)

↓

ennek a megoldása

a Coulomb-tv. (időfüggő)

$$\phi_c(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int d^3x' \,\frac{\varrho(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

rot rot $\underline{A}$ = ?

<u>jelölések</u> : $\left(\text{rot}\, \underline{V}(\underline{x},t)\right)_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j V_k$ $\qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$

$\Uparrow$

$i,j,k = 1,2,3$ $\qquad \varepsilon_{123} = 1 \qquad \varepsilon_{ijk} = (-1)^{P(ijk)}$

$\uparrow$ cserék száma

$$\left(\sum_{k=1,2,3}\right) \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

$\uparrow$

néma index

konv. $\qquad \varepsilon_{ink}\, \varepsilon_{mnk} = 3\cdot \delta_{im} - \delta_{im} = 2\,\delta_{im}$

$\Downarrow$

$$\left(\text{rot rot}\, \underline{A}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \left(\text{rot}\, \underline{A}\right)_k = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, \varepsilon_{kmn}\, \partial_m A_n =$$

$$= \varepsilon_{kij}\, \varepsilon_{kmn}\, \partial_j \partial_m A_n = \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) \partial_j \partial_m A_n =$$

$$= \partial_i \partial_j A_j - \partial_j^2 A_i = \text{grad}_i\, \text{div}\, \underline{A} - \Delta A_i$$

DE Coulomb-felt. esetén: $\text{div}\, \underline{A} = 0$

$$-\Delta \underline{A}_C(\underline{x},t) + \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \ddot{\underline{A}}_C(\underline{x},t) = \mu_0 \left(\underline{j} - \varepsilon_0 \cdot \text{grad}\, \dot{\phi}_C\right)$$

$$\Box = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad \text{d' Alambert} \qquad \varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\Box\, \underline{A}_C(\underline{x},t) = \mu_0 \left(\underline{j} - \varepsilon_0 \cdot \text{grad}\, \dot{\phi}_C\right)$$

div $\Downarrow$

$$\text{div} \underbrace{\left(\underline{j}(\underline{x},t) - \varepsilon_0\, \text{grad}\, \dot{\phi}_C(\underline{x},t)\right)}_{} = 0$$

$\underline{j}_T$ (transzverzális) $\rightarrow$ ez forrásmentes

$\Box\, f(\underline{x},t) = \underline{v}(\underline{x},t)$ $\quad$ d' Alambert egyenlet

— Lorentz-mérték: $\operatorname{div} \underline{A}_L(\underline{x},t) + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}_L(\underline{x},t) = 0$

$$-\operatorname{div} \underline{\dot{A}}_L = \frac{1}{c^2}\ddot{\phi}_L$$

$$-\Delta\phi_L + \frac{1}{c^2}\ddot{\phi}_L = \Box\phi_L(\underline{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho(\underline{x},t)$$

$$-\Delta\underline{A}_L + \frac{1}{c^2}\underline{\ddot{A}}_L = \mu_0\cdot\underline{j} \underbrace{- \frac{1}{c^2}\operatorname{grad}\dot{\phi}_L - \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{A}_L}_{-\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\underline{A}_L + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}_L\right) = 0}$$ ← rot rot $\underline{A}$-ból

$$\Box\underline{A}_L(\underline{x},t) = \mu_0\cdot\underline{j}(\underline{x},t)$$

$$\Box\begin{pmatrix}\phi(\underline{x},t)\\ \underline{A}(\underline{x},t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\\ \mu_0\,\underline{j}\end{pmatrix}$$ → hullámegyenlet

3) További megmaradási tételek a Maxwell-egy.-ből:

a) Lorentz-erő $\underline{f}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\,\underline{E}(\underline{x},t) + \underline{j}(\underline{x},t)\times\underline{B}(\underline{x},t)$

$$\underline{j}_{(\underline{x},t)} = \underline{v}(\underline{x},t)\cdot\rho(\underline{x},t)$$

$$\frac{dE_{mech}}{dt} = \int_V d^3x \underbrace{\underline{v}(\underline{x},t)\cdot\underline{f}(\underline{x},t)}$$ (energiatétel)

$$\underline{v}\cdot(\rho\cdot\underline{E} + \underbrace{\underline{j}\times\underline{B}}_{\perp\underline{v}}) = \underline{v}\cdot\rho\underline{E}$$

mi kapcsoltuk össze a kettőt az előző energiák def.-ával

$$\frac{dE_{mech}}{dt} = \int_V d^3x\cdot\rho\cdot\underline{E}\cdot\underline{v} = \int_V \underline{j}_{(\underline{x},t)}\underline{E}(\underline{x},t)\cdot d^3x \xRightarrow{\text{Maxwell-egyenletek}}$$ mérlegegyenlet → elektromech. energiamegm.

2. óra

$$\underline{j} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\underline{B} - \varepsilon_0 \dot{\underline{E}} \quad \leftarrow \underline{j}\text{-t ki kell fejezni}$$

$$\frac{d\,\mathcal{E}^{(V)}_{mech}}{dt} = \int_V d^3x\, \underline{j}\,\underline{E} = \int_V d^3x \left[\frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\underline{B} - \varepsilon_0 \dot{\underline{E}}\right]\underline{E} =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{d}{dt}\int_V d^3x\, \underline{E}^2(\underline{x},t) - \frac{1}{2\mu_0}\frac{d}{dt}\int_V d^3x\, B^2(\underline{x},t) - \frac{1}{\mu_0}\int d^3x\, \mathrm{div}\left(\underline{E}\times\underline{B}\right)$$

msz:

bevittük B_k-t is ∂_j-hez; kompenzálás

$$\int d^3x\, E_i\, \varepsilon_{ijk}\, \partial_j B_k = \int d^3x \left[\underbrace{\partial_j\left(\varepsilon_{ijk} E_i B_k\right)}_{\substack{-\partial_j \varepsilon_{jik} E_i B_k \\ -\partial_j (\underline{E}\times\underline{B})_j \\ -\mathrm{div}(\underline{E}\times\underline{B})}} - \underbrace{\varepsilon_{ijk} B_k \partial_j E_i}_{+\varepsilon_{kji}\partial_j E_i B_k}\right] =$$

$$\underbrace{\varepsilon_{kji}\partial_j E_i}_{(\mathrm{rot}\,E)_k} B_k, \qquad (\mathrm{rot}\,E)_k = -\dot{\underline{B}}_k, \qquad \underbrace{-\dot{\underline{B}}_k \cdot B_k}_{-\frac{1}{2}\frac{d B^2}{dt}}$$

$$= -\int d^3x \left[\mathrm{div}\left(\underline{E}\times\underline{B}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}\right]$$

Legyen:

$$\boxed{\rho_{energia} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\underline{B}^2\right)} \quad \rightarrow \mathcal{E}_{em} = \int_V d^3x\, \rho_{energia}(\underline{x},t)$$

nem a forrásokon van, hanem ott, ahol az $\underline{E}, \underline{B} \neq 0$

Ekkor:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_{mech} + \mathcal{E}_{em}\right)_V + \int_F d\underline{F}\cdot \underline{j}_{energia}(\underline{x},t) = 0}$$

ahol $\underline{j}_{energia}(\underline{x},t) = \frac{1}{\mu_0}(\underline{E}\times\underline{B}) = \underline{S}$: Poynting -vektor

$\Rightarrow$ ez már egy kontinuitási egyenlet

(ha j $\oplus$ $\rightarrow$ kiáramlik az energia a felületen
$\downarrow$
csökken az energiasűrűség)

b) Impulzusmegmaradás:

$$\frac{d\underline{p}^{(V)}_{mech}}{dt} = \int_V d^3x \overbrace{\left(\rho(\underline{x},t)\,\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B}\right)}^{\text{Lorentz-erő}}$$

$\downarrow$

minden komponensre igaz a megmaradás,
de láttuk, hogy skalármennyiség áramát vektor
jelképezi

$\Downarrow$

vektormennyiség árama tenzor (3x3-as mátrix) lesz

$$\frac{dp_i^{(mech)}_V}{dt} = \int d^3x \left[\varepsilon_0 E_i \partial_j E_j + \varepsilon_{ijk}\left(\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}B - \varepsilon_0\dot{E}\right)_j B_k\right] =$$

B_k-t is beírtuk $\frac{\partial}{\partial t}$-hez

$$= \int_V d^3x \left[\varepsilon_0 E_i \partial_j E_j + \frac{1}{\mu_0}\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{jmn}\partial_m B_n)\cdot B_k - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{ijk}E_j B_k) + \varepsilon_0 \varepsilon_{ijk} E_j \underbrace{\dot{B}_k}_{-(\operatorname{rot}E)_k}\right]$$

$$\frac{d p_i^{(mech,V)}}{dt} + \frac{d}{dt}\int_V d^3x\, \underbrace{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}_{\frac{1}{c^2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu_0}(\underline{E}\times\underline{B})_i}_{S_i = \text{Poynting-vektor}} = \int_V d^3x \Big[\varepsilon_0 E_i \partial_j E_j - \varepsilon_0 \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} E_j \partial_m E_n$$

$$- \frac{1}{\mu_0}\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jmn} B_k \partial_m B_n\Big]$$

$$+ \frac{1}{\mu_0} B_i \underbrace{\partial_j B_j}_{\mathrm{div}\, B = 0}$$

a j.o. $\underline{E}$-ben és $\underline{B}$-ben szimm.

$$\underline{p}^{em} = \frac{1}{c^2}\underline{S}$$

(kvantumm. $\to \underline{S} = \hbar\omega c \to \underline{p}^{em} = \hbar \frac{\underline{\omega}}{c} = \hbar \underline{k}$)

ez volt

$$\text{j.o. } -\int_V d^3x\, \partial_j \underbrace{\Pi_{ij}}_{\text{impulzusáramsűrűség-tenzor}} \text{ alakú } = -\int_F df_j\, \Pi_{ij}$$

mx₁:

$$\varepsilon_{jik}\varepsilon_{jmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$$

mx₂:

$$\frac{1}{\mu_0}\Big[B_i \partial_j B_j - B_k \partial_i B_k + B_k \partial_k B_i\Big] = -\frac{1}{\mu_0}\partial_j\Big[\frac{1}{2}B_k^2 \delta_{ij} - B_i B_j\Big]$$

mx₃:

$$\partial_j \frac{1}{\mu_0}\Big[\frac{1}{2}B_k^2\delta_{ij} - B_i B_j\Big] = \frac{1}{\mu_0}\Big[\overbrace{B_k \partial_j B_k \delta_{ij}}^{B_k \partial_i B_k} - B_j \partial_j B_i - B_i \partial_j B_j\Big]$$

$$\Pi_{ij} = \varepsilon_0\Big(\frac{1}{2}\underline{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j\Big) + \frac{1}{\mu_0}\Big(\underline{B}^2\delta_{ij} - B_i B_j\Big)$$

$$\frac{d}{dt}\Big[\underline{p}^{(mech)} + \int_V d^3\, \underbrace{\underline{p}^{(em)}}_{\frac{1}{c^2}\underline{S}}\Big] + \int d\underline{f}\, \underline{\underline{\Pi}} = 0$$

↳ hasonló a rugalmasságtanhoz:

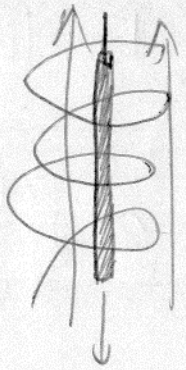
$$\int dV \text{ térfogati erők (külső erők)} + \int dA\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{felületi erő} \\ \text{(feszültség)}}}{\sigma} = 0$$

⇓

$\underline{\underline{T}}$: Maxwell-féle feszültségi tenzor

(ezért találták ki az "étermélelet" → olyan, mintha az elektromosság vmi közeg áramlása lenne)

$$\underline{r} \times \underline{p}^{(em)} = \underline{l}^{(em)}$$



van "bezárva" impulzus, mert van $\underline{E} \times \underline{B}$

⇓

Einstein-de Haas-kísérlet:

- ha ~~átkapcsoljuk a testet~~ ($\underline{B}$ előjelét váltj.), akkor mechanikai impulzusnak kell keletkeznie az imp. megmaradás miatt

Hullámegyenlet ált. megoldása:

$$\Box f(\underline{x},t) = \underbrace{s(\underline{x},t)}_{\text{forrás tag}}$$

ebben van a KF

$\swarrow$ $\downarrow$

partikuláris megoldása az inhomogén egyenletnek + általános megoldása a (homogén) egyenletnek

a) homogén mo.:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f(\underline{x},t) = 0 \qquad e^{i\underline{k}\underline{x} - i\omega t}$$

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) e^{i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)} = 0 \qquad \omega(k) = c|\underline{k}| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}|\underline{k}|$$

$\Downarrow$

c a fázissebesség !!

Fourier-sorfejtés:

$$f_{homogén}(\underline{x},t) = \int e^{i\underline{k}\underline{x} - i\omega(\underline{k})t}\, \tilde{f}(\underline{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$t = 0 \to f_{hom}(\underline{x},0) = \int e^{i\underline{k}\underline{x}}\, \tilde{f}(\underline{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$\Downarrow$

$$\tilde{f}(\underline{k}) = \int d^3x\, e^{-i\underline{k}\underline{x}} f_{hom}(\underline{x},0)$$

$\Downarrow$

a Fourier-együtthatókat a kezdeti feltételből kapjuk meg csoportsebesség:

$$\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} = c \; (\cdot \pm 1)$$

$\uparrow$

$\omega = c \cdot |\underline{k}|$

$\downarrow$

(az energiaterjedésnek ~~(nem)~~ nem mindig ugyanakkora lesz a sebessége, mint a csoportseb., pl. hullámvezetőkben ez különbözik)

valós térmennyiségek esetén:

$$\tilde{f}^*(\underline{k}) = \int d^3x \, e^{-i\underline{k}\underline{x}} f_{hom}(\underline{x}, 0) = \tilde{f}(-\underline{k})$$

$i \to -i$

~~$(\underline{x} \to -\underline{x}$ változócsere)~~

$$\boxed{\tilde{f}^*(\underline{k}) = \tilde{f}(-\underline{k})}$$

a Fourier-ehók között van összefüggés

ha ezt betartjuk, lineárkombinációt csinálhatunk így

b) inhomogén mo.:

$$\square_{\underline{x},t} f(\underline{x},t) = \sigma(\underline{x},t)$$

linearitás miatt

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \leftrightarrow \sigma_1 \\ f_2 \leftrightarrow \sigma_2 \end{array}\right\} \to \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 \to \alpha f_1 + \beta f_2$$

$$f(\underline{x},t) = \int d^3x' \int dt' \, G(\underline{x},t|\underline{x}',t') \, S(\underline{x}',t')$$

$\downarrow$

Green-fv.:

adott $\underline{x}', t'$ helyen lévő forrás
hogyan befolyásolja a t időben
$\underline{x}$ helyen lévő hullámot

a diffegy.-be behelyettesítve:

$$\int d^3x \int dt' \left(\Box_{\underline{x},t} G(\underline{x},t|\underline{x}',t') \right) S(\underline{x}',t') = \int d^3x' \int dt' \, \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}') \cdot$$

$$\cdot \, \delta(t-t') \, S(\underline{x}',t')$$

$$\boxed{\Box_{\underline{x},t} G(\underline{x},t|\underline{x}',t') = \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}') \, \delta(t-t')}$$ Green-fv.

$\downarrow$

8 változósnak látszik, de
$(\underline{x}, t, \underline{x}', t')$ valójában

$\downarrow$

$G(\underline{x}-\underline{x}', t-t')$ alakú!

- Green-fv. kiszámítása:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) \, e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \, e^{-ikx'} =$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, f(x') \, e^{-ikx'}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, f(x') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')}}_{\delta(x-x')} = f(x)$$

$\delta(x-x')$ ← a Dirac-delta Fourier-előállítása

⇓

- $$\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\,\delta(t-t') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}') - i\omega(t-t')}$$

itt ω-t és k-t függetlennek ~~tekintem~~

$$G(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}') - i\omega(t-t')} \tilde{G}(\underline{k},\omega)$$

- $$\Box_{\underline{x},t} G(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) \tilde{G}(\underline{k},\omega) \cdot e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}') - i\omega(t-t')}$$

és csak akkor lehet, ha a Fourier-ehők azonosak:

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{G} = 1$$

← átmegyünk Fourier-térbe, hogy elvégezzük a deriválásokat

$$\boxed{\tilde{G}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow f(\underline{x},t) = \int d^3x' \int dt' \underbrace{\left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \overbrace{\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}^{\tilde{G}(\underline{k},\omega)} \cdot e^{ik(\underline{x}-\underline{x}')} \cdot e^{-i\omega(t-t')} \right)}_{G(\underline{x}-\underline{x}', t-t')} \cdot s(x', t')$$

visszatranszformáció:

↓

3. óra

0) Ismétlés: $(\omega = \pm c \cdot |\underline{k}|)$

a) Megmaradási tételek: (mechanikai részt most nem vizsgáljuk)

- $$\frac{\partial \rho_E(\underline{x},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\underline{S}(\underline{x},t) = 0 \qquad \rho_E = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\underline{B}^2\right)$$

$$\underline{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\underline{E}\times\underline{B}\right)$$

- $$\underbrace{\frac{\partial \underline{p}_{em}(\underline{x},t)}{\partial t}}_{\text{térfogati erő}} + \underbrace{\mathrm{div}\,\underline{\underline{\Pi}}_{em}(\underline{x},t)}_{\text{felületi erő}} = 0 \qquad \underline{p}_{em} = \frac{1}{c^2}\underline{S}$$

felületi erő, hasonlóan a rugalmasságtanhoz

$(\partial_j \Pi_{ij} = \partial_i \Pi_{ij}$, mert Π_{ij} szimmetrikus)

$$\Pi_{ij} = \varepsilon_0\left(\frac{1}{2}\underline{E}^2\delta_{ij} - E_i E_j\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\underline{B}^2\delta_{ij} - B_i B_j\right)$$

Észrevétel: nem kell feltétlenül közeg az em. tér energiájához, csak $\underline{E},\underline{B}$ térmennyiségek.

hullámegyenlet

b) $\Box f(\underline{x},t) = s(\underline{x},t)$

- $f_{homogén}(\underline{x},t) + f_{partikuláris}(\underline{x},t) = f(\underline{x},t)$

$\uparrow$

$\Box f_{hom.} = 0$

$$f_{part.}(\underline{x},t) = \int d^3x' \int dt'\, G(\underline{x}-\underline{x}', t-t')\, s(\underline{x}',t')$$

ahol $\Box_{\underline{x},t}\, G(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\cdot\delta(t-t')$ („egységgerjesztés")

$$G(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')-i\omega(t-t')}\,\tilde{G}(\underline{k},\omega)$$

és $$\tilde{G}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{\underline{k}^2-\frac{\omega^2}{c^2}}$$

$\underline{k}$ és ω független $\int$-i változók, nem lehet simán behelyettesíteni, hogy $\omega = \pm c|\underline{k}|$

ráadásul ezeken a helyeken szingularitás van

$\Downarrow$

1) Kauzalitás (oksági viszony)

olyan part. mo-t keresünk, melyre:

$$\boxed{G_{ret}(t-t', \underline{x}-\underline{x}') = 0 \text{, ha } t' > t}$$

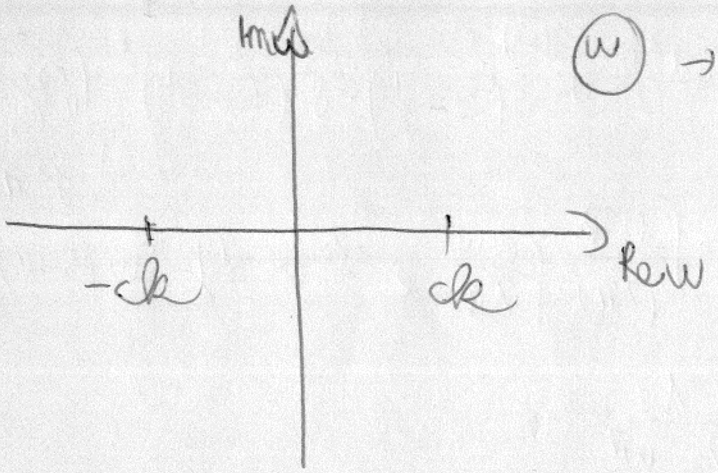
„retardált Green-fv": csak a korábbi hatás befolyásolja adott pillanatban a rendszer állapotát

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')}\cdot\left(\frac{1}{|\underline{k}|+\frac{\omega}{c}} - \frac{1}{\frac{\omega}{c}-|\underline{k}|}\right)\left(+\frac{1}{2|\underline{k}|}\right)$$

$\rightarrow$ Cauchy-tételt fogjuk alkalmazni (komplex fv-tan)!

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')}\left(\frac{1}{\omega+ck} - \frac{1}{\omega-ck}\right)\left(+\frac{c}{2k}\right)$$

(ω) → az egész ~~ω-ra~~ integrálra nézve van értelme komplex ω-nak is



$t < t'$

ha $t - t' < 0$

$\Downarrow$

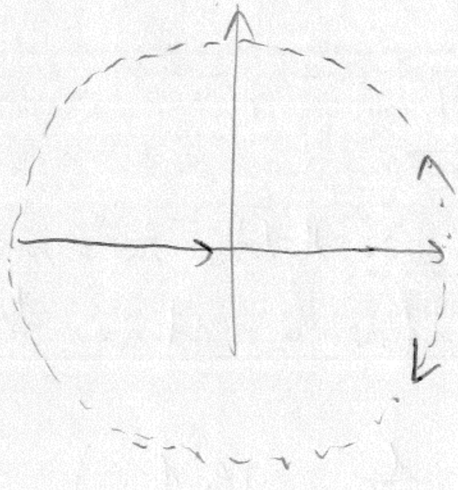
$$e^{-i\omega(t-t')} = e^{i(\omega' + i\omega'')|t-t'|} = e^{i\omega'} \cdot e^{-\omega''} \cdot e^{|t-t'|}$$

$\mathrm{Im}\,\omega = \omega'' > 0 \Rightarrow$ lecsengés

($\mathrm{Im}\,\omega = \omega'' < 0 \rightarrow$ „felcsengés")

ha $t < t'$, ⇒ akkor felül ($\omega'' > 0$) kell beszámolni az $\int$-t, ilyenkor lesz a lecsengés miatt $\int = 0$

ha $t > t'$ $\quad e^{-i(\omega' + i\omega'')|(t-t')|}$ $\quad \mathrm{Im}\,\omega = \omega'' < 0$



$t < t' \rightarrow$ ilyenkor $\int = 0$

$t > t' \rightarrow$ ilyenkor $\int = 0$

kontúr

$$\oint_C dz \frac{r(z)}{z - z_0} = 2\pi i \underbrace{r(z_0)}_{Res(z_0)}$$

$z_0 \in C$

• ha lefelé toljuk a pólusokat ε-al, a felső félkörre
vett $\int = 0$ lesz
↑
kauzalitás: akkor kell eltűnnie,
• ha $t < t'$
⇓
$\omega \to \omega + i\varepsilon \quad \varepsilon > 0, \varepsilon \to 0$ (: így nem volt értelme a feladatnak, hogy singularitása volt az $\int$-nak, ezért eltoltuk, majd $\varepsilon \to 0$)
$\omega_{pólus} = \pm ck - i\varepsilon$
⇓
$G_{ret}(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = 0$ ha $t < t'$
ε-al 0-hoz tartottunk
$-i\varepsilon \to 0$ $\quad -i\varepsilon \to 0$
• ha $t > t'$ $\quad \omega = -ck \quad \omega = ck$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int = \frac{c}{2k} 2\pi i \frac{1}{2\pi}\left(e^{ick(t-t')} - e^{-ick(t-t')}\right)\cdot(-1)$$

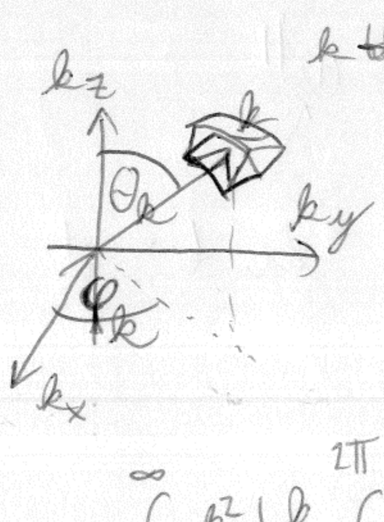
⇓

$$\underset{t>t'}{G_{ret}}(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = (-1)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')} \frac{ic}{2k}\left[e^{ick(t-t')} - e^{-ick(t-t')}\right] =$$

msz.:

$$d^3k = dk_x\, dk_y\, dk_z = k^2\, dk\, d\cos\Theta_k\, d\varphi_k$$

k-térben példában



⇓ $\underline{x}-\underline{x}' := z$ tengely

$$G_{ret} = \int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-1}^{1} d\cos\Theta_k\, e^{\overbrace{ik|\underline{x}-\underline{x}'|\cdot\cos\Theta_k}^{\underline{k}\cdot(\underline{x}-\underline{x}')\,\parallel z}} \underbrace{[\ldots]\cdot(-1)\cdot\frac{ic}{2k}}_{\text{ez csak } k=|\underline{k}|\text{-tól függ}}$$

$$= (-1) \int_0^\infty \frac{\cancel{k^2}\, dk}{4\pi^2} \frac{1}{\cancel{i}\cancel{k}\,|\underline{x}-\underline{x}'|} \underbrace{\left(e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|} - e^{-ik|\underline{x}-\underline{x}'|} \right)}_{\left[e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|\cdot\cos\theta_k} \right]_{-1}^{1}} \cdot \frac{\cancel{k}c}{2\cancel{k}} \left(e^{ick(t-t')} - e^{-ick(t-t')} \right)$$

$$\uparrow$$

$$\cdot \int d\varphi = 2\pi$$

$$= \frac{c \cdot (-1)}{|\underline{x}-\underline{x}'|\, 8\pi^2} \int_0^\infty dk \Big[e^{ik(|\underline{x}-\underline{x}'| + c(t-t'))} - e^{ik(|\underline{x}-\underline{x}'| - c(t-t'))} -$$

$$- e^{-ik(|\underline{x}-\underline{x}'| - c(t-t'))} + e^{-ik(|\underline{x}-\underline{x}'| + c(t-t'))} \Big] =$$

$\int_0^\infty = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty$, mert páros az argumentum

emlékeztető: $\int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{iky} = \delta(y)$

a (−1)-szeres arg. δ-ja uaz

$$= \frac{2c}{8\pi |\underline{x}-\underline{x}'|} \left(\underbrace{\delta\left(|\underline{x}-\underline{x}'| + c\cdot(t-t')\right)}_{=0\text{, mert a } \delta \text{ argumentuma mindig } \oplus\text{!!}} - \delta\left(|\underline{x}-\underline{x}'| - c(t-t')\right) \right) =$$

$\int_0^\infty$ helyett $\int_{-\infty}^\infty \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \to \frac{1}{8\pi}$

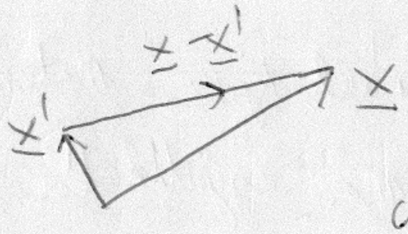
$\frac{1}{|a|} \cdot \delta(y) = \delta(a \cdot y)$

$$= \frac{1}{4\pi |\underline{x}-\underline{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c} \right)$$

ha $t > t'$

$$f_{ret}(\underline{x},t) = \int d^3x' \int dt' \; G_{ret}(\underline{x}-\underline{x}', t-t') \; s(\underline{x}', t') =$$

$$= \int d^3x' \int dt' \; \frac{1}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|} \; \delta\left(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right) s(\underline{x}', t')$$



retardált idő: csak olyan időpillanatból érkezik hatás $\underline{x}$-be $\underline{x}'$-ből, amennyi idő alatt c-sebességgel megérkezik az info $\underline{x}$ pontba !!!

$\Downarrow$ ~~(retardált)~~

csak $t' = t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}$ -t kell figyelembe venni adott x'-beli pont hatásánál, a t-ben minden más múltbeli időpont nem érdekel

$$\boxed{f_{ret} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \, s\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)}$$

(ez a hullám által létrehozott térmennyiségek változására vonatkozik)

Megjegyzés:

matematikailag ~~[illegible]~~ ∞ sok Green-fv.-t lehet megadni:

az improprius $\int$ pólusait mi tologathatjuk ~~[illegible]~~

- pl. $\omega \to$ ~~[illegible]~~ $\omega - i\varepsilon$ $\quad G_{av}(\underline{x}-\underline{x}', t-t' > 0) = 0$

 avanzsált mo.

- sőt, mivel lineáris az egyenlet: $\alpha G_{av} + \beta \cdot G_{ret}$ is mo.

$$f_{av} = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \, s\left(\underline{x}', t + \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)$$

$f_{ret} = f_{av} +$ (jól választott együtthatókkal) f_{hom}

$\Downarrow$

az avanzsált megoldást is használhatjuk matematikailag, csak mások lesznek a homogén mo. együtthatói

Határozott frekvenciával rezgő forrás: (1 Fourier komponens vizsgálata)

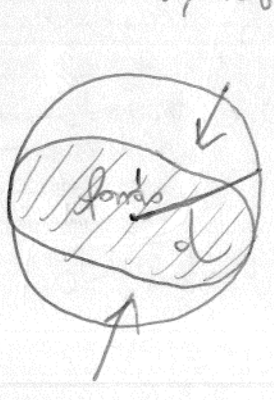
$$s(\underline{x},t) = s_\omega(\underline{x}) \cdot e^{-i\omega_0 t}$$

$$f_{\omega,ret}(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \, s_\omega(\underline{x}') \, e^{-i\omega_0\left(t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)} \equiv$$

„kényszerrezgés" → ugyanakkora frekvenciával rezgeti meg a forrás az $\underline{x}$-beli pontot

$\downarrow$

$$\equiv f_{\omega,ret}(\underline{x}) \, e^{-i\omega_0 t} \qquad f_{\omega,ret}(\underline{x}) \sim \int e^{i\omega_0\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}} \cdot \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \, d^3x' \sim$$



$$\sim \frac{e^{i\frac{\omega_0}{c}|\underline{x}|}}{|\underline{x}|}$$ } a távoli rész gömbhullám lesz

$\frac{\omega_0}{c} = k_0$ $\downarrow$

$|\underline{x}| \gg d \geq |\underline{x}'|$

$$\frac{e^{ik_0 r - i\omega_0 t}}{r}$$ gömbhullám megoldás

– a retardált megoldás kifelé haladó gömbhullámot ír le

– az avanzsált megoldás befelé haladó –||– ír le

⇓

a sugárzás és az elnyelés különböző Green-fv-ekkel írható le

↓

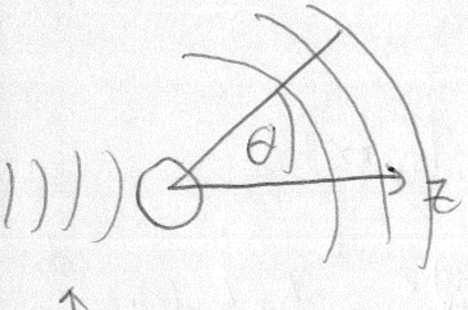
pl. rádióhullám vevő, detektálás

bejövő sugárzás → avanzsált mo. amplitúdója → készülék jelének beállítása

– modern fizika (relativitás) ⇏ lineárkombináció !!

~~$|\underline{x}| \gg d \geq |\underline{x}'|$~~

– EM hullám szóródása:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dI(\theta)}{I_{be}}$$

adott bejövő sugárzás hatására térszögegységre jutó kimenő intenzitás

↑

(a bejövő síkhullámot is fel lehet bontani gömbhullámok lineárk.-ra)

⇒ még fizikai példákban sem feltétlenül kell a retardált megoldást választani, sőt nem is mindig használják

4. óra

Határozott frekvenciájú forrásra a térmennyiségek $(\underline{E},\underline{B})$ egyenletei:

$$\rho(\underline{x},t)=\rho_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t} \qquad \underline{j}(\underline{x},t)=\underline{j}_\omega(\underline{x})\cdot e^{-i\omega t}$$

1. $\operatorname{div}\underline{E}(\underline{x},t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{x},t) \Rightarrow \underline{E}(\underline{x},t)=\underline{E}_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t}$

$$\boxed{\operatorname{div}\underline{E}_\omega(\underline{x})=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_\omega(\underline{x})}$$

(az időfüggés kiesik)

2. $\operatorname{rot}\underline{E}(\underline{x},t)=-\underline{\dot{B}}(\underline{x},t) \Rightarrow \underline{B}(\underline{x},t)=\underline{B}_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t}$

$$\boxed{\operatorname{rot}\underline{E}_\omega(\underline{x})=i\omega\underline{B}_\omega(\underline{x})}$$

3. $\operatorname{div}\underline{B}(\underline{x},t)=0 \rightarrow \boxed{\operatorname{div}\underline{B}_\omega(\underline{x})=0}$

4. $\operatorname{rot}\underline{B}(\underline{x},t)=+\mu_0\left(\underline{j}(\underline{x},t)+\varepsilon_0\underline{\dot{E}}(\underline{x},t)\right)$

$$\boxed{\operatorname{rot}\underline{B}_\omega(\underline{x})=+\mu_0\left(\underline{j}_\omega(\underline{x})-i\omega\varepsilon_0\underline{E}_\omega(\underline{x})\right)}$$

$$\underline{B}_\omega(\underline{x})=\operatorname{rot}\underline{A}_\omega(\underline{x}) \rightarrow \underline{E}_\omega-i\omega\underline{A}_\omega=-\underline{\nabla}\phi_\omega(\underline{x})$$

Lorentz-mérték:

$$\phi=\phi_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t} \qquad \underline{A}=\underline{A}_\omega(\underline{x})\cdot e^{-i\omega t}$$

$$\operatorname{div}\underline{A}_\omega(\underline{x})-\frac{i\omega}{c^2}\phi_\omega(\underline{x})=0$$

ekkor

$$\square\begin{pmatrix}\phi(\underline{x},t)\\ \underline{A}(\underline{x},t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{x},t)\\ \mu_0\cdot\underline{j}(\underline{x},t)\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\begin{pmatrix}\phi_\omega(\underline{x})\\ \underline{A}_\omega(\underline{x})\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_\omega(\underline{x})\\ \mu_0\cdot\underline{j}_\omega(\underline{x})\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$$

Legyen $k \equiv \frac{\omega}{c}$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\begin{pmatrix}\phi_\omega(\underline{x}) \\ \underline{A}_\omega(\underline{x})\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_\omega(\underline{x}) \\ \mu_0 \underline{j}_\omega(\underline{x})\end{pmatrix}$$

↳ <u>Helmholtz-egyenlet</u>

($\omega = 0$ (sztatika): Poisson-egyenlet)

A hullámegyenlet megoldása: (ld. előző óra)

$$\begin{pmatrix}\phi(\underline{x},t) \\ \underline{A}(\underline{x},t)\end{pmatrix}_{ret} = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right) \\ \mu_0 \underline{j}\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\phi_\omega(\underline{x}) \\ \underline{A}_\omega(\underline{x})\end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \cdot \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_\omega(\underline{x}') \\ \mu_0 \underline{j}_\omega(\underline{x}')\end{pmatrix}$$

$$\left(\phi_{sztat}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int d^3x' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \cdot \rho_{sztat}(\underline{x}') \right)$$

(Coulomb-tv.)

~~El. sztatika (véges tartományban)~~

Elektrosztatika végesben elhelyezkedő határfalak esetén

$$\boxed{\Delta\Phi(\underline{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{x})} \qquad \Phi(\underline{x}) = \int d^3x'\, G(\underline{x}-\underline{x}')\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho(\underline{x}')$$

~~(elhagyva?)~~ ~~kétül~~

most időbeli változás nincs! ← eddigieknél $\boxed{\omega=0}$ eset!

$\Downarrow$

$\boxed{k=0}$

$$\int d^3x'\,\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{x}')\,\Delta_{\underline{x}}\, G(\underline{x}-\underline{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3x'\,\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\,\rho(\underline{x}')$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta_{\underline{x}}\, G(\underline{x}-\underline{x}') = -\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}') = \Delta_{\underline{x}'}\, G(\underline{x}-\underline{x}')$$

← mert páros az argumentumban

Green-tételek (Gauss-tétel alkalmazása)

f, g

$$\int_V d^3x'\left(f(\underline{x}')\,\Delta_{\underline{x}'}\, g(\underline{x}') - g(\underline{x}')\,\Delta_{\underline{x}'}\, f(\underline{x}')\right) =$$

$$\Delta = \nabla^2, \qquad \partial^2_{x'_j} = \partial^j_{x'}\cdot\partial^j_{x'}$$

parciális

$$= \partial^j(f\,\partial^j g) \cancel{-(\partial^j f)(\partial^j g)} - \partial^j(g\,\partial^j f) \cancel{+(\partial^j g)(\partial^j f)}$$

$\int_V dV\,\mathrm{div} = \int_F d\underline{f}$

$\Downarrow$

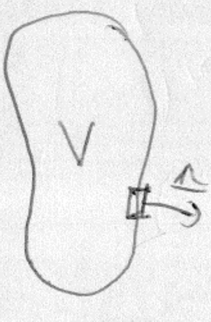
$$= \int_F d\underline{f}\left[f\,\nabla g - g\,\nabla f\right]$$

Legyen $g(\underline{x}') := G(\underline{x}-\underline{x}')$

$f(\underline{x}') := \Phi(\underline{x}')$

$$\overbrace{\int_V d^3x'\left[\Phi(\underline{x}')\left(-\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\right) - G(\underline{x}-\underline{x}')\left(-\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho(\underline{x}')\right)\right]}^{-\Phi(\underline{x}) + \int_V d^3x'\, G(\underline{x}-\underline{x}')\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{x}')} =$$

$$= \int_F df \left[\phi(\underline{x}_F) \cdot \frac{\partial G(\underline{x}-\underline{x}'_F)}{\partial n} - G(\underline{x}-\underline{x}_F) \frac{\partial \phi(x_F)}{\partial n} \right]$$



jelölés: ~~most~~

$\underline{n} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial n}$

normális irányú vetület

$d\underline{f} = \underline{n} \cdot df$

valójában ez csak a térfogaton belüli ~~mondja meg~~ ϕ-t töltések hatását mondja meg!

$$\phi(\underline{x}) = \overbrace{\int_V d^3x' \, G(\underline{x}-\underline{x}') \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho(\underline{x}')} + \int_F df \left[G(\underline{x}-\underline{x}_F) \frac{\partial \phi(x_F)}{\partial n} - \right.$$

$$\left. - \phi(\underline{x}_F) \frac{\partial G(\underline{x}-\underline{x}_F)}{\partial n} \right]$$

← a felület hatását ez a tag adja meg ϕ-be

$\Downarrow$

- véges tartományban a felület is szerepet játszik
- „a külvilágról" a felületen keresztül kapunk információt és a térfogaton belülik

$\Updownarrow$

mind1, mi van a határon túl, ha a határra ugyanazt adja ~~a felületi tag a térfogatban nem adhat járulékot~~!

→ peremfeltételek: $\frac{\partial \phi(x_F)}{\partial n} = ?$, $\phi(x_F) = ?$

$G(\underline{x}-\underline{x}') := G_{part}(\underline{x}-\underline{x}') + F(\underline{x}-\underline{x}')$, ahol $\Delta_{\underline{x}} F(\underline{x}-\underline{x}') = 0$

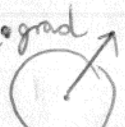
(∞)

pl. $\boxed{G_{part} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}}$ → ponttöltés tere | homogén egy megoldása

Megjegyzés: $\Delta_x \frac{1}{|\underline{x}|} \sim \delta(\underline{x})$:

$$\int_{\varepsilon V} d^3x \, \Delta_x \frac{1}{|\underline{x}|} = \int_{\Sigma_F} df \underbrace{\frac{\partial}{\partial n}}_{\underline{n} \cdot grad} \frac{1}{|\underline{x}|} = \int_{\Sigma_F} \overbrace{r^2 d\Omega}^{dF} \left(-\frac{1}{r^2}\right) = -4\pi$$

$\varepsilon V \to \varepsilon$ sugarú kör térfogata



teljes térszög

$$\Downarrow$$

$$\Delta_x \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = -4\pi\, \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}') \quad ! \quad \text{Tanulság: } \int df \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\underline{x}|} = -4\pi$$

pl: ha a határokon kívül egy ponttöltést letesszünk, és belül is egy ponttöltés van, a határon (gömbfelület) konstans járulék lesz

- $\boxed{G_D(\underline{x}-\underline{x}_F)=0}$: Dirichlet-féle határfeltétel $\boxed{\phi(x_F)}$
- $\dfrac{\partial G_N}{\partial n}(\underline{x}-\underline{x}_F) = 0$ Neumann-féle határfeltétel

(nem Neumann János)

nem lehet 0 ~~mert megjövés~~, hogy

$$\boxed{\int df \frac{\partial G_N}{\partial n} = -1} \; !$$

ehelyett:

$$\frac{\partial G_N(\underline{x}-\underline{x}_F)}{\partial n} = -\frac{1}{F}$$

← szingularitása van ~~benne~~ a potenciálnak

$\Downarrow$

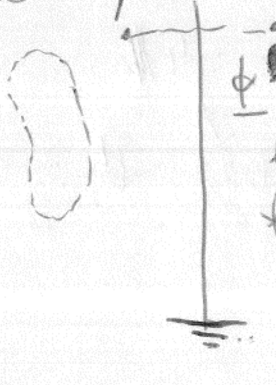
a peremen ϕ nem lehet 0

(De ha F nagy $\frac{\partial G_N}{\partial n} \to 0$)

→ Dirichlet: megoldása

$$\phi(\underline{x}) = \int_V G_D(\underline{x}-\underline{x}')\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho(\underline{x}')\,d^3x' - \int_F df\, \frac{\partial G(\underline{x}-\underline{x}_F)}{\partial n}\cdot\phi(\underline{x}_F)$$

példa: q $\quad -q$



$\phi(x_F)=0$, ha földelve van

tükörtöltés

$\downarrow$

$$\underbrace{\Delta\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_F|}}_{\text{a tükörtöltés által létrehozott tér kielégíti a homogén egyenletet}} = 0 \quad + \text{ a határfeltételt is teljesíti}$$

$$G_D(\underline{x}-\underline{x}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} - \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'_T|}\right)$$

a tükörtöltés módszerben a Green-fv.-t határoztuk meg valójában

Ha $\phi(\underline{x}_F)$ nem tűnik el a határon

G_D adott $\rightarrow \frac{\partial G_D}{\partial n} \rightarrow \int_F df \frac{\partial G_D}{\partial n}\phi(\underline{x}_F)$

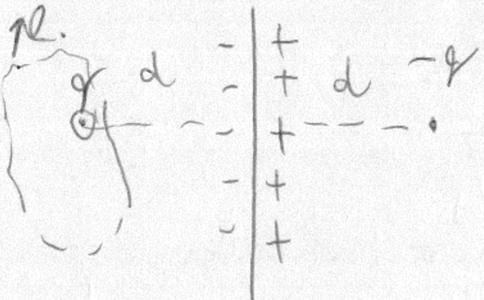
a tükrözött járulék (G_D) már tudjuk, hogy néz ki

$\Downarrow$

ha ismerjük a $\phi_{határ}=0$ megoldást $\Rightarrow$ megkapjuk G_D-t

↳ a $\phi_{határ}\neq 0$ megoldást ugyanígy kapjuk meg, csak az $\int_F df \frac{\partial G_D}{\partial n}\phi(\underline{x}_F)$ járulékot hozzá kell venni

ez a homogén esetet megoldja ~~Megoldást~~



- vegyes határfeltételek

Egyértelmű-e a megoldás?

ϕ_1 és ϕ_2 legyen a Δ egy. megoldása ← ezt tudjuk, mert mindkettő ϕ kielégíti a Δ egyenletet

$u=\phi_1-\phi_2 \qquad \Delta u = 0$

$$\boxed{u_F^D = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_F^N = 0}$$
F (felület)

Dirichlet Neumann

$$0=\int d^3x\, u\Delta u = \underbrace{\int df\, u\frac{\partial u}{\partial n}}_{0} - \underbrace{\int d^3x\, (\nabla u)^2}$$

$\operatorname{div}(u\nabla u)-\nabla u$

mindkét problémára

ez csak akkor lehet 0, ha $\nabla u=0 \Rightarrow u$ konstans

$u=C$ ⇒ ha a két potenciál csak konstansban

⇓ különbözik, fizikailag nem számít, mindkettő

$\phi_1=\phi_2+c$ jó megoldás

<u>Áll:</u> <u>Vegyes</u> határfeltételnél nem egyértelmű a megoldás

5. óra

Laplace-egyenlet megoldása

$\Delta\phi=0$ változók szétválasztásának módszere

$\phi(\underline{x}) = f_1(x)\cdot f_2(y)\, f_3(z)$ → ez még nem a teljes mo.

$$f_2 f_3 \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} + f_1 f_3 \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} + f_1 f_2 \frac{d^2 f_3(z)}{dz^2} = 0 \quad / : \phi \neq 0$$

↓ ez is mo., de nem ezt keressük

$$\underbrace{\frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}}_{c_1^2} + \underbrace{\frac{1}{f_2}\frac{d^2 f_2(y)}{dy^2}}_{c_2^2} + \underbrace{\frac{1}{f_3}\frac{d^2 f_3(z)}{dz^2}}_{c_3^2} = 0$$

$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ konstansok

⇓

$$\frac{d^2 f_i}{dx_i^2} = c_i^2 f_i$$

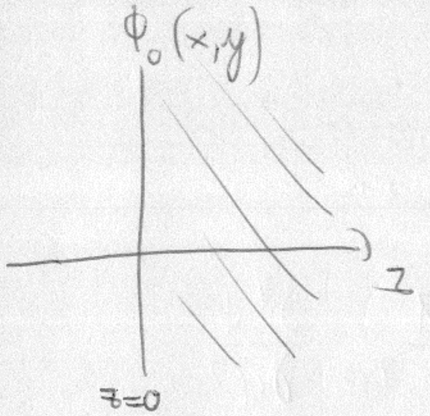
↓

$f_i = A_i \cdot e^{\pm c_i x_i}$ akkor, hogy $c_1^2+c_2^2+c_3^2=0$ legyen, valamelyik c_i konstans

<u>ált. mo.:</u>

$$\phi(\underline{x}) = \sum_{c_i} A\, e^{\pm \sum_i c_i x}$$

→ ha c_i-k folytonosak lehetnek, a Σ-ból $\int$ lesz pl$_1$)



(előző órán Green-fv-el volt)

$\Downarrow$

ezt kellett a határon $\int$-ni

Most a peremfeltétel:

$$\phi_0(x,y)=\int\frac{dk_1}{2\pi}\int\frac{dk_2}{2\pi}\,e^{i(k_1x+k_2y)}\cdot\tilde{\phi}_0(k_1,k_2)$$

↳ azért adjuk meg Fourier-alakban, mert tudjuk, hogy ϕ is ilyen alakú lesz x, y-ban

= az adott probléma ált.ja → $c_3^2 > 0$, hogy lecsengjen a z irányban, ha $z\to\infty$

megszabja az exp. kitevők előjelét

de $c_1^2, c_2^2 < 0$ → nem cseng le, hogy ϕ_0 teljesüljön

• mo.-t a köv. alakban keressük:

$$\phi=\int\tilde{A}_0(k_1,k_2)\,e^{-c_3 z}\cdot e^{ik_1x+ik_2y}\,\frac{dk_1\,dk_2}{(2\pi)^2}$$

ezt azért emeljük ki, mert a Fourier-ehát így egyszerűbb összehasonlítani

$$c_3^2-k_1^2-k_2^2=0 \qquad c_3=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$$

• határfelt.-ből:

$$\phi(x,y,z=0)=\phi_0(x,y)$$

$$\tilde{A}_0(k_1,k_2)=\tilde{\phi}_0(k_1,k_2)$$

pl$_2$) gömbi koordináták:

$$\underset{(r,\varphi,\theta)}{\underline{x}}=(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta) \qquad \phi=\phi(r,\theta,\varphi)$$

(gömbszimm, vagy hasonló határfeltételnél)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)+\frac{1}{r^2}\underbrace{\hat{L}^2}_{}\phi=0$$

szögszerinti deriválások

$$\hat{L}^2\phi=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

- Ansatz:

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\underbrace{\frac{u(r)}{r}}_{}P(\theta)\cdot Q(\varphi)$$

hagyomány szerint

így keressük a mo.-t (így egyszerűbb)

$$\frac{1}{r}u''(r)\cdot P\cdot Q+\frac{u}{r^3}\left[Q\cdot\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot P'\right)+\frac{P}{\sin^2\theta}Q''\right]=0\;\Big/:\left(\frac{u}{r}PQ\right)$$

$$\frac{u''}{u}+\frac{1}{r^2}\Big[\underbrace{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{P}(\sin\theta\cdot P')'+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{Q}Q''}_{}\Big]=0$$

nem függ r-től

$-l(l+1)$ konstans

- $$\frac{d^2u}{dr^2}=\frac{l(l+1)}{r^2}\cdot u \qquad u\sim r^\alpha$$

$$\alpha(\alpha-1)=l(l+1)$$

$$\alpha=-l \text{ v. } \alpha=l+1 \qquad\Longrightarrow \phi(r,\theta,\varphi)=\sum_l\left(A_l\cdot r^{-l-1}+B_l\cdot r^{l}\right)\cdot P_lQ_l$$

$$\Downarrow$$

$$u_l(r)=A_l\cdot r^{-l}+B_l\cdot r^{l+1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{P}\,\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\, P'\right)' + \frac{1}{\sin^2\theta}}_{\text{nem függ } \varphi\text{-től}}\;\underbrace{\frac{1}{Q}\,Q''}_{\text{csak } \varphi\text{-től függ}} = -l\,(l+1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2\, Q$$

$Q(\varphi) = e^{\pm i m \varphi}$ ← azért nem tesszük fel, hogy

$-m^2 > 0$ (exp. fel/lecsengés), mert

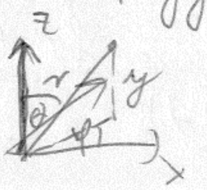
φ-ben periodikus Φ

$(Q(\varphi+2\pi) = Q(\varphi))$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dP_l^m}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\cdot P_l^m = -l\,(l+1)\cdot P_l^m$$

→ Gömbfvek:

- $m=0$ (φ-től nem függ a potenciál): tengelyszimmetrikus



változócsere:

$x = \cos\theta$

$d\cos\theta = dx = -\sin\theta\, d\theta$

$$-\frac{d}{dx}\left[\underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta\,=\,1-x^2}\cdot\left(-\frac{dP_l^0}{dx}\right)\right] = -l\,(l+1)\cdot P_l^0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\cdot\frac{dP_l^0}{dx}\right] = -l\,(l+1)\cdot P_l^0$$ Legendre-egyenlet

$P_\ell^0(x)$ $\quad \ell$ egész (nem negatív) $\rightarrow$ Legendre-polinomok
(0, 1, ...)

$P_0 = 1$

$P_1 = x$

~~$P_2 = \frac{3}{2}(x^2-1)$~~ $\quad$ ~~$\frac{dP_2}{dx} = 3x \rightarrow \frac{d}{dx}\left[3x(1-x^2)\right] \overset{?}{=} -\frac{3}{2}(x^2-1)$~~ (ell.:)

~~$(3x-3x^3)$~~

~~$3 - 9x^2 = -9(x^2-1)$~~

$P_2 = (3x^2-1)\cdot\frac{1}{2}$

$\vdots$

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \cdot \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell$$

Legendre-polinomok ortogonalitása:

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_\ell(x)\cdot P_{\ell'}(x) = \delta_{\ell\ell'}\cdot\frac{2}{2\ell+1} \quad !!$$

$$f(x) = \sum_\ell a_\ell P_\ell(x) \quad \text{teljesség}$$

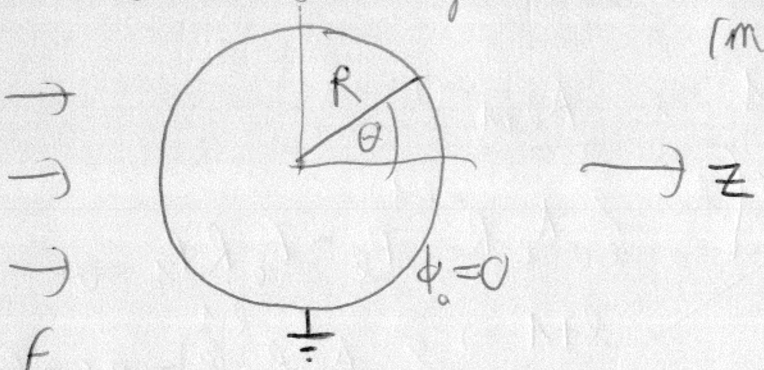
(tetszőleges fv. (ami $x=\cos\theta$ fv-e), kifejthető a Legendre-polinomokkal)

másik mo.:

$Q_\ell(x) \rightarrow$ szinguláris $x = \pm 1$-re, ezért nem nézzük őket

Példa: a Legendre-polinomok alkalmazása:

$(m=0)$



E_0

(külső tér)

↓

a hatására kialakul egy polarizáció a ~~térben~~ gömbön

Mo.: z tengely körül szimm. a mo. → ~~gömbfv-ek~~ Legendre-polinomok alakjában keressük a mo.-t

$$\phi(r,\theta,\cancel{\varphi}) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l\, r^{-l-1} + B_l\, r^{l}\right)\cdot P_l(\cos\theta)$$

$r>R$

⇓

ez biztos megoldja a $\Delta\phi=0$ egyenletet!

csak a határhoz kell illeszteni

$r=R$ $\quad \phi(R,\theta)=\phi_0=0$

$\phi(r\to\infty,\ \theta) = -E_0 z$ ← a ~~homog~~ gömb tere ~~itt~~ már nem érvényesül

$$= -E_0\cdot r\cdot\underbrace{\cos\theta}_{x=P_1(x)} = -E_0\cdot r\cdot P_1(\cos\theta)$$

- A_l-ek az $r\to\infty$-ben mindig lecsengenek, de
- $r=\infty$ $\quad B_0=0=B_{l\geq 2}$ $\quad B_1=-E_0$ $\quad \leftarrow \phi(r\to\infty,\theta)=(-E_0)\,r\cdot P_1(x)$, $\; r^1$ ← B_1

⇓

$$\phi(R,x)=\sum_{l=0}^{\infty} A_l\cdot R^{-l-1}\,P_l(x) - E_0\cdot R\,P_1(x) = 0$$

• teljességi reláció miatt:

$l=0$ kikötése $\Rightarrow$ $l\neq 1$-re $A_{l\neq 1}=0$

($\forall$ együttható 0) ← ha $\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^{-l-1} P_l - E_0 R P_1 = 0$

$l\neq 1 \Rightarrow \sum_{l=0,\, l\neq 1}^{\infty} A_l R^{-l-1} \boxed{P_l} = 0\, E_0 R \boxed{P_1}$

kivéve $A_1 \cdot R^{-2} = E_0 \cdot R$

$A_1 = E_0 \cdot R^3$

z irányú egységvektor

$$\Rightarrow \underline{\underline{\phi(r>R,\theta)}} = \frac{E_0 \cdot R^3}{r^2}\cos\theta - E_0 r\cos\theta = \underline{\underline{\underbrace{\frac{E_0 \cdot R^3\, \hat{z}\cdot \underline{r}}{r^3}}} - E_0 z}$$

Egy dipól momentum indukálódik a gömbön

$\sim \frac{1}{r^2}$-es potenciál

↑ dipólus

$$\phi_{dipól} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}$$

• Visszatérés a gömbfv-ekhez:

$m\neq 0$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx}\right] - \frac{m^2}{1-x^2}P_l^m + l(l+1)P_l^m = 0$$

P_l^m asszociált Legendre-fv.: $P_l^m(x) = (-1)^m \cdot (1-x^2)^{m/2}\dfrac{d^m P_l(x)}{dx^m}$

ha $m \to -m$, az egyenlet nem változik $\Rightarrow P_l^m \approx P_l^{-m}$

ha m-re: $0 \leq m \leq l$

ha $m>0$: $P_l^{-m} = \dfrac{(-1)^m \cdot (l-m)!}{(l+m)!} P_l^m \rightarrow$ kiterjesztés $-l \leq m \leq l$

ált. mo.!

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^{-l-1}+B_{lm}r^{l}\right)\cdot \underbrace{P_l^m(\cos\theta)\cdot e^{im\varphi}}$$

gömbharmonikus fv-ek:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\underbrace{\left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}}_{\text{normálási faktor}}\cdot P_l^m(\cos\theta)\cdot e^{im\varphi}$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{+1} d\cos\theta\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi}_{\int d\Omega}\; Y^*_{lm}(\theta,\varphi)\,Y_{l'm'}(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

→ ortonormáltsági reláció

→ teljességi reláció:

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)$$ tetsz. fv. kifejthető velük

a végső megoldást a gömbharmonikusokkal írjuk fel

$$\boxed{\phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^{-l-1}+B_{lm}r^{l}\right)\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

kifejtési eh-ók kiszámítása (pl. határfelt.-eknél):

$$\int Y^*_{lm}(\theta,\varphi)\,f(\theta,\varphi)\,d\Omega=\sum_{l',m'}a_{l'm'}\underbrace{\int Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)\,d\Omega}_{\delta_{ll'}\delta_{mm'}}=a_{lm}$$

visszaírva az előzőket:

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l,m}\underbrace{\int d\Omega'\, Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\, f(\theta',\varphi')}_{\cancel{\alpha_{lm}}\ \ \alpha_{lm}}\, Y_{lm}(\theta,\varphi)=\cancel{\int d\Omega'}$$

$$=\int d\Omega'\Big[\underbrace{\sum_{l,m} Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\,Y_{lm}(\theta,\varphi)}_{\delta(\cos\theta-\cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')}\Big] f(\theta',\varphi')$$

most csak diszkrét értékek vannak

$\underbrace{\delta(\cos\theta-\cos\theta')}\,\delta(\varphi-\varphi')$

nem θ szerint megy az arg., mert az $\int d\cos\theta$ szerint megy !!

$$\sum_{l,m} Y^*_{lm}(\underline{n}')\, Y_{lm}(\underline{n})=\delta^{(2)}(\underline{n}-\underline{n}')$$

(emlékeztető:
$$\delta(x-x')=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}\cdot e^{-ikx'}$$
)

ez most a sima $x \neq \cos\theta$

$$\sum_m e^{im(\varphi-\varphi')} \overset{?}{=} \delta(\varphi-\varphi')$$

+ együtthatók (normálás)

$$\sum_l P_l(x)\,P_l(x') = ?\ \delta(x-x')$$

msz.: a sima Legendre-polinomokkal

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x) \quad \text{és} \quad \int_{-1}^{+1} P_l(x)\,P_{l'}(x)\,dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

$$a_l=\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)\, f(x)\,\frac{2l+1}{2} \Rightarrow \sum_l P_l(x)\,P_l(x')\,\frac{2l+1}{2}=\delta(x-x')$$

6. óra

0) Ism: Ortogonális függvények, $(\Delta\Phi = 0)$

$\psi(r, \theta, \varphi)$ gömb koordináták

a) egységkörön változó fv. $0 \le \varphi \le 2\pi$ $\quad \left| \dfrac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2 Q \right.$ $\qquad \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \right\}_{m=-\infty}^{\infty}$

$$f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

$$\int^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2\pi} e^{-im\varphi} \cdot e^{im'\varphi} = \delta_{m,m'}$$ ortogonalitási reláció

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{im(\varphi-\varphi')}}_{e^{im\varphi} \cdot e^{-im\varphi'}} = 2\pi\, \delta(\varphi - \varphi')$$ teljességi reláció

Legendre-polinomok:

b) $-1 < x < 1$ $(x = \cos\theta)$ $\quad \left| \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2) \dfrac{dP}{dx} \right) + l(l+1) P = 0 \right.$ Legendre-~~polinom~~ egyenlet

$$\{ P_l(x) \}_{l=0}^{\infty}$$ Legendre-polinomok

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x)$$

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$ ortogonalitás

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) P_l(x') = \frac{2}{2l+1} \delta(x - x')$$ teljesség

c)

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$-1 < \cos\theta < 1$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\cdot\frac{dP_l^m}{dx}\right]+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P_l^m=0$$

P_l^m-ből

<u>asszociált L.-polinomok</u>

$$\left\{Y_l^m(\theta,\varphi)=\left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}\right\}_{lm}$$

$$\int d\Omega\; Y_{lm}^*(\underline{n})\,Y_{l'm'}(\underline{n})=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$ ortogonalitás

$(d\Omega=d\cos\theta\, d\varphi)$

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

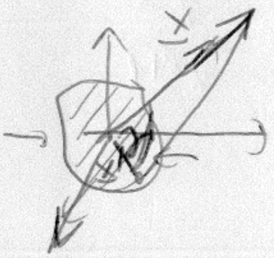
$$\sum_{l,m}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\,Y_{lm}(\theta,\varphi)=\delta(\cos\theta-\cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')$$ teljességi reláció

b) kiegészítés: Legendre-polinomok

<u>addíciós tétel</u>: $$P_l(\underline{n}\cdot\underline{n}')=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\underline{n})\,Y_{lm}(\underline{n}')$$

Multipólus sorfejtés az el. szt. potenciálra

$$\phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \, \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$



$|\underline{x}| \gg d \sim |\underline{x}'|$

jó messze mekkora a potenciál

1) Bruteforce (nyers erő) módszer:

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cdot\cos\gamma}} \overset{\text{Taylor-sor}}{\simeq} \dots$$

ahol $\cos\gamma = \underline{n}\cdot\underline{n}' = \frac{\underline{x}}{r}\cdot\frac{\underline{x}'}{r'}$

$\underline{r}$ irányú, $\underline{x}'$ irányú egységvektor

2) másik módszer:

ha x tengely $= \underline{x}'$ ← $\underline{x}'$ helyett $\underline{x}$?

$\underline{x}'$ irány körül tengelyszimm. a potenciál

⇓ Legendre-polinomos kifejtés

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\cos\gamma)$$

$[-1;+1]$ között vált.

együtthatók meghatározása

$\cos\gamma = 1$ nél:

$$P_l(1)=1 \leftarrow \cos\gamma = 1 \ (\gamma = 0^\circ) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'}} = \boxed{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l}$$

$\forall l$-re

ha $\boxed{\underline{x} \text{ z-tengely irányába néz}}$, $\underline{x}'$ is, mert $\gamma = 0°$

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \Downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{|z-z'|}$$

$z > z'$: $\frac{1}{z-z'} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z'}{z}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z'^l}{z^{l+1}}$

$z' > z$: $\frac{1}{z'-z} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{z'^{l+1}}$

$$\alpha_l = \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \Leftarrow \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_<^l}{z_>^{l+1}}$$

a nagyobbat

$z_>$ helyére kell berakni z és z' közül

$\Downarrow$

$r' < r$:

$$\phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \int d^3r\, \rho(x') \cdot r'^l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\underline{n}\cdot\underline{n}') =$$ ← addíciós tétel

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{(2l+1)\varepsilon_0} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\underline{n}) \cdot \underbrace{\int d^3x' \cdot r'^l\, Y^*_{lm}(\underline{n}')\, \rho(\underline{x}')}$$

a többeselet megsúlyozzuk: olyan, mint θ def.-ja ~~$\int d^3r \cdot r \cdot \rho$~~

a $\boxed{q_{lm} = \int d^3x' (r')^l Y^*_{lm}(\underline{n}') \cdot \rho(\underline{x}')}$

gömbi koordinátákban

felírt <u>multipól momentum</u>

$$\phi(\underline{x}) = \sum_{l,m} \frac{q_{lm}}{\varepsilon_0(2l+1)} \cdot \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$\downarrow$

$\underline{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$ ← minél nagyobb l,m, annál kisebb távolságban hat

$l=0,\ m=0$

$$\phi_{00} = \frac{q_{00}}{\varepsilon_0 r} Y_{00}(\theta,\varphi) \leftarrow \underbrace{\int |Y_{00}|^2}_{\text{konstans kell legyen}} d\Omega = 1 \leftarrow (P_0 = 1) \leftarrow e^0 = 1$$

$$Y_{00}^2 \cdot \int d\Omega = Y_{00}^2 \cdot 4\pi = 1$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$q_{00} \overset{\text{def. szerint}}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \int d^3x' \rho(x') = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$$

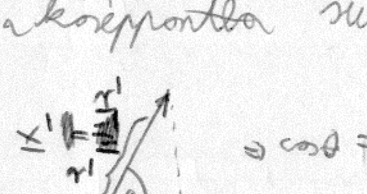
$$\boxed{\phi_{l=0} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\cdot\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$ → ponttöltés potenciálja (mintha az össztöltést a középpontba sűrítenénk)

$\phi_{l=1} = ?$

$\frac{z'}{r'}$ most

$\uparrow$

msz: $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z'}{r'}$



$\Rightarrow \cos\theta = \frac{z'}{r'}$

$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \cdot e^{i\varphi} = Y^*_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}$

$$q_{10} = \int d^3x' \cancel{r'} \cdot \rho(x') \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z'}{\cancel{r'}}$$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$

Legyen $\boxed{\underline{d} = \int d^3x' \rho(\underline{x}')\, \underline{x}'}$ dipólmomentum

$\Downarrow$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \underbrace{\int d^3x' \rho(x') \cdot z'}_{d_z} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, d_z$$

$$q_{11} = \int d^3x'\, r'\, \rho(x') \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x'-iy'}{r'} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(d_x - i d_y\right) = q^*_{1,-1}$$

$$\phi_{l=1} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(Y_{1,0}\, q_{1,0} + Y_{1,1}\, q_{1,1} + Y_{1,-1}\, q_{1,-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}\varepsilon_0 r^2} \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, d_z + \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x+iy}{r} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(d_x - i d_y\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \frac{x-iy}{r} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(d_x + i d_y\right) \right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3} \left[\underbrace{d_z \cdot z + x\, d_x + y \cdot d_y}_{d \cdot x} \right]$$

$$\phi_{l=1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d \cdot x}{r^3}$$ elektromos dipól potenciálja ~~(vezető rendben)~~

- hasonlóan lehet $\phi_{l=2}, \ldots$ -t kiszámolni

1) Taylor-sorfejtés:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\, \underline{x}\, \underline{x}'}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\underline{n}\, \underline{x}'}{r}}} \approx \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r}\, \underline{n} \cdot \underline{n}'\right) - (*)} \approx$$

gyök kifejtése négyzetes tagig

$(*)\ \frac{1}{8} 4 \frac{r'^2}{r^2} \left(\underline{n} \cdot \underline{n}'\right)^2$

$\frac{1}{1+x} \simeq 1-x$

$$\approx \frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r'^2}{r^2}-2\frac{r'}{r}(\underline{n}\,\underline{n}')\right)+\frac{1}{2}\,\frac{r'^2}{r^2}(\underline{n}\,\underline{n}')^2+\frac{r'^2}{r^2}(\underline{n}\,\underline{n}')^2+O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right)\right]$$

$\downarrow$

$$\phi(\underline{x}) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\left[\int d^3x'\,\rho(x')+\frac{1}{r}\,\underline{n}\cdot\overbrace{\int d^3x'\,\rho(x')\,\underline{x}'}^{\underline{d}}+\frac{1}{r^2}\,n_i n_j\,\frac{1}{2}\int d^3x'\,\rho(x')\cdot\left(3x_i' x_j'-\delta_{ij}r'^2\right)+O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

$$\phi(\underline{x}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\left[\underbrace{\int d^3x'\cdot\rho(x')}_{Q}+\underbrace{\frac{\underline{n}}{r}\cdot\int d^3x'\,\rho(x')\,\underline{x}'}_{\frac{\underline{d}\cdot\underline{x}}{r^2}}+\frac{1}{r^2}\,n_i n_j\,\frac{1}{2}\int d^3x'\,\rho(x')\cdot\left(3x_i' x_j'-\delta_{ij}r'^2\right)+O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

$\downarrow$

ugyanez jött ki

derékszögű koordinátákban is

$Q_{ij}=Q_{ji}$ (szimm.) $\quad \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{Q}}=0$

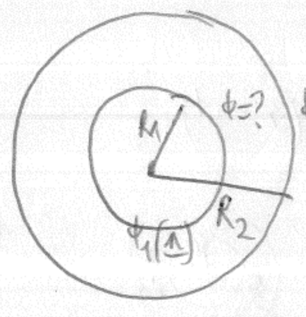
kvadrupól-mom. tenzor

5 független elem ($\mathrm{Sp} \to$ 2 független,

3 nem diagonális)

Speciális feladat

· koncentrikus ~~körök~~ gömbfelületek, $\Phi=?$ a gömbfelületek között (töltéstükrözéssel nem lehet megoldani, ∞ sokszor kéne tükr.)



$R_1 < R_2 \qquad \Delta G_D(\underline{x},\underline{x}')=-\delta(\underline{x}-\underline{x}')$

↳ gömbi koordinátákban írjuk fel

$\downarrow$

$$\int dr\, r^2 \frac{1}{r^2}\delta(r-r_0)\cdot \underbrace{\int d\Omega\, \delta(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)\cdot\delta(\varphi-\varphi_0)}_{\text{teljességi rel. miatt}} = 1$$

$\Downarrow$

$$\Delta G_D = -\delta(\underline{x}-\underline{x}') = -\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\sum_{lm} Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$G_D(\underline{x},\underline{x}') = \sum_{l,m} A_{lm}(r, r', \underline{\Omega}')\,Y_{lm}(\theta,\varphi) \text{ alakban}$$

keresem a Green-fv-t is

$\downarrow$

bal oldal:

hattattuk a deriváldst Y_{lm}-re

$$\sum_{l,m}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\cdot A_{lm}(r,r',\underline{\Omega}')\right) - \frac{1}{r^2}\,l(l+1)\,A_{lm}(r,r',\underline{\Omega}')\right]Y_{lm}$$

$\Downarrow$

b.o. j.o.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\cdot A_{lm}(r,r',\underline{\Omega}')\right) - \frac{1}{r^2}\,l(l+1)\,A_{lm}(r,r',\underline{\Omega}') = -\frac{1}{r^2}\,\delta(r-r')\cdot Y^*_{lm}(\underline{\Omega}')$$

$\Swarrow$ emiatt

$$A_{lm}(r,r',\underline{\Omega}') = g_l(r,r')\,Y^*_{lm}(\underline{\Omega}')$$ ilyen alakra írjuk át

~~kati~~

$\Uparrow$ $\Updownarrow$ a Green fv-t

$$G_D(\underline{x},\underline{x}') = \sum_{l,m} g_l(r,r')\,Y^*_{lm}(\Omega')\,Y_{lm}(\underline{\Omega})$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r\,g_l(r,r')\right) - \frac{1}{r^2}\,l(l+1)\,g_l(r,r') = -\frac{1}{r^2}\,\delta(r-r')$$

$r \neq r'$
1. $(R_1 <)\, r < r'$
2. $r' < r\, (< R_2)$

} 2 ~~tartományban~~ vizsgáljuk

/// 1

$$g_\ell^{(1)}(r,r') = A_\ell(r')\cdot r^\ell + B_\ell(r')\, r^{-\ell-1}$$

$$g_\ell^{(2)}(r,r') = A'_\ell(r')\, r^\ell + B'_\ell(r')\, r^{-\ell-1}$$

peremfeltételek:

$$\overbrace{A_\ell R_1^\ell + B_\ell R_1^{-\ell-1}}^{\phi(R_1)} = 0$$

$$\underbrace{A'_\ell R_2^\ell + B'_\ell R_2^{-\ell-1}}_{\phi(R_2)} = 0$$

$r < r'$ $\quad g_\ell^{(1)}(r,r') = A_\ell(r')\left[r^\ell - R_1^{2\ell+1}\, r^{-\ell-1}\right]$

$r > r'$ $\quad g_\ell^{(2)}(r,r') = B'_\ell(r')\cdot\left[r^{-\ell-1} - R_2^{-2\ell-1}\cdot r^\ell\right]$

DE szimmetrikus a két koordináta olyan szempontból, ha r-t és r'-t az egyik képletben megcseréljük, a másik képletet kell kapnunk

$r_< = \min(r,r')$

$r_> = \max(r,r')$

$\Downarrow$

$$g_\ell(r,r') = C_\ell\cdot\left(r_>^{-\ell-1} - R_2^{-2\ell-1}\, r_>^\ell\right)\cdot\left(r_<^\ell - R_1^{2\ell+1}\cdot r_<^{-\ell-1}\right)$$

$g_\ell(r \to r')$ folytonos fv.

↳ ki kell küszöbölni a szingularitást — a derivált szakad

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} dr\cdot r^2\cdot \cancel{(\ldots)}\ \left(\ldots\right)$$

jobb oldal $\to -1$ $\Rightarrow \int \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\cdot g_\ell) = -1$ $\Uparrow$

bal oldal $\to$ ha g_ℓ reguláris $\to \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{1}{r^2} g \to 0$

7. óra

$R_1 < R_2$ $\quad \Delta G_0(\underline{x}; \underline{x}') = -\delta(\underline{x}-\underline{x}')$ $\quad G_D(R_1; r') = G_0(R_2; r') = 0$

$$G_0 = \sum_l g_l(r, r') \sum_m Y^*_{lm}(\underline{n}') Y_{lm}(\underline{n})$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r g_l(r; r')\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r; r') = -\frac{1}{r^2}\delta(r-r') \Big/ \cdot r^2 \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}$$

ald:

$$g_l(r; r') = C_l\left(r_>^{-l-1} - R_2^{-2l-1} r_>^{l}\right)\left(r_<^{l} - R_1^{2l+1} r_<^{-l-1}\right)$$

h.o.:

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} dr \cdot r \cdot \frac{d^2}{dr^2}(r g_l) = r\frac{d}{dr}(r g_l)\Big|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} dr\, r g_l = -1$$

$\downarrow$ 0

$C_l(r, r')$ reguláris $r = r'$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} dr\, g_l(r, r') \to 0$$

$$\underbrace{r\frac{d}{dr}\left(r g_l(r, r')\right)\Big|_{r=r_>\to r'}}_{r' g_l'(r, r')|_{r=r_>}} - \underbrace{r\frac{d}{dr}\left(r g_l(r, r')\right)}_{} \Big|_{r=r_<\to r'} = -1$$

$$r' g_l'(r, r')\Big|_{r=r_>} - r^2 g_l'(r, r')\Big|_{r=r_<} = -1$$

$\Rightarrow$ a fv. reguláris, de a deriváltban ugrás van

(~ kvantummech.-i hullámfv.)

az $r = r'$-ben véve az egyenletet

$$C_l\left[-\left((l+1) r^l + l R_1 r^{-l}\right)\left(r^{-l-1} - R_2^{-2l-1} r^l\right) + \left(-l r^{-l-1} - (l+1) R_2^{-l-1} \cdot r^l\right) \cdot \left(r^l - R_1^{2l+1} r^{-l-1}\right)\right] = -1$$

$$C_l \left[-2l-1 + (2l+1) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2l+1} \right] = -1$$

!

célszerű mindig az adott geometriához ~~tartozó~~ illeszkedő alakban felírni

a Green-fvt:

$\Rightarrow$ Dirac-δ alakjú a teljességi relációból: $\sum_\alpha f_\alpha^*(\xi) f_\alpha(\xi') = \delta(\xi - \xi')$

Makroszkopikus közeg elektrosztatikája

1) $\boxed{\mathrm{div}\, \underline{e}(\underline{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \eta(\underline{x})}$

$$\eta(\underline{x}) = \underbrace{\varrho_{makro}(\underline{x})}_{\text{„mérnöki" töltés, kívülről vitt}} + \underbrace{\eta_{kötött}(\underline{x})}_{\text{a molekulában, szerkezetben lévő „belső" töltések}}$$

átl. kieg.: „ablakfv."

$$\underbrace{h(\underline{x}')}_{\text{átlagolni kívánt mennyiség}} \xrightarrow{f(\underline{x}-\underline{x}')} \underbrace{H(\underline{x})}_{\text{makroszkopikus átlagfv.}}$$

$\sim 10^{-3}, 10^{-4}$ cm sugarú környezetben átlagolunk

$$\eta_k(\underline{x}) = \sum_n \sum_{j_n} q_{j_n} \delta(\underline{x} - \underline{x}_n - \underline{x}_{j_n})$$

molekula helyzete

összes molekulára vett összegzés

egy molekulán belülre vett összegzés

molekulán belüli relatív helyzet

ahol

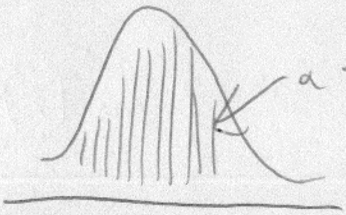
a mol.-k össztöltése 0

az átlagolás nagyon sok részre történik

pl. $\rightarrow 10^{14}$ db töltéshordozó $(10^{-2}\,\mathrm{cm})^3$-ben ahol $H(\underline{x}) = \dfrac{\int d^3x' \, h(\underline{x}') \, f(\underline{x}-\underline{x}')}{\int d^3x \, f(\underline{x}-\underline{x}')}$ $\quad (\to = 1)$

normáltuk

szemléletes kép:



a sok δ-t kiátlagoljuk

vmi „makroszkopikus" átlagtöltésre

Elektrosztatika egyenletei:

$$\mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_m(\underline{x}) + \eta_k(\underline{x})\right) \qquad \text{II. } \mathrm{rot}\,\underline{E}(\underline{x}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{E}(\underline{x}) = -\,\mathrm{grad}\,\phi(\underline{x})}$$

$$\overline{\eta_k}(\underline{x}) = \sum_n \sum_{j_n} q_{j_n} \cdot f(\underline{x}-\underline{x}_n-\underline{x}_{j_n}) \approx \sum_n \underbrace{\Big(\sum_{j_n} q_{j_n}\Big)}_{\text{mol. össztöltése}=0} f(\underline{x}-\underline{x}_n) - \sum_n \underbrace{\Big(\sum_{j_n} q_{j_n} \cdot x^{\alpha}_{j_n}\Big)}_{d^{\alpha}_n} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f(\underline{x}-\underline{x}_n) + \dots$$

komponensek

(mol. belüli helyzet)

$\underline{x}_{j_n}$ nagyon kicsi a makroszkopikus méretekhez képest

$$\Downarrow$$

$$\overline{\eta_k}(\underline{x}) = -\sum_n d^{\alpha}_n \, \partial_\alpha f(\underline{x}-\underline{x}_n)$$

a dipólmomentumra kell összegezni

ált. ~~legfeljebb~~ idáig menni a sorfejtéssel (esetleg a köv. tagig $\to \approx$ kvadrupól mom.)

még mindig nem tetszik nekünk, hogy az ablakfv. deriváltjával átlagolunk

$$-\sum_n d_n^{\alpha}\partial_{\alpha}^{x} f(\underline{x}-\underline{x}_n) \overset{?}{=} -\sum_n \int d^3x'\, f(\underline{x}-\underline{x}')\cdot \partial_{\alpha}^{x'}\left(d_{n\alpha}\,\delta(\underline{x}'-\underline{x}_n)\right) \quad \circledast$$

tudjuk-e ennek az

átlagaként értelmezni $\overline{\eta_{\alpha}(\underline{x})}$ -et

$\circledast$ j.o. → parc. int.:

$$= \sum_n \int d^3x'\, \partial_{\alpha}^{x'} f(\underline{x}-\underline{x}')\, d_{n\alpha}\,\delta(\underline{x}'-\underline{x}_n) = -\sum_n \partial_{\alpha}^{x} f(\underline{x}-\underline{x}_n)\, d_n =$$

a másik tag eltűnik,

ha $\underline{x} \gg \underline{x}'$

$= b.o.$ ✓

⇓

$$\overline{\eta_{\alpha}} = \int d^3x\, f(\underline{x}-\underline{x}')\left[\underbrace{-\partial_{\alpha}^{x'}\cdot\left(\sum_n d_{n\alpha}\,\delta(\underline{x}'-\underline{x}_n)\right)}_{-\mathrm{div}_{x'} P(\underline{x}')}\right]$$

Legyen: $\underbrace{P_{\alpha}^{(\underline{x}')} := \sum_n d_{n\alpha}\,\delta(\underline{x}'-\underline{x}_n)}_{\text{a molekulák dipólmomentumainak összege}}$

⇓

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{I.} & \mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_m(\underline{x}) - \mathrm{div}\,\underline{P}(\underline{x})\right) \\ \mathrm{II.} & \mathrm{rot}\,\underline{E}(\underline{x}) = 0 \end{array}}$$

ha lineáris rendig fejtünk sorba

ha $\rho_m = 0 \rightarrow \mathrm{div}\,\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho_m = 0$ → $\Delta\phi = 0$, ha $\rho_m = 0$

2) <u>Baj</u>: $\underline{P}(\underline{x}) = \underline{P}[\underline{E}(\underline{x})]$

$\downarrow$

a dipólmomentum függ a ~~kou~~) külső tértől

(szétválasztódnak a töltések)

$\Downarrow$

$\underline{D}(\underline{x}) = \varepsilon_0 \underline{E}(\underline{x}) + \underline{P}(\underline{x}) \rightarrow \boxed{\operatorname{div} \underline{D}(\underline{x}) = \rho_m(\underline{x})}$

- Bizonyos anyagokra:

$\underline{P}(\underline{E} = 0) = 0$

$$\underline{P}(\underline{x}) = \underline{P}(\underline{E}(\underline{x})] \approx \underbrace{\varepsilon_0 \chi_e \underline{E}(\underline{x})}_{\text{lineáris polarizálhatóság}} + O(E^2)$$

χ_e : el. statikus szuszceptibilitás, polarizálhatóság

↳ ekkor:

$\underline{D}(\underline{x}) = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E}(\underline{x})$

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$: relatív dielektromos áll.

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$

$\downarrow$

$\operatorname{div}(\varepsilon(\underline{x}) \underline{E}(\underline{x})) = \rho_m$

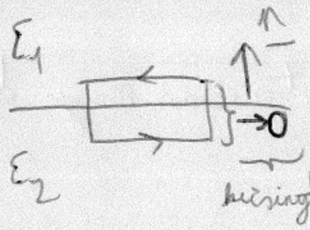
$\chi_e > 0$ általában

(csökkentik a teret a dipólusmom.-ok)

$\boxed{\text{ha}}$ ε = helyfüggetlen $\operatorname{div} \underline{E}(\underline{x}) = \frac{1}{\varepsilon} \rho_m(\underline{x})$

3) Határfeltételek:

a)



$\mathrm{rot}\,\underline{E} = 0$

$$\boxed{\underline{E}_{t_1} = \underline{E}_{t_2}}$$

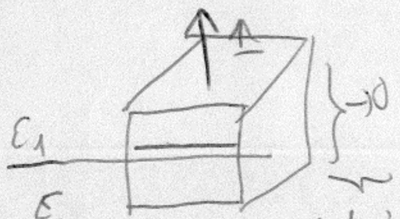
$$\Downarrow$$

$$\underline{n} \times (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) = 0$$

$$\underline{E} = \underbrace{\underline{E}_t}_{\text{tangenciális}} + \underbrace{\underline{E}_n}_{\text{normális}}$$

tangenciális: felület $\parallel$ normális: $\perp$

b)



ez is kics., DE a felületen lehet makr. töltéssűr.

$\mathrm{div}\,\underline{D} = \rho_m$

$$\boxed{\underline{E}_{n_1} - \underline{E}_{n_2} = K_m(\underline{x})}$$

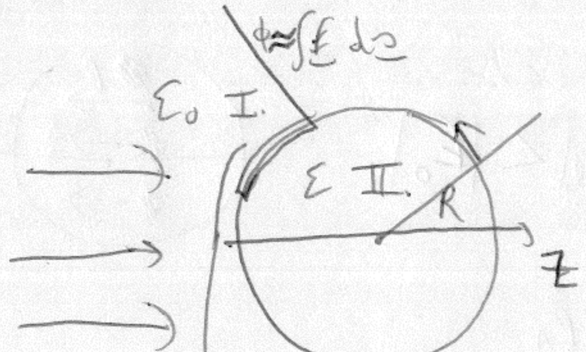
$$\underline{n} \cdot (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) = K_m(x)$$

↳ felületi makroszkopikus töltéssűrűség

4) Feladatok:

a)

$\phi \approx \int \underline{E}\, dz$



$$\Delta\phi_{I} = \Delta\phi_{II} = 0$$

$$\phi_{I} = -E_0 \cdot r P_1 + B_\ell \frac{1}{r^2} P_1$$

külső

a Legendre polinomoktól $\ell \neq 1$-ek 0-k lesznek

$$\phi_{II} = A_\ell\, r\, P_1$$

belső

$\underline{E}_{t_1} = \underline{E}_{t_2}$

ekvivalens $\Updownarrow$

a B-k 0-k lesznek, mert egyébként $r=0$-nál szinguláris lenne

kívül $\phi = -E_0 \cdot z = -E_0 \cdot r \cdot \underbrace{\cos\theta}_{P_1}$ ($r \to \infty$)

$A_\ell = 0$, ha $\ell \neq 1$ (külső)

$\boxed{B_\ell = 0}$ (belső), ha $\ell \neq 1$

$\phi_1 = \phi_2$ a felület 2 oldalán

$$\cancel{AR} - E \cdot R P_1 + \sum B_\ell \cdot R^{-\ell-1} \cdot P_\ell = A \cdot R P_1$$

$$-E_0 \cdot R + B_k \cdot \frac{1}{R^2} = A_b R$$

$\cdot \frac{2}{R}$

$$-\frac{\partial \phi_I}{\partial r}\bigg|_R \varepsilon_0 = -\frac{\partial \phi_{II}}{\partial r}\bigg|_R \varepsilon \qquad \longleftrightarrow \ \phi \text{ folytonosan megy át}$$

$\Downarrow$

$$\varepsilon_0 \left(-E_0 - \frac{2}{R^3} B_k\right) = \varepsilon \cdot A_b$$

$\Downarrow$

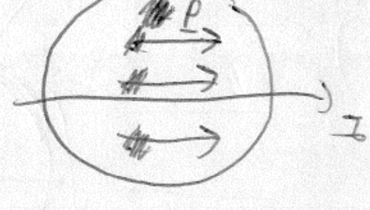
$$\underline{\underline{A_b}} = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 = \underline{\underline{-\frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0}}$$

$$\underline{\underline{B_k = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cdot R^3}}$$

$$-E_0 - 2E_0 = A_b (2 + \varepsilon_r)$$

$$A_b = -\frac{3E_0}{2 + \varepsilon_r}$$

A_b a belső térerősség, $|A_b| < |E_0|$



$\phi_{dipól} = B_k \frac{1}{r^2} \cdot P_1$

$B_k = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \cdot E_0 \cdot R^3 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \cdot E_0 \cdot R^3$

$$\phi_{dipól} = \underbrace{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} E_0 R^3}_{d_{ind}} \cdot \frac{1}{r^2} P_1$$

$$\underline{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \underline{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\underline{E} \rightarrow \underbrace{\frac{4\pi}{3} R^3 (\varepsilon - \varepsilon_0) \underbrace{\underline{E_b}}_{-A_b}}= \underline{P}$$

$\Rightarrow$

$$\phi_{kint} = \frac{\underline{d}\cdot\underline{x}}{r^3} = \frac{d}{r^2} P_1 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

ahol $d = \frac{4\pi}{3} R^3 \underline{P}$

$$\phi_{bent} = -E_b \cdot r \cdot P_1 \to \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{R^2} = -E_b \cdot R}_{\text{"pontszerű" dipólus tere}}$$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\underline{d}\,\underline{x}}{r^3}$ dipól tere

↓

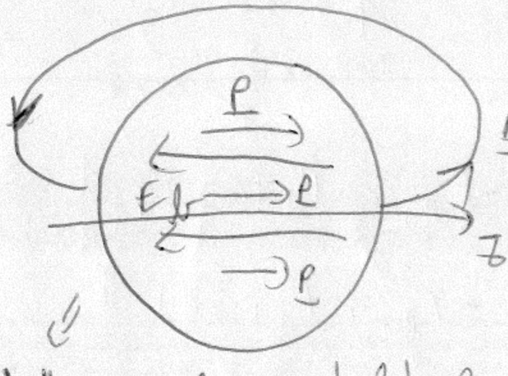
az egész gömbre $\int$-va

$\underline{P} = \frac{\underline{d}\,\underline{x}}{r^3}$

↓

$E_b = -\frac{P}{\varepsilon_0}$

$\underline{E}_k = +\underline{P}$



⇓

a térerősség belül és kívül ellentétes irányú

⇓

ez csak akkor lehet, ha ~~...~~ ugrása van

↓

felületi töltéssűr.

8. óra

0) Ism.: polarizálható közeg

$\underline{P}(\underline{x})$ $\quad \underline{D}(\underline{x}) = \varepsilon_0 \underline{E}(\underline{x}) + \underline{P}(\underline{x})$ $\quad \mathrm{div}\, \underline{D}(\underline{x}) = \rho_m(\underline{x})$

$\mathrm{rot}\, \underline{E}(\underline{x}) = 0$

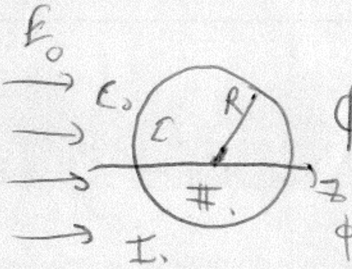
$$\underline{P}[\underline{E}] = \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}(\underline{x}) \quad \text{(lineáris közelítés)}$$

$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 (1+\chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

határfelt. ek:

$$D_{n_1} - D_{n_2} = 0 \quad \equiv \quad \phi_1 = \phi_2 \quad \text{a határon}$$

ezek ekvivalensek



$$\phi_I = -E_{\text{külső}}\, r \cdot P_1(\cos\vartheta) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{r^2} P_1$$

$$\phi_{II} = -E_{\text{belső}}\, r\, P_1(\cos\vartheta)$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} d = E_0 R^3 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$$

$$E_{\text{belső}} = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0$$

↓

bent kisebb az el. tér!

ezt is írtuk, hogy egy dipólmom. indukálódik a gömbön

↓

összhangban vannak

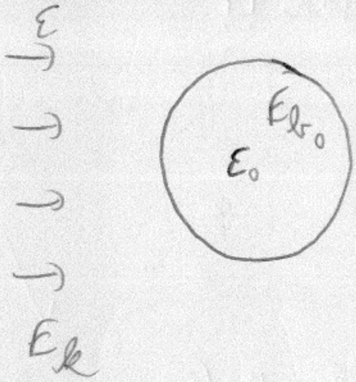
P nek ϕ_k-ra is lesz hatása!

$$d = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot P = \frac{4\pi\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} E_0 \cdot R^3$$

$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_b = \varepsilon_0 \cdot \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} E_0$$

a pol. miatt!! ellentétesen fordulnak be a belső dipólusok a külső térrel

1) Másik példa:



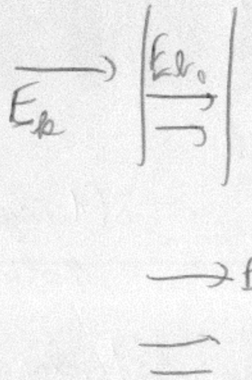
$\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon_0$

$E_{b_0} \leftrightarrow E_b$ } előző példából

$E_k \leftrightarrow E_{k_0}$

$$E_{b_0} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} E_k$$

vagy:



$D_{n_1} = D_{n_2}$

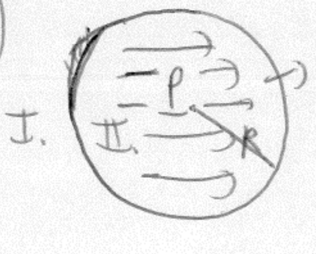
$\varepsilon E_k = \varepsilon_0 E_{b_0}$ $\qquad E_{b_0} = \varepsilon_r E_k$

$\longrightarrow E_k$

$E_k = E_{k_0}$

$$\underline{E}_{b_0} = \underbrace{\varepsilon_r \cdot \underline{n}(\underline{n}\,\underline{E}_k)}_{\text{merőleges komp.}} + \overbrace{\underline{n} \times \underline{E}_k}^{\text{tangenciális} \to \text{ez nem változik}}$$

2) belül jellemezze egy <u>állandó</u> pol. vektor!



$$\phi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{r^2} P_1 \quad \to \text{ a dipólusok tere dipóljárulékként jelenik meg}$$

$r=R$-ben

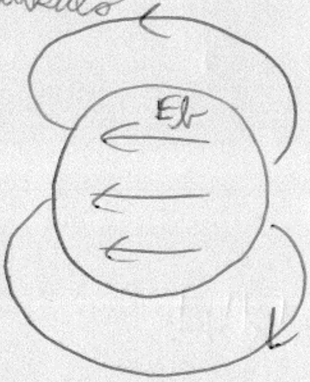
$$\phi_{II} = -E_b\, r\, P_1$$

ahol (kutatás-eqből)

$$\underline{\underline{E_b = -\frac{1}{3\varepsilon_0} P}} \longleftarrow \boxed{d = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot P} \qquad \underline{d}_{atom} = \underline{P} \text{ most}$$

teljes gömb dipólusa

kialakuló elrendeződés



$\underline{E}$-nek szakadása van!!

ell:

$D_{r_1}(R) = D_{r_2}(R)$ $\quad D_{1r} = \underline{n}\,(\varepsilon_0 \underline{E}_b + \underline{P}) = \frac{2}{3}\,\underline{n}\cdot\underline{P} = \varepsilon_0\cdot\underline{n}\cdot\underline{E}_k =$

radiális komponens

$= \frac{1}{\cancel{4\pi}\cancel{\varepsilon_0}}\cdot\frac{2}{\cancel{R^3}}\cdot\frac{\cancel{4\pi}}{3}\cancel{R^3}\,\underline{n}\cdot\underline{P}\cdot\cancel{\varepsilon_0} = \frac{2}{3}\,\underline{n}\,\underline{P}$ ✓

ϕ_I-ből $\rightarrow \frac{\partial \phi_I}{\partial r} = \underline{E}_k$

radiális komp. (1. Legendre polinom)

$\underline{D}$ folytonos, $\underline{E}$-nek szakadása van

$\operatorname{div}\underline{D} = 0 \leftarrow$ nincs szabad töltés a rendszerben (a véges tart. ban)

$\varepsilon_0\cdot\operatorname{div}\underline{E} = -\operatorname{div}\underline{P} = \rho_{pol}$

ez kívül 0, de belül nem 0

$\Rightarrow$

a pol. miatt mégis keletkezik térerősség

3) Clausius–Mossotti kapcsolat az atomi (χ_{atom}) és a makroszkopikus (χ_e) polarizálhatóság között

$$\underset{(\text{dipólmom.})}{p_{atom}} = \varepsilon_0 \chi_{atom} \cdot \underbrace{e(x_{atom})}_{\text{mikroszk. térerősség}} \qquad P = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot E = N \cdot p_{atom}$$

↑

de ezt a többi atom is befolyásolja!

E

Modell: elég nagy R sugarú gömbön kívüli atomok terét NEM észleli a belső ~~atom~~ atomosnak, csak kiátlagolva

DE R sugáron belül atomosnak érzi

$$e(x_a) = \underbrace{E}_{\text{külső}} + \underbrace{e_i}_{\text{belső, atomos tér}} \qquad e_i = \underbrace{e_{kristály}}_{\text{a belül lévő többi atom által létreh. tér}} + \underbrace{E_{üreg}}_{\text{a külső tér hatására belül létrejövő térerősség}}$$

előző feladatból:

$$E_{üreg} = -E(P_{gömb}) = \frac{1}{3\varepsilon_0} P$$

$e_{kristály} = 0$, egyébként a térerősség elmozdítaná az atomokat a helyükről → nem lenne stabil a krist.

$$\underline{e}(\underline{x}_a) = \underline{E} + \frac{1}{\varepsilon_0}\underline{P} = \underline{E}\left(1+\frac{1}{3}\chi_e\right)$$

$\uparrow$

$$\underline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \cancel{(\ )} \cdot \underline{E} = N \underline{p}_{atom}$$

$$\cancel{\varepsilon_0} \chi_e \cdot \cancel{\underline{E}} = \underline{P} = N \cdot \cancel{\varepsilon_0} \chi_{atom} \overbrace{\left(1+\frac{1}{3}\chi_e\right)\cancel{\underline{E}}}^{\underline{e}(\underline{x}_a)}$$

$$\boxed{\chi_{atom} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\chi_e}{1+\frac{1}{3}\chi_e}}$$

$\uparrow$ makroszk.

a ~~külső~~ szuszceptibilitás meghatározásával

az atomi " —"— " is megkapható !!

$\downarrow$

R-re érzéketlen az eredmény !!!

↳ mindegy, hová helyezzük a határt

$\downarrow$

(renormalizálható elmélet):

↳ pl. kül. frekvenciájú gerjesztések → a nagyfrekv.-sokat kiintegráljuk (kiátlagoljuk) → de mi a nagy frekvencia?

$\downarrow$

választunk vmi határt, amitől nem függ az eredmény)

4) Modell atomi χ_{atom}-ra!

a) rugalmasan kötött elektron-modell:

$$-m\omega_a^2 \underline{x}_a + q_a \underline{e} = 0$$

$$q_a \cdot \underline{x}_a = \underline{p}_{atom} = \frac{q_a^2}{m\omega_a^2} \cdot \underline{e} \quad \rightarrow \quad \chi_a = \frac{q_a^2}{m\omega_a^2}$$

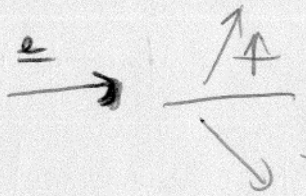
$\rightarrow 5\Omega$

általánosítás: $\rightarrow \sum_i \frac{q_{ai}^2}{m_i \omega_{a_i}^2} = \chi_a$

több hord. [illegible]

b)

az atomoknak van kezdeti dipólmomentumuk, de alapállapotban ezek kioltják egymást (véletlenszerűen rendeződnek el)



$$U_{pot} = -p_\alpha \cdot \underline{e}$$

ha külső tér van, 0 hőm.-en beállnának a térnek megfelelően a kis dipólok

T: véges hőmérsékleten

lesz egy kis rendezetlenség (az beállási irány miatt most változik)

$\varepsilon = p_\alpha \cdot \underline{e}$ → beállási energia

$$\Pi(\cos(p_\alpha, \underline{e})) = N \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}$$

→ átlagosan ~~hogyan fog~~ mekkora energiával áll be? (várható érték)

Π: sűrűségfv.

N: Boltzmann-statisztika

$$\overline{p_\alpha \cdot \hat{e}} = \int_{-1}^{1} p_\alpha \cdot \hat{\underline{e}}\; \Pi(\cos(\hat{p}_\alpha, \underline{e}))\, \underbrace{d(\cos(\hat{p}_\alpha, \underline{e}))}_{\text{integrálási változó}}$$

$$\overline{p_\alpha \cdot \underline{e}} = \underbrace{\frac{1}{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{p_\alpha \cdot e}{k_B T}} \cdot d\cos(\hat{p}_\alpha, \hat{e})}}_{\text{normálási faktor}} \cdot \int_{-1}^{1} d\cos(\hat{p}_\alpha, \underline{e})\; p_\alpha \cdot \hat{\underline{e}} \cdot e^{-\frac{p_\alpha e}{k_B T}}$$

változócsere:

$y := \cos(\hat{p}_\alpha, \underline{e})$

$$\boxed{\xi = \frac{p_\alpha e}{k_B T}}$$

$$\overline{p_\alpha \underline{e}} = \frac{p_\alpha \int_{-1}^{1} dy \cdot y \cdot e^{-\frac{p_\alpha e}{k_B T} y}}{\int_{-1}^{1} dy\, e^{-\frac{p_\alpha e}{k_B T} \cdot y}} = p_\alpha \cdot \frac{-\frac{d}{d\xi}\int_{-1}^{1} dy\, e^{-\xi y}}{\int_{-1}^{1} dy\, e^{-\xi y}} =$$

$$= -p_\alpha \frac{d}{d\xi} \ln \underbrace{\int_{-1}^{1} dy\, e^{-\xi y}}_{\left[-\frac{1}{\xi} \cdot e^{-\xi y}\right]_{-1}^{+1}} = -p_\alpha \frac{d}{d\xi} \ln\left[-\frac{1}{\xi} \cdot \left(e^{-\xi} - e^{\xi}\right)\right]$$

azt az esetet nézve, ha a hőmozgás energiája >> a beállás energiája $\Rightarrow \xi \ll 1$

$$\xi = \frac{p_a \cdot e}{k_B T}$$

ekkor:

$$\overline{p_a \cdot e} \approx -p_a \cdot \frac{d}{d\xi}\left[+\frac{1}{\xi}\left(2\xi + \frac{1}{3}\xi^3 + \dots\right)\right] \approx p_a \cdot \frac{1}{3}\xi$$

$$\Downarrow \qquad \xi = \frac{p_a \cdot e}{k_B T}$$

$$\overline{p_a \cdot e} = \frac{p_a^2 \cdot e}{3 k_B T}$$

$$\varepsilon_0 X_a \cdot e \cdot e = \frac{p_a^2 \cdot e}{3 k_B T}$$

$$\varepsilon_0 \cdot X_a = \frac{p_a^2}{3 k_B T}$$

5) Makroszkopikus közeg energiasűrűsége

vigyázni kell: eddig úgy néztük, hogy a töltés nem hat vissza a külső térerősségre, de ez most nem igaz!

$\downarrow$

ötlet: vigyük be kis adagokban a töltéseket $\to$ az újonnan kialakuló teret az energiaképletben az utána hozott kis töltés nem látt. meg (legalábbis elhanyagoljuk a változást)

$\delta\rho_m(\underline{x}) \leftarrow \rho_m(\underline{x})$

ennyivel nő az energia

$$\delta W = \int d^3x\, \delta\rho_m(x) \overbrace{\Phi(\underline{x})}^{\text{ez a „régi” töltések tere}} = \int d^3x\, \underbrace{\mathrm{div}\left[\delta \underline{D}(x)\right]\Phi(x)}$$

$\mathrm{div}\, \underline{D}(x) = \rho_m(x)$

$\mathrm{div}(\underline{D} + \delta\underline{D}) = \rho_m + \delta\rho_m$

$\mathrm{div}(\delta\underline{D}) = \delta\rho_m$

msz.: $\mathrm{div}\left[\delta\underline{D} \cdot \Phi(x)\right] - \delta\underline{D}(x)\,\mathrm{grad}\,\Phi(x)$

áthárítjuk a deriválást ...

$$\partial_i(\delta D_i \phi) \stackrel{\uparrow}{=} \partial_i \delta D_i \cdot \phi + \delta D_i \, \partial_i \phi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\delta W = -\int d^3x \; \delta \underline{D}(\underline{x}) \cdot \operatorname{grad} \phi(\underline{x})} = \boxed{\int d^3x \; \delta \underline{D}(\underline{x}) \, \underline{E}(\underline{x})}$$

$$\uparrow$$

$$\int d^3x \; \operatorname{div}(\delta \underline{D} \, \phi(\underline{x})) = \oint d^2x \; \delta \underline{D} \cdot \phi(\underline{x}) = 0$$

$\uparrow$ $\operatorname{rot} \underline{E} = 0$

$\downarrow$ ez még anyagszerk. független állítás

Tfh. <u>lineáris</u> polarizálhatóságú a közeg: (csak erre igaz az összefüggés)

$$\delta \underline{D}(\underline{x}) = \varepsilon \, \delta \underline{E}(\underline{x})$$

$$\Downarrow$$

$$\delta \underline{D} \cdot \underline{E} = \varepsilon \, \delta \underline{E} \cdot \underline{E} = \frac{\varepsilon}{2} \delta(\underline{E}^2)$$

$$\delta W = \frac{\varepsilon}{2} \int d^3x \, \delta(\underline{E}^2) = \frac{\varepsilon}{2} \delta \int d^3x \, \underline{E}^2(\underline{x}) \rightarrow W = \frac{\varepsilon}{2} \int d^3x \, E^2$$

δ „kihozható",

most lineáris funkcionálja

$\delta \underline{E}$-nek δW

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \, \underline{E} \, \underline{D}$$

(Lehetne pl. $\underline{D} = \underline{E}(\underline{E}^2 \cdot \varepsilon_3) \rightarrow \underline{D}$ köbösen függ $\underline{E}$-től

<u>ZH feladat lehet:</u>

erre $W = ?$ $\quad \delta \underline{D}(\underline{x}) = \varepsilon \, \delta(\underline{E}(\underline{x}) \, E^2)$

$$\underline{E} \delta \underline{D} = \underline{E} \cdot \varepsilon \, \delta(-\text{ll}-) \rightarrow \text{negyedfokú } \underline{E} \text{ függés}$$

$$\underline{E} \delta \underline{D} = \underline{E} \cdot \varepsilon E^2 \delta \underline{E} + \underline{E} \cdot \varepsilon \cdot \underline{E} \cdot \delta(\underline{E}^2) = 3 \cdot \varepsilon \cdot \underline{E}^3 \cdot \delta E = \boxed{\frac{3\varepsilon}{4} \delta(\underline{E}^4)}$$

9. óra

Magnetosztatika

1) $\mathrm{div}\,\underline{B}(\underline{x}) = 0 \quad\quad \mathrm{rot}\,\underline{B}(\underline{x}) = \mu_0 \cdot \underline{j}(\underline{x}) \rightarrow \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,A = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{A} - \Delta \underline{A} =$

$\downarrow$

$\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A} \quad\quad\quad\quad = \mu_0 \underline{j}$

térből pontonként 1 feltétel lehet most

Mértékfeltétel: $\mathrm{div}\,\underline{A} = 0$

$$\Delta \underline{A} = -\mu_0 \cdot \underline{j}(\underline{x}) \Rightarrow \boxed{\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}} \quad \text{Ampère-tv.}$$

$$0 = \mathrm{div}\,\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, j_l(\underline{x}')\, \partial_l^{x} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, j_l(\underline{x}') \cdot$$

$$\cdot\, \partial_l^{x'} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \cdot \left\{ \partial_l^{x'} \left(j_l(x') \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \right) - \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \,\mathrm{div}\, j(\underline{x}') \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\mathrm{div}\,\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\underline{j} = 0 = \cancel{-\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

$\uparrow$ sztatika

$$B_i(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \varepsilon_{ijk}\, j_k(\underline{x}')\, \partial_j^{x} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{[(\underline{x}-\underline{x}') \times \underline{j}(\underline{x}')]}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}$$

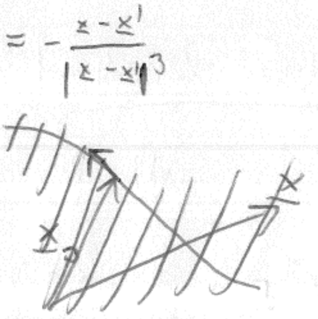
mert:

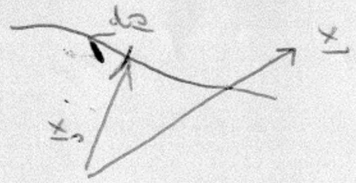
$$\underbrace{-\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|^2} \cdot \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|}}_{\partial_j^{x} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}} = -\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}$$

Biot - Savart:

kereszt

$$\boxed{\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\underline{j}(\underline{x}') \times (\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}}$$





ha a vezető mentén állandó az áramerősség

$$d^3x'\,\underline{j}(\underline{x}') = \underbrace{d\underline{s}}_{d\underline{s}=ds\cdot\underline{e}_e}\,\underbrace{\left(d^2x'_\perp\,\underline{j}\right)}_{I}\,\delta^{(2)}\left(\underline{x}_\perp-\underline{x}(s)\right) \quad\to\quad \underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0\cdot I}{4\pi}\int\frac{d\underline{s}\times\left(\underline{x}-\underline{x}(s)\right)}{|\underline{x}-\underline{x}(s)|^3}$$

2) Multipólus sorfejtés (vizsgálati távolból)

$$|\underline{x}-\underline{x}'| = |\underline{x}|\left(1-\frac{\underline{x}\cdot\underline{x}'}{|\underline{x}|^2}+\dots\right) \quad \text{és} \quad |\underline{x}|\equiv r$$

$$|\underline{x}'| \ll |\underline{x}|$$

$$\underline{A}(\underline{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi\cdot r}\int d^3x'\,\underline{j}(x')\cdot\left(1+\frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{r^2}+\dots\right)$$

a) monopólus nincs:

$$\underline{A}^{(0)}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3x'\,\underline{j}(x') \qquad (\text{„mágneses monopólus"})$$

msz.:

$$\int d^3x'\,\partial_e^{x'}\left(j_e(x')\,f(x')\,g(x')\right) = 0 = \int d^3x'\,j_e\left((\partial_e f)\,g + f\,\partial_e g\right) \quad (*)$$

tetsz. f, g-re (ha j-l viselkedő fv-ek) $\qquad \operatorname{div} j = 0$

most:

$$f = x_i' \qquad g = 1$$

$$(*) = \int d^3x'\,j_e(x')\,\delta_{ei} = \int d^3x'\,j_i(x') = 0 \;\to\; \underline{A}^{(0)}(\underline{x}) = 0.$$

b) dipólus (sorfejtésben 1. tag):

$$A_i^{(1)}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,x_e\int d^3x'\cdot j_i(x')\,x_e' = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,x_e\left[\frac{1}{2}\int d^3x'\left(j_i x_e' - j_e x_i'\right) + \frac{1}{2}\int d^3x'\left(j_e x_e' + j_e\cdot x_i'\right)\right]$$

(*) $\ell = x_i'$ $\quad g = x_k'$

$$0 = \int d^3x' \, j_\ell \left(x_k' \delta_{\ell i} + x_i' \delta_{\ell k} \right) = \int d^3x' \left(j_i x_k' + x_i' j_k \right)$$

$$\rightarrow A_i^{(1)}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} x_\ell \left[\frac{1}{2} \int d^3x' \left(j_i x_\ell' - j_\ell x_i' \right) + \cancel{\frac{1}{2} \int d^3x' \left(j_i x_\ell' + j_\ell x_i' \right)} \right]$$

msz.:

$$(\underline{x}\,\underline{x}')\,\underline{j} - (\underline{x}\underline{j}) \cdot \underline{x}' = \underline{x} \times (\underline{j} \times \underline{x}') \quad \text{(kettős vektorszorzat)}$$

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{x} \times \frac{1}{2} \int d^3x \left(\underline{j}(\underline{x}') \times \underline{x}' \right) \qquad \boxed{\underline{m} := \frac{1}{2} \int d^3x' \, \underline{x}' \times \underline{j}(\underline{x}')}$$

mágneses momentum

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \underline{x}$$

- Több töltés esetén: $(j = q \cdot v)$

$$\underline{j}(\underline{x}') = \sum_n q_n \underline{v}_n \delta^{(3)}(\underline{x}' - \underline{x}_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{m} = \sum_n q_n \frac{1}{2} \underline{x}_n \times \underline{v}_n \cdot \frac{m_n}{m_n} = \sum_n q_n \cdot \frac{1}{2m_n} \cdot \underbrace{\underline{x}_n \times \underline{p}_n}_{\underline{L}_n \text{ (pályamomentum)}}$$

tömeg!

- 1 részecskére:

$$m_z = \mu_B \left(L_z / \hbar \right), \text{ahol } \mu_B = \frac{q\hbar}{2m}$$

(mágn. mom.) (Bohr-magneton)

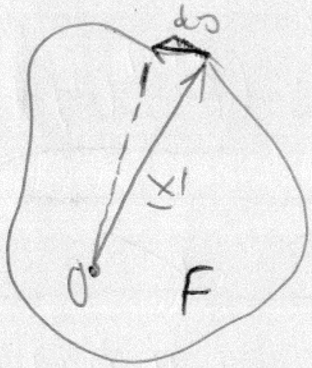
$(L_z = m\hbar$ kvantumok$)$

(kvantummech.-ban

$$m_z = \underset{\uparrow}{g} \cdot \mu_B \cdot \frac{L_z}{\hbar}$$

giromágn. faktor!)

$$\underline{m} = \frac{I}{2}\oint \underline{x}' \times d\underline{s}$$



ha $\underline{j}$ = áll a vezető keresztmetsze tén

a felület nagysága

$$\boxed{\underline{m} = \frac{I \cdot F}{2}\,\underline{n}}$$

Ampère → az elemi mágneses dipólokat köráramokkal lehet jellemezni

3) Makroszkopikus magnetosztatika

$$\operatorname{div} \underline{B}^{(\text{makro})}(\underline{x}) = 0$$

$$\operatorname{rot} \underline{B}^{(\text{makro})} = \mu_0 \underline{j}^{(m)}(\underline{x}) + ?$$

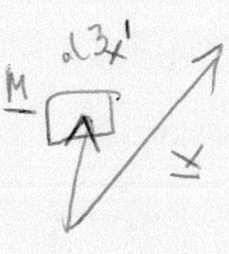
$$\underline{A}^{(\text{makro})}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \cdot \frac{\underline{j}^{(m)}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} -$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \underbrace{\frac{(\underline{x}-\underline{x}')\times \underline{M}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}}_{*} = *$$

$$\underline{M}(\underline{x}) = \sum_i n_i^{(x)} \underline{m}_i$$

↓

az i. féle mágneses momentummal rendelkező ($\underline{m}_i$) rész. száma



msz.:

$$\partial_e^{x'}\left(\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\right) = \frac{x_e' - x_e}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}$$

~~$* = \ldots - \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \cdot \varepsilon_{ijk}\,\partial_j$~~

$$*_i = \varepsilon_{ijk}\left(\partial_j^{x'}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\right)\cdot M_k(\underline{x}') = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j^{x'}\left(\frac{M_k}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\right) - \underbrace{\varepsilon_{ijk}\left(\partial_j^{x'} M_k(\underline{x}')\right)}_{(\operatorname{rot} M)_i}\cdot\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

$$\underline{A}^{(\text{makro})}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \cdot \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\cdot \underbrace{\left(\underline{j}^{(m)}(\underline{x}') + \text{rot}\,\underline{M}(\underline{x}')\right)}_{\text{most ez játsza "j" szerepét}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{rot}\,\underline{B}^{(\text{makro})} = \mu_0\left(\underline{j}^{(m)}(\underline{x}) + \text{rot}\,\underline{M}(\underline{x})\right)}$$

mágnesezettségi áramsűrűség

$$\boxed{\text{div}\,\underline{B}(\underline{x}) = 0}$$

$\underline{H}(\underline{x})$ = mágneses térerősség $:= \frac{1}{\mu_0}\underline{B}(\underline{x}) - \underline{M}(\underline{x})$

$$\boxed{\text{rot}\,\underline{H} = j(\underline{x})}$$

a mágnesezettséget az áram bekapcsolásával létrejövő $\underline{H}$ hozza létre!

$$\underline{B} = \mu_0(\underline{H} + \underline{M})$$

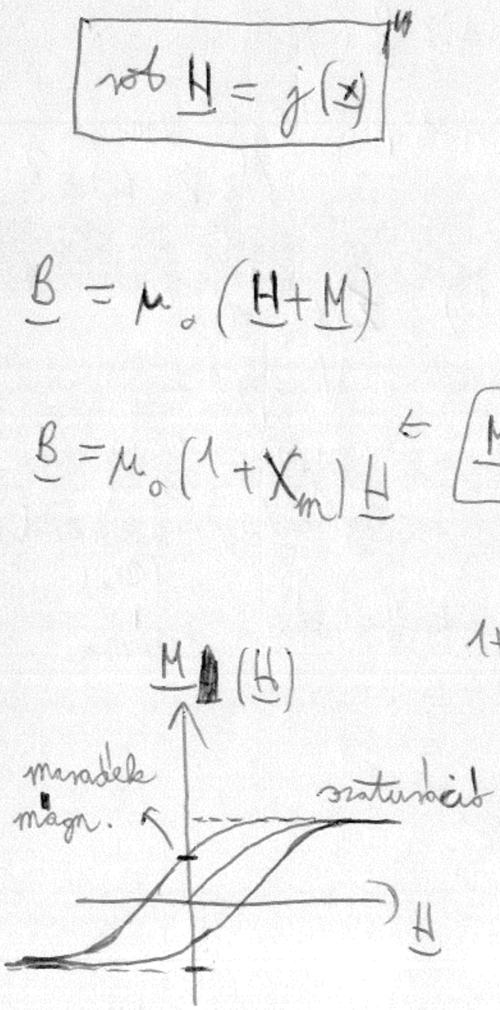
$$\underline{B} = \mu_0(1+\chi_m)\underline{H} \leftarrow \boxed{\underline{M} = \chi_m \underline{H}}$$ ha lineáris összefüggés van

$1+\chi_m = \mu_r$

$\chi_m > 0$ paramágn.

$\chi_m < 0$ diamágn.

ferromágn. $\chi_m \gg$



hiszterézis

ha

$\underline{j^{(m)} = 0}$: $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\,\underline{H} = 0$ $\qquad \underline{H} = -\mathrm{grad}\,\Phi_m$

mágneses skalárpotenciál

$\downarrow$

csak akkor ha $j^{(m)} = 0$!!

$\mathrm{div}\,\frac{1}{\mu_0}\underline{B} = 0$

$\downarrow$

$\mathrm{div}\,\underline{H} = -\mathrm{div}\,\underline{M}$

„mágn. töltés": $\rho_m = -\mathrm{div}\,\underline{M}$

$$\Delta\phi_m = \rho_m$$

parc. int.

$$\phi_m(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{\mathrm{div}\,\underline{M}(x')}{(\underline{x}-\underline{x}')} = \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\underline{M}(x')\cdot\nabla\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,M_l(x')\,\partial_l^x\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

ha $|\underline{x}| \gg |\underline{x}'|$

$$\phi_m^{(1)}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla_x\frac{1}{|\underline{x}|}\cdot\underline{m} \qquad \underline{m} = \int d^3x'\,\underline{M}(x')$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\underline{m}\cdot\underline{x}}{|\underline{x}|^3} \qquad \sim \text{elektromos dipólmomentum}$$

Példa: $\phi_m \to H = -\nabla\phi_m$

M adott (áll.)

$$\phi_m^{(I)} = -H_b\, r\, P_1 \;,\; \underbrace{C\cdot\frac{1}{r^2}\cdot P_1}_{} = \phi_m^{(II)}$$

„külső tér": $\frac{mP_1}{r^2}\cdot\frac{1}{4\pi}$ $\qquad m = \frac{4\pi R^3}{3}M$

$\downarrow$

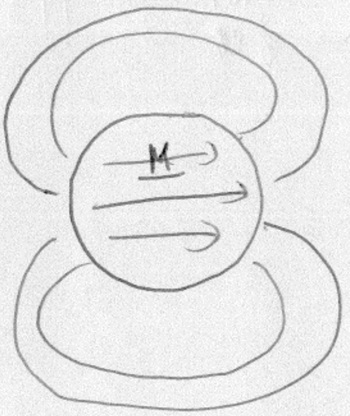
a felületen: $\phi_m^{(I)}(R) = \phi_m^{(II)}(R)$

$$\underline{\underline{H_b = -\frac{1}{3}\underline{M}}}$$

analógia

$\left(\sim\; E_b = -\frac{1}{3\varepsilon_0}P\right.$ hasonló példa volt el. ságnál is$\left.\right)$

$$\underline{B}_b = \mu_0\left(-\frac{1}{3}\underline{M}+\underline{M}\right) = \frac{2\mu_0}{3}\underline{M}$$

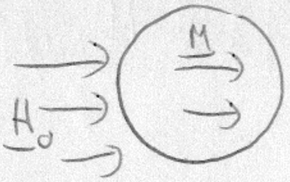


$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$

de

$\mathrm{div}\,\underline{M} \neq 0$

Példa$_2$: $\underline{M} \neq$ adott áll ($\underline{H}_0$ hatására dir.-an változik)



11. óra

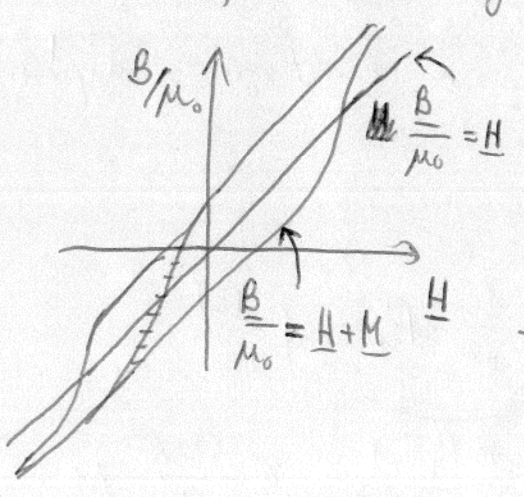
0) Ism.:

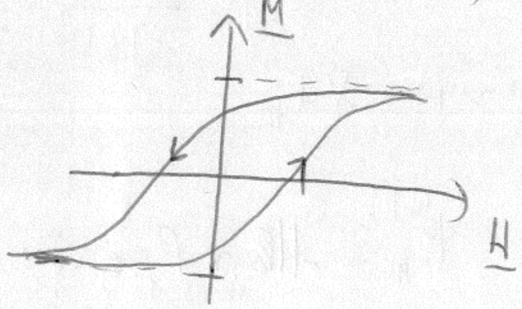
$\mathrm{div}\,\underline{B}(\underline{x}) = 0$, $\mathrm{rot}\,\underline{H}(\underline{x}) = j^{makr}(\underline{x})$

$\underline{B} = \mu_0(\underline{H}+\underline{M})$

· lin. mágn.

$\underline{M} = \chi_m \underline{H}$





· ferromágn.

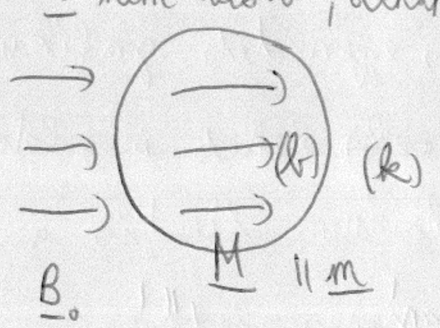
$\underline{M} = f(\underline{H})$

+ határfeltétel:

ha $j = 0$ $\quad H_{t1} = H_{t2} \rightarrow \Phi_{m1} = \Phi_{m2}$

$B_{n1} = B_{n2}$

1) $\underline{M}$ nem adott, dinamikusan írott. ha nincs szabad áram, a mágn. (makr.) potenciál alkalm.



$\phi_m^{(b)} = ?$

$\phi_m^{(k)} = ?$

(ha $j = 0$) $\mathrm{div}\,\underline{H} = -\mathrm{div}\,\underline{M} = \rho_m$

$\underline{H} = -\mathrm{grad}\,\phi_m$

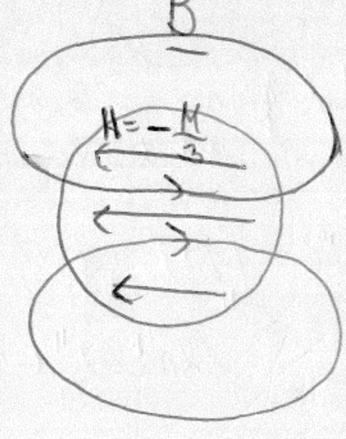
$\phi_m^{(b)} = -H_b \cdot r \cdot P_1$

$\phi_m^{(k)} = \frac{m}{4\pi} \frac{1}{r^2} \cdot P_1$, ahol $m = \frac{4\pi}{3} M R^3$

határfeltételből: ~~határfelt~~

$-H_b \cdot \cancel{R} = \frac{M}{3} \cancel{R} \rightarrow H_b = -\frac{M}{3}$

$\frac{2\mu_0}{3} \underline{M} = \underline{B}_b = \mu_0 \underbrace{\left(-\frac{\underline{M}}{3} + \underline{M}\right)}_{\frac{2}{3}\underline{M}}$

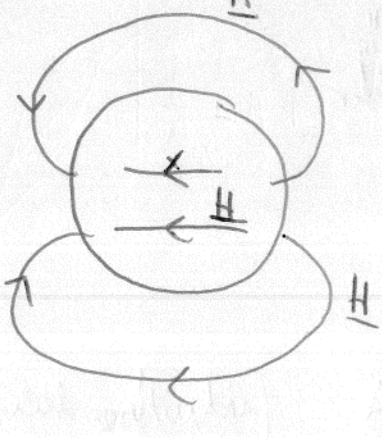


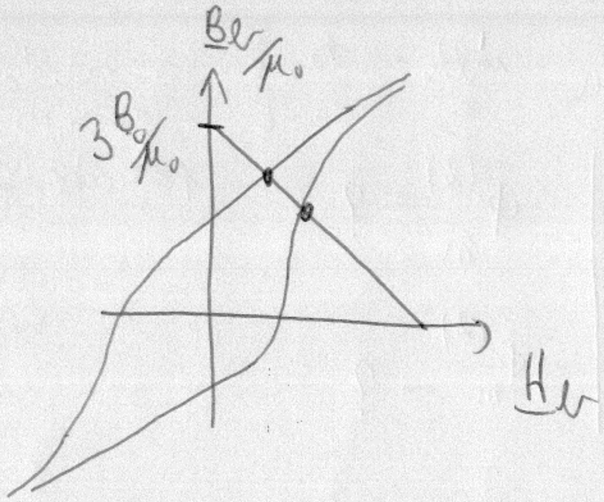
Ha van külső tér is:

$$\left.\begin{aligned} \underline{B}_b &= \underline{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\underline{M} \\ \underline{H}_b &= \frac{1}{\mu_0}\underline{B}_0 - \frac{1}{3}\underline{M} \end{aligned}\right\} 2\mu_0 \underline{H}_b + \underline{B}_b = 3\underline{B}_0$$

$$2\underline{H}_b + \frac{\underline{B}_b}{\mu_0} = \frac{3\underline{B}_0}{\mu_0}$$

$$\underline{H}_b = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}_b - \underline{M} = \frac{1}{\mu_0}\cdot\underline{B}_0 + \frac{2}{3}\underline{M} - \underline{M} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}_0 - \frac{1}{3}\underline{M}$$





→ az egyenletet grafikusan ~~csak~~ lehet megoldani, ha nem lineáris a mágnesezhetőség!

2) Szupravezetők magnetosztatikája

a) durva modell: $\underline{B}^{szupra} = 0$ (a mágneses tér nem megy be a szupravezető belsejébe)

$\uparrow$

$\underline{H} = -\underline{M} \rightarrow \chi_m^{szupra} = -1$ „teljes diamágnesség"

$\uparrow$ Meissner-effektus

(1911-ben fedezték fel a szupravezetést) → nem sokkal ezután fedezték fel a Meissner-e.-t)

b) London-egyenlet: (kb. 80 éve) $j = j^{normál} + j^{szupra}$ („két-folyadék elmélet" ← Tisza László!)

$j_{s}^{szupra} = n_s \cdot e^* \cdot \underline{v}$

$$\frac{\partial}{\partial t} j_{szupra} = \underbrace{n_s}_{\text{(Cooper-párok sűrűsége)}} \cdot e^* \cdot \underline{\dot{v}} = n_s e^* \cdot \frac{e^*}{m} \underbrace{\underline{E}}_{\text{külső el. tér}}$$

a C.-pár töltése ($e^* = 2 \cdot e^-$)

$\downarrow$

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$$

$\downarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(j_s + \frac{n_s e^{*2}}{m}\underline{A}\right) = 0 \qquad j_s = -\frac{n e^{*2}}{m} \cdot \underline{A} \quad \text{(intuitív felvetés)}$$

(következmény: ez nem köv. az előzőből)

(c) ↓ Landau-Ginzburg -egy: $\underline{j}_s \overset{\text{rot} H}{=} -\frac{n_s e^{*2}}{m^*}\underline{A}$ jobban meg van alapozva)

~~Landau-F... ...~~ (1950)

↓ /rot

$$\text{rot rot} H = \cancel{\text{grad div} H} - \Delta\underline{H} = -\frac{n_s e^{*2}}{m^*}\underline{B} = -\frac{n_s \cdot e^{*2}}{m^*}\mu\underline{H}$$

ha $\underline{B} = \mu\underline{H}$

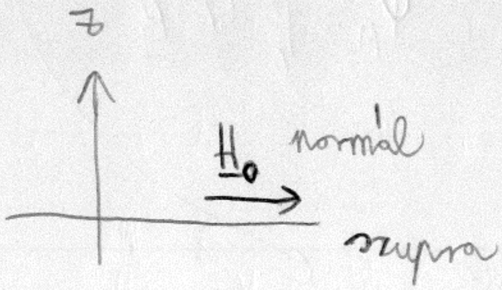
ha $(\underline{B} = \mu\underline{H})$ ↓ $\text{div}\,\underline{B} = \mu\,\text{div}\,\underline{H} = 0$

$$\boxed{\Delta\underline{H} = \frac{1}{\Lambda^2}\underline{H}}$$

e⁻ töltése

$$\text{ahol } \Lambda^{-2} = \frac{n_s e^{*2}}{m^*}\mu \approx \frac{2n_s \cdot e^2}{m_{e^-}}\mu$$

Cooper-párok miatt



$$\rightarrow \Delta\underline{H} = \frac{1}{\Lambda^2}\underline{H}$$

$$\frac{d^2 H_z}{dz^2} = \frac{1}{\Lambda^2} H_z$$

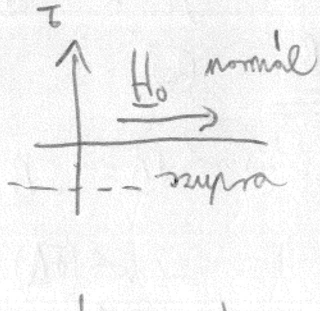
↓

$$H_z = H_0 \cdot e^{\pm z/\Lambda}$$

↙

$H_0 \cdot e^{-z/\Lambda}$ → ha bemegyünk a szupravezetőbe, nő a $\underline{H}$ → nem fiz. mo.

⇓



$$\underline{H_z = H_0 \cdot e^{+z/\Lambda}}$$

↓

értelmezés: nem a szupravezető belsejében, hanem a <u>felületen</u> folyik a "szuperáram"

3) Magnetosztatikai energiasűrűség

$$\delta E_{mech} = \delta t \underbrace{\int \underline{j}\, \underline{E}' \, d^3x}_{\text{teljesítmény}} \overset{\int \underline{j}\, d^3x = I}{=} \delta t \cdot I \int d\underline{s}\, \underline{E}' = -I \cdot \delta \Psi_M \overset{\text{def.}}{=} -\delta E_{\text{magnetoszt.}}$$

$(P = q \cdot v \cdot \underline{E} = \underline{f} \cdot \underline{v})$

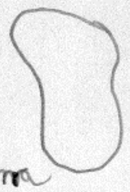
I

$\underline{E}'$ arra vonatkozik, ha a vezető "áll" (nincs indukció)

(Lenz-tv.)

Indukciótv. $\displaystyle \int_C d\underline{s} \cdot \underline{E}' = -\frac{d\Psi_M}{dt}$

$\displaystyle \Psi_M = \int_F d\underline{f} \cdot \underline{B}$



fix kontúra C

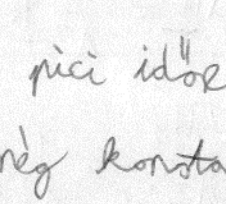
értelm.: ha nagyon pici időre nézzük, az áram még konstans, de a fluxus már megváltozott $\rightarrow \delta E \approx -I\,\delta\Psi$

$$\underline{\underline{\delta E_{\text{mágneses}}}} = I\,\delta\Psi_M = I \int_F d\underline{f}\, \underbrace{\delta \underline{B}(\underline{x})}_{\text{rot}\,\delta \underline{A}} \overset{\text{Stokes}}{=} I \int d\underline{s} \cdot \delta \underline{A} = \int d^3x\, \underline{j}(\underline{x}) \cdot \delta \underline{A}(\underline{x}) \neq \cancel{\int d^3x \,\text{rot}\, \underline{H} \cdot \delta \underline{A}}$$

$$= \int d^3x\, \text{rot}\, \underline{H} \cdot \delta \underline{A} = \int d^3x\, \underline{H}\, \text{rot}\, \delta \underline{A} = \underline{\underline{\int d^3x\, \underline{H}\, \delta \underline{B}}}$$

(+)

forrásmentes alakot akarunk csinálni



$\text{rot}(\underline{A} + \delta \underline{A}) = \underline{B} + \delta \underline{B} \rightarrow \text{rot}\,\delta \underline{A} \approx \delta \underline{B}$

$$\text{msz.: } (\varepsilon_{ijk}\, \partial_j H_k) \cdot \delta A_i = \partial_j \underbrace{(\varepsilon_{ijk}\, H_k\, \delta A_i)}_{\delta \underline{A} \times \underline{H}} \overbrace{- H_k\, \varepsilon_{ijk}\, \partial_j (\delta A_i)}^{-\text{rot}(\delta \underline{A})} =$$

$\underbrace{\phantom{- H_k\, \varepsilon_{ijk}\, \partial_j (\delta A_i)}}_{\underline{H} \cdot \text{rot}\,\delta \underline{A}}$

$$= \text{div}(\delta \underline{A} \times \underline{H}) + \underline{H}\, \text{rot}(\delta \underline{A})$$

⊛ homogén mintában

$$\int d^3x\, \underline{H}\cdot\delta\underline{B} = V_{\text{minta}}\cdot\underline{H}\cdot\delta\underline{B}$$

pl. termodinamika

$$\delta Q = p\,\delta V + \delta\mathcal{E} + V_{\text{minta}}\cdot\underbrace{\underline{H}}_{\text{intenzív}}\,\underbrace{\delta\underline{B}}_{\text{extenzív}}$$

⊛ lineáris mágn.: $\delta\underline{B} = \mu\,\delta\underline{H}$

$$\Rightarrow \delta E_{\text{mágn.}} = \frac{1}{2}\mu\,\delta H^2 = \delta\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right)$$

$$E_{\text{mágn.}} = \frac{\mu}{2}\int d^3x\cdot H^2$$

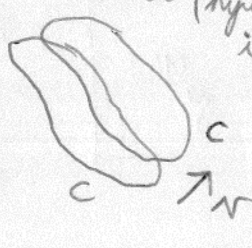
Mozgási és nyugalmi indukció (Faraday-tv.)

div $B=0$

$$\delta\Psi_M = \underbrace{\delta\int \underline{B}^{(x,t)}\,d\underline{f}}_{\text{fluxusvált.}} = \int_F \underbrace{\frac{\partial B}{\partial t}\,\delta t}_{\substack{\text{a tér változása}\\ \text{időben (nyugalmi ind.)}}}\,d\underline{f} + \int\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\underline{B}\right)\cdot v_j}_{\substack{\text{a tér változása helyben}\\ \text{(mozgási ind.)}}}\cdot\delta t\,df$$

másr.: $(\underline{v}\,\nabla)\underline{B} - \underline{v}\overbrace{(\nabla\underline{B})}^{0} = \text{rot}(\underline{B}\times\underline{v})$

amellett megy a vezető



$$-\oint ds\,\underline{E}' = \frac{d\Psi_M}{dt} = \int df\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \text{rot}(\underline{B}\times\underline{v})\right)$$

$$-\int df\,\text{rot}\,\underline{E}' \qquad\qquad -\text{rot}\,\underline{E}\ \text{(nyugalmi térerősség)} \leftarrow \text{Far.-tv.}$$

$$\Rightarrow \underline{E}' = \underline{E} + \underline{v}\times\underline{B}$$

azt kapjuk, hogy ha $\underline{v}$ sebességgel mozgunk a rendszerhez képest a fenti egyenlet ennek a transzformációra vett invarianciából adódik ^ (k.r. sebesség), akkor se változzon az ~~(indukciós tér)~~ erő $\Rightarrow$ $\underbrace{E'}_{\text{a töltésekkel együtt mozgunk}} = \underbrace{E + v\times B}_{\text{nyugalomban van a k.r., de a töltések mozognak}}$

Maxwell-egyenletek közegben

0) („ $\rho_{pol} \overset{"}{=} -\operatorname{div} \underline{P}$

$$\frac{\partial \rho_{pol}}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j}_{pol} = 0$$ ha változik a polarizáció

$$\operatorname{div}\left(-\frac{\partial \underline{P}}{\partial t} + \underline{j}_{pol}\right) = 0$$

$$\underline{j}_{pol} = \underline{\dot{P}}$$ (sztatikában nincs áram))

eddig is 0 volt

új tag

ez vákuumban is volt

1) $$\operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \left(\underline{j}^{(m)} + \operatorname{rot} \underline{M} + \underline{\dot{P}} + \varepsilon_0 \underline{\dot{E}} \right)$$

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \operatorname{rot} \underline{H} = j^{(m)} + \underline{\dot{D}} & \operatorname{rot} \underline{E} = -\underline{\dot{B}} \\ \operatorname{div} \underline{B} = 0 & \operatorname{div} \underline{D} = \rho^{(m)} \end{matrix}}$$

~~$\operatorname{div} \underline{D} = \rho^{(m)}$~~

~~ha a töltéseloszlás időben vált.~~

~~$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \underline{\dot{D}} = \operatorname{div} \underline{j}$~~

2) Határozott frekvenciájú források:

$$f(t) = \int d\omega \cdot e^{-i\omega t} f(\omega)$$ (Fourier-előállítás)

↳ határozott freki, ha $f(\omega) = \delta(\omega \pm \omega')$ (vagy lineárkomb.)

Legyenek $\rho^{(makr.)} = \rho_\omega \cdot e^{-i\omega t}$ $\quad j^{(makr)} = j_\omega \cdot e^{-i\omega t}$ alakúak

$$-i\omega \rho_\omega(\underline{x}) e^{-i\omega t} + e^{-i\omega t} \operatorname{div} \underline{j}_\omega(\underline{x}) = 0 \qquad \leftarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0$$

$$\operatorname{div} \underline{j}_\omega(\underline{x}) = i\omega \, \rho_\omega(\underline{x})$$

$\Rightarrow$ Mivel a Maxwell-e.-ek lineárisak:

$$\downarrow$$

$$\underline{E} = \underline{E}_\omega \cdot e^{-i\omega t} \qquad \underline{D} = \underline{D}_\omega \cdot e^{-i\omega t}$$

alakúak a térerősségek

$$\underline{H} = \underline{H}_\omega \cdot e^{-i\omega t} \qquad \underline{B} = \underline{B}_\omega \cdot e^{-i\omega t}$$

összefüggések:

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \underline{H}_\omega = j_\omega - i\omega \underline{D}_\omega \qquad \operatorname{rot} \underline{E}_\omega = i\omega \underline{B}_\omega \qquad \operatorname{div} \underline{B}_\omega = 0 \qquad \operatorname{div} \underline{D}_\omega = \rho_\omega$$

pl.: kényszerrezgés:

$$m \ddot{\underline{x}} = -m\omega_0^2 \underline{x} - k\dot{\underline{x}} + q\underline{E} \quad \rightarrow \underline{x}(t) = \underline{x}_\omega e^{-i\omega t}$$

$$-m\omega^2 \underline{x}_\omega = -m\omega_0^2 \underline{x}_\omega + ik\omega \underline{x}_\omega + q\underline{E}_\omega \qquad \boxed{q \underline{x}_\omega = \underline{p}_\omega = \underbrace{\left(\frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - ik\omega}\right)}_{\varepsilon_0 \cdot \chi_e(\omega)} \underline{E}_\omega}$$

$\varepsilon_0 \cdot \chi_e(\omega)$

$\swarrow$

mozgásnál frekvenciafüggő el. szuszc.!

12. óra

Gerjesztések

0) Ism.:

$$\text{rot}\, \underline{H}(\underline{x},t) = \underline{j}^{(m)}(\underline{x},t) + \dot{\underline{D}}(\underline{x},t) \qquad \underline{j}^{(m)}(\underline{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, j_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\left[\text{rot}\, \underline{H}_\omega(\underline{x}) - \underline{j}^{(m)}_\omega(\underline{x}) + i\omega \underline{D}_\omega(\underline{x})\right] e^{-i\omega t} = 0$$

$$\rho^{(m)}(\underline{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \rho_m(\underline{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{rot}\, \underline{H}_\omega(\underline{x}) = \underline{j}^{(m)}_\omega(\underline{x}) - i\omega \underline{D}_\omega(\underline{x}) \\ &\text{div}\, \underline{B}_\omega(\underline{x}) = 0 \qquad \text{rot}\, \underline{E}_\omega(\underline{x}) = i\omega \underline{B}_\omega(\underline{x}) \\ &\text{div}\, \underline{D}_\omega(\underline{x}) = \rho^{(m)}_\omega(\underline{x}) \end{aligned}}$$

1) Fourier-előállítás:

$$\underline{H}(\underline{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \underline{H}_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$\underline{D}(\underline{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \underline{D}_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$\boxed{\underline{D}_\omega(\underline{x}) = \underline{D}^*_{-\omega}(\underline{x})} \leftarrow \quad = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \underline{D}^*_\omega(\underline{x})\, e^{i\omega t} =$$

valóság feltétele! az előbbiekből

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \underline{D}^*_{-\omega}(\underline{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$\underline{D}(\underline{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \frac{1}{2}\left[\underline{D}_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t} + \underline{D}^*_\omega(\underline{x})\, e^{i\omega t}\right]$$

valójában sosem „1 frekv" jelenik meg, hanem $\pm\omega$.

2) Miért dolgozhatunk mégis komplexekkel?

cos-os felírás (valós)

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d^3x\, \underline{E}^2(\underline{x},t) \rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d^3x\, \frac{1}{4}\left(\underline{E}_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t} + \underline{E}^*_\omega(\underline{x})\, e^{i\omega t}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\underline{E}_\omega(\underline{x})\, e^{+i\omega t} + \underline{E}^*_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\varepsilon_0 \int d^3x \left|\underline{E}_\omega(\underline{x})\right|^2$$ → V: Az időátlagot ezekkel is egyszerűen ~~hasonlóan~~ ki tudjuk számítani.

↑ a többi tag teljes per.-ra vett integrálja 0 (cos miatt)

T → T-re vett átlag

hasonlóan: pl.$_1$:

$$\overline{\int d^3x\, \underline{j}(\underline{x},t)\,\underline{E}(\underline{x},t)}^{T} = \frac{1}{4}\int d^3x \left(\underline{j}_\omega^*(\underline{x})\,\underline{E}_\omega(\underline{x}) + \underline{j}_\omega(\underline{x})\,\underline{E}_\omega^*(\underline{x})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int d^3x\, \underline{j}_\omega^*(\underline{x})\,\underline{E}_\omega(\underline{x})$$

bármilyen kvadratikus alak átlaga így írható

pl.$_2$:

$$\overline{\int d\underline{f}\, \underbrace{\underline{S}(\underline{x},t)}_{\text{Poynting-vektor}}}^{T} = \frac{1}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}\int d\underline{f}\left(\underline{E}_\omega(\underline{x})\times\underline{B}_\omega^*(\underline{x})\right)$$

3) $\underline{P}_\omega(\underline{x}) = \varepsilon(\omega)\,\underline{E}_\omega(\underline{x})$, atomi szintű gerjesztési modell:

$$m\ddot{\underline{x}} = -k\dot{\underline{x}} - m\omega_0^2\underline{x} + q\,\frac{1}{2}\left(\underline{E}_\omega(x)e^{-i\omega t} + \underline{E}_\omega^*(x)e^{i\omega t}\right)$$

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2}\left(\underline{x}_\omega e^{-i\omega t} + \underline{x}_\omega^* e^{i\omega t}\right)$$ alakban keressük a mo.-t

$$-\omega^2 m\underline{x}_\omega = i\omega k\underline{x}_\omega - m\omega_0^2\underline{x}_\omega + q\underline{E}_\omega$$

(hasonlóan: $\underline{p}_\omega = q\underline{x}_\omega$ is kifejezhető ez alapján

$$\underline{p}_\omega = \frac{q^2}{m\left(\omega_0^2 - i\omega\frac{k}{m} - \omega^2\right)}\,\underline{E}_\omega$$

$$\underline{P}_\omega = N\underline{p}_\omega \Rightarrow \varepsilon\,\chi_0(\omega) = \frac{Nq^2}{m(\ldots)}$$

Ohm-tv.: $\underbrace{j_\omega = \sigma(\omega)}_{\text{lineáris elő.}} \underline{E}_\omega$ a válasz függ a gerjesztéstől

4) Időfüggés a frekvenciafelbontásból:

a) $\underline{P}_\omega = \varepsilon_0 \chi(\omega) \underline{E}_\omega$ → Fourier-elők

$$\underline{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \chi(\omega) \underline{E}_\omega e^{-i\omega t} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \chi(\tau) \underline{E}(\tau') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(\tau+\tau'-t)}}_{\delta(\tau+\tau'-t)}$$

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau} \chi(\tau) \quad \to \underline{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{i\omega\tau'} \cdot \underline{E}(\tau')$$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Vert$

$$\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \chi_e(\tau) \underline{E}(t-\tau)$$

Ha ~~a~~ Fourier-térben a fv. Fourier komponensei két ~~komponens~~ tényező szorzata ($\underline{P}_\omega = \chi(\omega) \underline{E}_\omega$), akkor valós (t) térben a tényezők fv-einek konvolúciója ~~adják~~ adja a megoldást.

$$\underline{D}(\underline{x}, t) = \varepsilon_0 \left[\underline{E}(\underline{x}, t) + \int_{-\infty} d\tau\, \chi_e(\tau) \underline{E}(\underline{x}, t-\tau) \right]$$

b) kauzalitás problémája:

$\chi_e(\tau < 0) = 0$ (a jövőbeli gerjesztés ne hasson a rendszerre)

$\Downarrow$

$$\chi_e(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau} \chi_e(\tau)$$

$\chi_e(-\omega) = \chi_e(\omega)^*$ → kiterjesztés $-\omega$-kra

↓

létezik-e kiterjesztés komplex w-ra?

$w = w' + i w''$ ahol $w'' > 0$

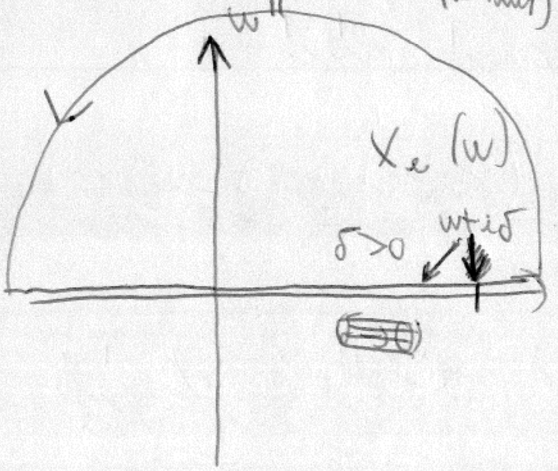
↑

a kauzalitás miatt tehetjük ezt fel, mert a felső ($w'' > 0$) félsíkban ez exp. lecsengést okoz (az alsóban meg az $\int$ felrobbanna)

$\Rightarrow$ kauzalitás → $\chi_e(w)$ a felső w félsíkon analitikus

$$\chi_e(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\chi_e(w')}{w'-w}\, dw'$$

(kontúr)



$\lim\limits_{|w| \to \infty} \chi_e(w) \to \frac{1}{|w|^{1+\varepsilon}} \to 0$

($\frac{1}{|w|}$-nél gyorsabban) tart 0-hoz

⇓

a felső ↖ kontúron vett $\int$ 0-hoz tart

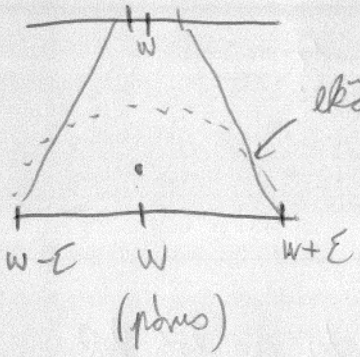
$$\chi_e(w + i\delta) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int dw' \frac{\chi(w')}{w' - w - i\delta}$$

→ ha $\delta \to 0$, w-nál szingularitás van

Főérték-integrál:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} dw' \frac{\chi(w')}{w'-w} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{w-\varepsilon} + \int_{w+\varepsilon}^{\infty} \right) dw' \frac{\chi(w')}{w'-w}$$

→ úgy integrálunk, mintha nem lenne szingularitása



ekkor is rajzolunk kontúrt

→ rászűkítem a tartományt

$$\chi_e(\omega+i\delta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} d\bar{\omega}\,\frac{\chi_e(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega-i\delta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-\varepsilon}^{\omega+\varepsilon} d\omega'\,\frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega-i\delta} +$$

$+\frac{1}{2}\chi_e(\omega+i\delta)$ → ez a kimaradt kis szakasz $\int$-ja

$$\chi_e(\omega+i\delta) = \frac{1}{2\pi i}\, P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\,\frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega} + \frac{1}{2}\chi_e(\omega+i\delta)$$

$$\chi_e(\omega) = \frac{1}{\pi i}\, P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\,\frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}$$ diszperziós reláció

$$\mathrm{Re}\,\chi_e(\omega) = \frac{1}{\pi}\, P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\,\frac{\mathrm{Im}\,\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}$$

⇓

a valós és az imaginárius rész közötti összefüggést ez adja meg

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu}} \to ? \quad \leftarrow \varepsilon(\omega)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega)\mu}}$$ diszperzív közegben

a valós rész adja meg a sebességet

az imaginárius rész az amplitúdó csillapítását adja meg

$I e^{-x/\lambda}$ $\quad 1/\lambda \sim \mathrm{Im}\,\varepsilon$

~~Látszólag~~ 2 független mennyiség (fényseb., amplitúdó csillapítása) a kauzalitás miatt mégsem független!

$\uparrow$

Kramers - Kronig diszperziós reláció

Energiamegmaradás határozott frekvenciájú terekre

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\frac{dE_{mech}}{dt} = \int d^3x\,\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\underline{j}(\underline{x},t)\,\underline{E}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\int d^3x\,\mathrm{Re}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega^* - i\omega\underline{D}_\omega^*}}{\underline{j}_\omega^*}(\underline{x})\,\underline{E}_\omega(\underline{x}) =$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\int d^3x\left[\mathrm{div}\left(\underline{E}_\omega(\underline{x})\times\underline{H}_\omega^*(\underline{x})\right) + \underbrace{\mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega(\underline{x})}_{i\omega\underline{B}_\omega(\underline{x})}\,\underline{H}_\omega^* - i\omega\underline{E}_\omega(\underline{x})\cdot\underline{D}_\omega^*(\underline{x})\right]$$

msz.: $(\mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega^*)\,\underline{E}_\omega =$

$$= \varepsilon_{ijk}(\partial_j H_{\omega_k})\cdot E_{\omega_i} = \partial_j\big(\underbrace{\varepsilon_{ijk}H_{\omega_k}E_{\omega_i}}_{(\underline{H}_\omega\times\underline{E}_\omega)_j}\big) - H_{\omega_k}\cdot\underbrace{\varepsilon_{ijk}\cdot\partial_j E_{\omega_i}}_{-(\mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega)_k} = \mathrm{div}(\underline{E}_\omega\times\underline{H}_\omega) + \mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega\,\underline{H}_\omega$$

Legyen:

$$\underline{S}_\omega = \frac{1}{2}\left(\underline{E}_\omega\times\underline{H}_\omega^*\right)$$

$$W_e = \frac{1}{4}\underline{E}_\omega\underline{D}_\omega^*,\quad W_m = \frac{1}{4}\underline{B}_\omega\underline{H}_\omega^*$$

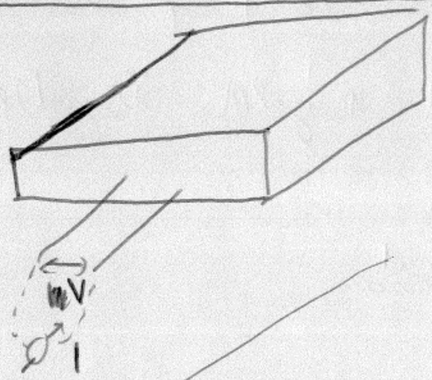
$$\underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int d^3x\,\underline{j}_\omega^*\underline{E}_\omega}_{\mathrm{Re}\,W_{mech.}} + \mathrm{Re}\int d\underline{F}\,\underline{S}_\omega + 2i\omega\,\mathrm{Re}\int d^3x\,(W_e - W_m) = 0$$

$\Downarrow$ komplexekre is kiterjeszthetjük

$$\frac{1}{2}\int d^3x\,\underline{j}_\omega^*\underline{E}_\omega + \underbrace{\int d\underline{F}\cdot\underline{S}_\omega}_{\text{sugárzást írja le}} + 2i\omega\cdot\int d^3x\,(W_e - W_m) = 0$$

$\int d\underline{F}$

koncentrált áramköri elemek:



$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(I^* V\right) = \text{Joule-hő}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int d^3x\, j_\omega^* E_\omega \qquad \text{Ohm-tv.: } j_\omega = \sigma E_\omega$$

$$\|$$

$$\frac{1}{2\sigma}\int d^3x\, |j_\omega|^2 = \frac{l}{2\sigma F}\cdot |I|^2$$

$$\downarrow \quad \frac{I^2}{F^2}\cdot F\cdot l$$

$$\boxed{V = Z\cdot I} \hookrightarrow I^* V = I^* Z \cdot I$$

Z: impedancia $\hookrightarrow R - iX$

$$\mathrm{Re}(I^* V) = \mathrm{Re}\left(I^*(R - iX) I^*\right) = R|I|^2$$

$\cancel{I\,(R+iX)\,I^*}$

~~(konj. ⊖ volt → ?)~~

$$\frac{1}{2}\frac{l}{\sigma F}|I|^2 = \frac{1}{2}R|I|^2$$

$$R = \frac{l}{\sigma F}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(I^* V^*\right) = -\frac{1}{2}X|I|^2$$

$$\downarrow \quad Z^* I^* =$$

$$= (R + iX) I^*$$

~~Joule-hő = Im W_e + Im~~

$$\phi_\omega = \frac{1}{C}Q_\omega$$

$$W_e = 2i\omega\int d^3x\, \frac{1}{4}E_\omega \varrho_\omega^* = \frac{i\omega}{2}\int d^3x\, \phi_\omega \varrho_\omega^* \approx \frac{i\omega\phi_\omega}{2}Q_\omega = \frac{i\omega}{2C}|Q_\omega|^2$$

$$\downarrow \quad -\mathrm{grad}\,\phi_\omega$$

áthárítjuk a grad-ot, a maradék tag = 0

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

$$I_\omega = -i\omega Q_\omega \longrightarrow -\frac{1}{2}X_C\,\omega^2|Q_\omega|^2 = \frac{\omega}{2C}|Q_\omega|^2 \quad \cancel{\left(-\frac{1}{2}X_C\,\omega^2|Q_\omega|^2\right)}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}\cdot(-1)$$

$$0 + H^* \cdot \underset{0}{\operatorname{rot} A} \leftarrow \underbrace{\operatorname{rot} H^* \cdot A}$$

$$-i \cdot |I_\omega|^2 \cdot X_L \frac{1}{2} = -i 2\omega \frac{1}{4} \int d^3x \, \underline{B}_\omega \cdot \underline{H}_\omega^* = -\frac{1}{2} \omega i \int d^3x \, j_\omega^* \underline{A}_\omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x \, j_\omega^* \cdot \dot{\underline{A}}_\omega = -\frac{1}{2} \int d^3x \, j_\omega^* \underline{E}_\omega =$$

$$= -\frac{1}{2} I_\omega^* \cdot \int d\underline{s} \, \underline{E}_\omega = -\frac{1}{2} I_\omega^* \cdot i\omega \underbrace{\Psi_{m,\omega}}_{\text{mágneses fluxus } \omega \text{ komponense}} \cancel{\left(\frac{1}{2} I_\omega = \frac{1}{2} \int d\underline{s} \, \underline{E}_\omega\right)}$$

$$\underline{-i|I_\omega|^2 X_L \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} i\omega \Psi_{m,\omega} I_\omega^* = -\frac{1}{2} \underline{i\omega L |I_\omega|^2}$$

$$\Psi_{M,\omega} = L \cdot I_\omega^* \quad \text{(induktivitás def.-ja)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{X_L = \omega \cdot L}}$$

$\Downarrow$

Az egész rendszer 3 koncentrált mennyiséggel jellemezhető:

$\underbrace{R}_{\text{ez disszipálja az energiát}}, \underbrace{X_L, X_C}_{\text{ezek}}$ az áram fázisát tolják el

(nem veszik el az energiát, csak felépítenek mágneses / elektr. mezőket, ezért alakul ki késés / „sietés")

13. óra

d) Ism: Konc. áramköri elemek
- komplex M.-egyenletekből (Fourier-tér)

$$\frac{1}{2}\int d^3x\, j_\omega^*(x)\, E_\omega(x) + 2i\omega \int d^3x\,(w_e - w_m) + \int df\, S_\omega = 0$$

$w_E = \frac{1}{4} E_\omega D_\omega^*$

$w_m = \frac{1}{4} B_\omega H_\omega^*$

$S_\omega = \frac{1}{2} E_\omega \times H_\omega^*$

Ezek az alapösszef.-ek (σ, C, L definíciói)

$$\boxed{j_\omega = \sigma(\omega) E_\omega} \qquad \boxed{\phi_\omega = \frac{1}{C}\rho_\omega} \qquad \boxed{\Psi_{m,\omega} = L \cdot I_\omega}$$

$$\frac{1}{2\sigma(\omega)}\int d^3x\, |j_\omega|^2 \qquad \frac{i\omega}{2}\int d^3x\, \phi_\omega \rho_\omega^* \qquad -\frac{1}{2}\int d^3x\, j_\omega^* E_\omega$$

$$R\left(\frac{l}{\sigma(\omega) f}\right) \cdot \frac{1}{2}|I_\omega|^2 \qquad \frac{i\omega}{2C}|\rho_\omega|^2 = \frac{i}{2\omega C}|I_\omega|^2 \qquad \frac{1}{2} I_\omega^* \dot{\Psi}_{m\omega} = -\frac{i\omega}{2}|I_\omega|^2 \cdot L$$

$$X_C \qquad X_L$$

$$\frac{1}{2}|I_\omega|^2 \left(\underbrace{\frac{l}{\sigma f}}_{\text{disszipáció}} + \frac{i}{\omega C} - i\omega L\right) = \frac{1}{2} I_\omega \cdot V_\omega^*$$

$Z = R - iX$

$V_\omega = Z \cdot I_\omega$

$\boxed{}$: lineáris ö.f. → lineáris áramköri elemek

Kvázistacionárius közelítés

1) Egyenletek:

- $\mathrm{rot}\, H_\omega(x) = j_\omega^{(m)}(x) + i\omega D_\omega(x)$

$= \sigma(\omega) E_\omega(x) + \cancel{i\omega\, \varepsilon(\omega) E_\omega(x)}$

ha ezt elhagyjuk ~~(jó vezető)~~

→ $|\sigma(\omega)| \gg \omega |\varepsilon(\omega)|$

kvázi-stac. közelítés

(ω növelésével ez elromlik)

$\mathrm{div}\, j_\omega(x) \approx 0 \; (= i\omega \rho_\omega) \longrightarrow \rho = 0$

$\cdot \quad \mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega(\underline{x}) = i\omega\,\underline{B}_\omega(\underline{x}) = i\omega\mu\,\underline{H}_\omega(\underline{x})$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega(\underline{x}) = \mathrm{grad}\,\cancel{\mathrm{div}\,\underline{H}_\omega(\underline{x})} - \Delta\underline{H}_\omega(\underline{x}) = \sigma\,\mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega =$$

$$= i\omega\sigma\mu\,\underline{H}_\omega(\underline{x})$$

$\cdot \quad \mathrm{div}\,\underline{B}_\omega = \mu\,\mathrm{div}\,\underline{H}_\omega = 0$

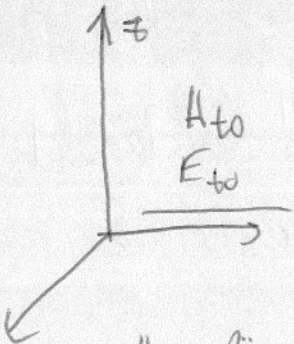
I. $\boxed{(\Delta + i\omega\sigma\mu)\,\underline{H}_\omega(\underline{x}) = 0}$

$\mathrm{div}\,\underline{D}_\omega = \rho_\omega \approx 0$ (l. előbb) $\quad$ rot

$(\mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega = \sigma\underline{E}_\omega)$

II. $\boxed{(\Delta + i\omega\sigma\mu)\,\underline{E}_\omega(\underline{x}) = 0}$

2) Mo. az alsó ~~felső~~ feltétel:



Határfeltétel:

$\underline{E}_\omega(z=0^-) = \underline{E}_{t0}$; $\underline{H}_\omega(z=0^-) = \underline{H}_{t0}$ ($z=0^-$ -nál vett értékek)

Csak z-től függő Mo.:

$$\frac{d^2}{dz^2}\underline{H}_\omega(z) = -i\omega\sigma\mu\,\underline{H}_\omega(z) \qquad \underline{H}_\omega(z) = \underline{H}_\omega(z=0)\cdot e^{+ikz}$$ alakban ker. a Mo.-t

$$+k^2 = i\omega\sigma\mu = e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma\mu\omega$$

$$k = \pm\sqrt{\sigma\mu\omega}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$k = \pm\sqrt{\sigma\mu\omega}\cdot\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$ $\rightarrow$ k-nak valós és képzetes része is van!

ha $k = \cancel{\mp}(\dots + i \dots)$

$$\underline{H}_\omega(z) = \underline{H}(z=0) \cdot e^{ikz}$$

$$\downarrow$$

$e^{\cancel{\pm} kz}$ rész lesz benne

$e^{\cancel{\pm} kz} \xrightarrow{z \to -\infty} \infty$ → ezzel nem foglalkozunk

$\Downarrow$

$k = \cancel{\pm} \dots$

$$\boxed{\delta := \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}} \qquad e^{-ikz} = e^{-iz(1+i)/\delta} = e^{-iz/\delta} \cdot \underbrace{e^{+\frac{z}{\delta}}}_{\text{lecseng ha } z<0}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_\omega(z) \\ \underline{E}_\omega(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{z_0} \\ \underline{E}_{z_0} \end{pmatrix} \cdot e^{-iz/\delta} \, e^{z/\delta}$$

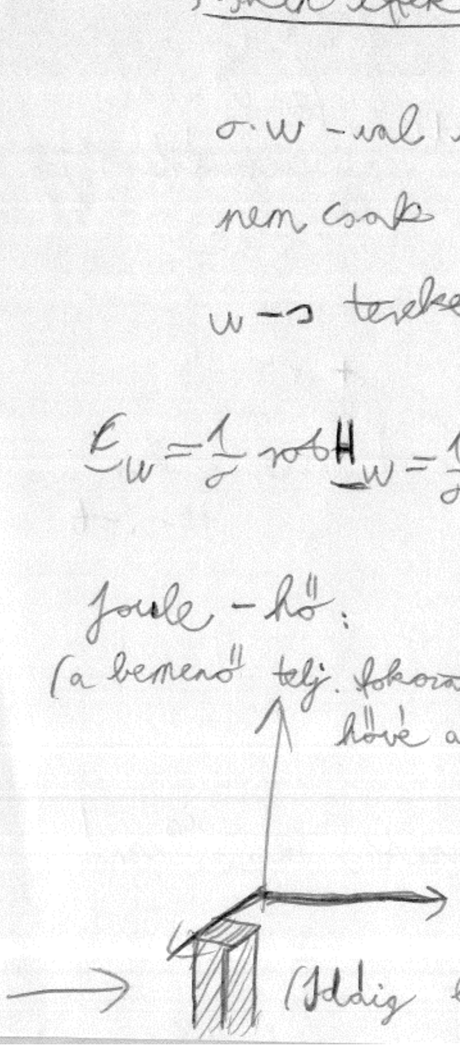
→ δ: karakterisztikus behatolási mélység

↳ skin effektus (bőrhatás)

$\sigma \cdot \omega$-val lehet befolyásolni: jó vezető anyaggal nem csak a sztatikus, de a viszonylag nagy ω-s tereket is le lehet árnyékolni

$$\underline{E}_\omega = \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \underline{H}_\omega = \frac{1}{\sigma} \overbrace{\boxed{\frac{1}{\delta}(1+i)\, i\, \underline{H}_\omega \times \underline{e}_z}}^{j_\omega} \qquad j_\omega = \sigma \underline{E}_\omega$$

Joule-hő:
(a bemenő telj. fokozatosan hővé alakul)



$$\int \frac{1}{2} |j_\omega^*|^2 dz$$

$$\int_{-\infty}^{0} dz \frac{1}{2} \operatorname{Re} j_\omega^* \underline{E}_\omega = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma \delta^2} |1-i|^2 \int_{-\omega}^{0} dz \left| \underline{H}_\omega(z) \right|^2$$

$$= \frac{1}{\sigma \delta^2} \underline{H}_0^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{0} dz\, e^{2z/\delta}}_{= \frac{\delta}{2} [e^{2z/\delta}]} = \frac{1}{2\sigma\delta} \underline{H}_0^2$$

(Iddig lesz ZH) ← $-\delta\delta$

Sugárzások

Forrásmentes sugárzás: síkhullám

$j_\omega = \rho_\omega = 0$ (forrásmentesség)

1) $\text{rot}\,\underline{E}_\omega = i\omega \underline{B}_\omega$ $\qquad \text{div}\,\underline{B}_\omega = 0$

$\text{rot}\,\underline{H}_\omega = -i\omega \underline{D}_\omega = -i\omega\, \varepsilon(\omega)\underline{E}_\omega \qquad \text{div}\,\underline{D}_\omega = 0$

$\downarrow \text{rot}$

$$-\Delta \underline{H}_\omega = -i\omega\,\varepsilon(\omega)\, i\omega\mu\, \underline{H}_\omega$$

$$\left[\Delta + \omega^2\mu\varepsilon(\omega)\right]\underline{H}_\omega(\underline{x}) = 0$$

$$\left[\Delta + \omega^2\mu\varepsilon(\omega)\right]\underline{E}_\omega(\underline{x}) = 0$$

Síkhullám m.o.:

$\boxed{\underline{k} = k\,\underline{n}}$; $\quad \underline{H}_\omega(x) = \underline{H}_0\, e^{ik\underline{n}x}$

$\left[k^2 + \omega^2\varepsilon(\omega)\mu\right]\underline{H}_0 = 0 \qquad \omega = k\left(\sqrt{\mu\varepsilon(\omega)}\right)^{-1} \qquad \sqrt{\mu\varepsilon(\mu)} = \frac{1}{v_f}$

$$\underline{H}^{(\omega)}(\underline{x},t) = \underline{H}_0\, e^{ik\underline{n}x - i\omega t} \qquad v_f = \frac{\omega}{k}$$

$$\underline{E}^{(\omega)}(\underline{x},t) = \underline{E}_0\, e^{ik\underline{n}x - i\omega t}$$

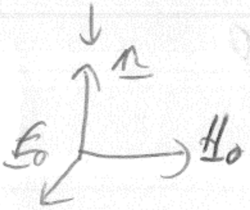
$\text{div}\,\underline{H}_\omega = 0 = ik\,\underline{n}\,\underline{H}_0\, e^{ik\underline{n}x} \rightarrow \underline{n}\underline{H}_0 = 0$

$\text{div}\,\underline{E}_\omega = 0 \rightarrow \underline{n}\underline{E}_0 = 0$

$\Big\} \rightarrow \underline{E}_0, \underline{H}_0 \perp \underline{k}$

$\downarrow$

$i\omega\mu\underline{H}_0 e^{ik\underline{n}x} = ik\,\underline{n}\times\underline{E}_0\, e^{ik\underline{n}x}$



$v_f\, \underbrace{\mu\,\underline{H}_0}_{B_0} = \underline{n}\times\underline{E}_0 \rightarrow \underline{H}_0 \perp \underline{E}_0$

$$|E_0| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(\omega)}}\,|H_0|$$

$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon(\omega)}}$ diszperziós reláció → kül. ω-jú hullámok kül. sebességgel terjednek!

2) dielektromos áll. komplex:

$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon''$

$\underline{k} = \underline{n}(k' + ik'')$

$$k'^2 + 2ik'k'' - k''^2 = \mu\omega^2(\varepsilon' + i\varepsilon'')$$

disp. reláció

Re: $k'^2 - k''^2 = \mu\omega^2\varepsilon'$

Im: $2k'k'' = \mu\omega^2\varepsilon''$

$$(k'^2)^2 - \mu\omega^2\varepsilon' k'^2 - \frac{1}{4}\mu^2\omega^4\varepsilon''^2 = 0$$

$$k'^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2\varepsilon'\left(1 + \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon''^2}{\varepsilon'^2}\right)^{1/2}}_{>1}\right)$$

itt $\ominus$ nem lehet, mert k' valós mindenképpen

$$\sim e^{i(k' + ik'')\underline{n}x - i\omega t} = e^{i\varphi(k)}\underbrace{e^{-k''\underline{n}x}}_{\text{lecsengést adó tag}}$$

$\varphi(k) = k'\underline{n}x - \omega t$

ahol $k' = \ldots$

ha $\varepsilon'' <<$

$k' \sqrt{\varepsilon'}$

$v_f = \frac{\omega}{k'}$; $k'' = \frac{1}{2}\mu\varepsilon''\omega v_f \sim \underbrace{\frac{1}{2\delta}}$ ezzel paraméterezzük

$\chi_e''\cdot\varepsilon_0$

$k' = \frac{\omega}{v_f}$

$\underline{n}\,\underline{E}_0 = \underline{n}\,\underline{H}_0 = 0$

$\cancel{i}\omega\mu \underline{H}_\omega = \cancel{i}(k' + ik'')\underline{n} \times \underline{E}_\omega$

ha $\varepsilon'' \ll 1$

$$\underline{H}_0 = \frac{1}{\mu v_f}\left(1 + i\frac{k''}{k'}\right)\cdot \underline{E}_0 = \frac{1}{\mu v_f}\left(1 + i\frac{\mu\cdot\varepsilon'' v_f^2}{2}\right)\underline{E}_0 \approx \frac{1}{\mu v_f} e^{i\frac{\mu \varepsilon'' v_f^2}{2}} \cdot \underline{E}_0$$

$\Downarrow$

$\underline{E}_0$-hoz képest

$\underline{H}_0$ egy fázissal el van tolva

3) Átlagos energiaáramsűrűség

$$\underline{S}_\omega = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, \underline{E}_\omega \times \underline{H}_\omega^* = \mathrm{Re}\, \frac{i}{2}\underbrace{(\underline{E}_0\cdot \underline{H}_0^*)}_{\text{komplex}}\underbrace{\underline{n}\cdot e^{-2k''\underline{n}\underline{x}}}_{\text{valós}} =$$

$$\approx \frac{1}{2\mu v_f}\underline{E}_0^2 \cos\frac{\mu\cdot\varepsilon'' v_f^2}{2}\,\underline{n}\, e^{-\mu\omega v_f \varepsilon''\underline{n}\underline{x}}$$

($\underline{H}_0$-nak fázisa van)

4) Átlagos energiasűrűség:

$$\rho_{En\omega} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\left[\underline{E}_\omega \underline{D}_\omega^* + \underline{B}_\omega \underline{H}_\omega^*\right] = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\underbrace{\varepsilon(\omega)}_{\varepsilon'}\underline{E}_0^2 + \mu \underline{H}_0^2\right] e^{-2k''\underline{n}\underline{x}}$$

definíció: energia terjedési sebessége

$$\boxed{\left|\underline{v}_{En}\right|} = \frac{|\underline{j}_{En\omega}|}{\rho_{En\omega}} =$$

$\varepsilon'\mu = \frac{1}{v_f^2}$

$$= \frac{\frac{\varepsilon' v_f}{2} + \underline{E}_0^2 \cos\left(\frac{\mu\,\varepsilon'' v_f^2}{2}\right)}{\frac{1}{2}\varepsilon' \underline{E}_0^2} =$$

(ekvipartíció) $\leftarrow$ az átlagos energiasűrűség az elektr. és mágn. részben ugyanakkora

$$= \boxed{v_f\cdot \cos\frac{\mu\varepsilon'' v_f^2}{2}}$$

Ha ε^*-nak van imagin. része, az energiaterjedés kisebb, mint a fázissebesség.

~~Mert~~)

$$\boxed{\omega = v_f \cdot k' = \frac{c}{n} k'}, \text{ ahol } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$n = c\sqrt{\mu \cdot \varepsilon'}$$

$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk'}$ ← k''-nek itt nincs szerepe (az csak az ampl. lecsengését adja, a fázist nem befoly.)

$$v_{cs} = \frac{c}{n} - ck'\frac{1}{n^2}\frac{d\overset{n(\omega)}{n}}{dk'} =$$

$$= \frac{c}{n}\left(1 - \frac{k'}{n}\frac{dn}{d\omega}\underbrace{\frac{d\omega}{dk'}}_{v_{cs}}\right)$$

⇓

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk'} = \overset{v_f}{\frac{c}{n}} \frac{1}{1 + \frac{ck'}{n^2}\cdot\frac{dn}{d\omega}}$$

→ ha $\frac{dn}{d\omega} > 0 \Rightarrow v_{cs} < v_f$

→ ha $\frac{dn}{d\omega} < 0 \Rightarrow v_{cs} > v_f$

⇓

3féle seb. van: v_{cs}, v_f, v_{En}, ezek viszonya (arányuk) a közegre jellemző!!

14. óra

0) ism.:

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \underline{E}_0 \cdot e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} \qquad \underline{B}(\underline{x},t) = \underline{B}_0 \cdot e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}$$

$$\omega = v_f \cdot k' \qquad v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon' \mu}}$$

$k = k' + ik''$

ha $\varepsilon = (\varepsilon' + i\varepsilon'') \cdot \varepsilon_0 = (1+\chi_e)\varepsilon_0$

$$\delta = \frac{1}{\mu \cdot \omega \cdot v_f \, \varepsilon''} \leftarrow \text{lecsengés}$$

karakt. távolság

$$\underline{k}\,\underline{B}_0 = \underline{k}\,\underline{E}_0 = 0$$

$$\hat{\underline{k}} \times \underline{E}_0 = v_f \underline{B}_0 \qquad v_f = \frac{c}{n} \qquad n = \sqrt{\varepsilon' \mu}$$

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{c}{n} - ck' \frac{1}{n^2} \cdot \frac{dn}{dk'} = \frac{c}{n} - ck' \cdot \frac{1}{n^2} \frac{dn}{d\omega} \frac{d\omega}{dk'}$$

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk'} = \overset{v_f}{\frac{c}{n}} \frac{1}{1 + \frac{ck'}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\omega}} = v_f \frac{1}{1 + \frac{ck'}{n^2} \frac{dn}{d\omega}}$$

ha $\frac{dn}{d\omega} < 0 \Rightarrow v_{cs} > v_f$!

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \mathrm{Re}\,\chi_e)$$

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{c\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\varepsilon'}} \cdot \frac{d\varepsilon'}{d\omega} = \frac{n}{2\varepsilon'} \cdot \frac{d\varepsilon'}{d\omega} = \frac{n}{2\varepsilon'} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{d\,\mathrm{Re}\,\chi_e}{d\omega}$$

$$\mathrm{Re}\,\chi_e = \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$$ ← rugóval atommaghoz kötött e^- modell (oszcill.)

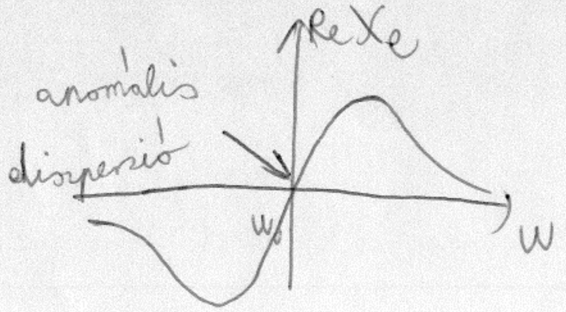
↑ csillapítás $-\gamma\dot{x}$ a súrl. erő

ha

$$\omega \approx \omega_0 \qquad \mathrm{Re}\,\chi_e \approx \frac{Ne^2}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\gamma^2\omega_0^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{n}{2\varepsilon'}\varepsilon_0 \frac{d\,\mathrm{Re}\,\chi_e}{d\omega} = -\frac{n}{2\varepsilon'}\varepsilon_0 \frac{Ne^2}{m}\frac{2\omega}{\gamma^2\omega_0^2} < 0$$



itt $\boxed{v_{cs} > v_f}$

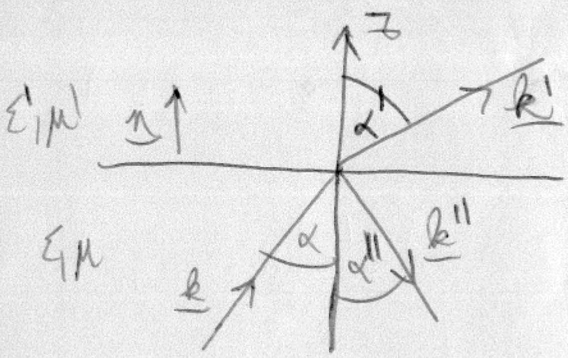
(Érdekesség: réteges anyagból tudtak ilyet csinálni (~2008–2009, Nature)

→ a max. gyorsabban megy, mint a "fázis"

↳ a CERN-es $>c$ kísérlet után elkezdtek olyan v kísérletet csinálni, amiben ilyen rezonáns effektus van)

(Mostantól feltételezzük, hogy a kül. mennyiségek (k, ω) valósak)

1) Törés és visszaverődés sík határfelületen:



$$\underline{E}(z<0) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} + \underline{E}_0'' e^{i(\underline{k}''\underline{x}-\omega'' t)}$$

$$\underline{E}(z>0) = \underline{E}_0' e^{i(\underline{k}'\underline{x}-\omega' t)}$$

↓

határfeltétel:

áll. kell visszavert hullám is!

$$k' = \frac{\omega'}{v_f'} \qquad v_f' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon' \mu'}}$$

$$k = \frac{\omega}{v_f} \qquad k'' = \frac{\omega''}{v_f} \qquad v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$\underline{E}_t = \underline{n} \times \underline{E}$ folyt.

$\underline{H}_t = \underline{n} \times \underline{H}$ –"–

} a normális komp.-et nem kell majd külön nézni a hullámegy. alakja miatt

$\underline{x} = 0$ (origó)

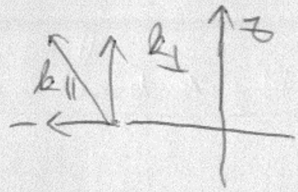
$$(\quad) \cdot e^{-i\omega' t} = (\quad) \cdot e^{-i\omega t} + (\quad) \cdot e^{-i\omega'' t}$$

A fázisok azonos kell legyenek

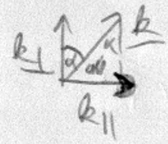
$k' \neq k = k'' \Leftarrow \omega = \omega' = \omega''$

(egyébként időben elromlik az egész)

DE ha 1 $\underline{x}$-ben kielégítem, akkor a síkban mozogva a fázis nem változhat!!



$$\underline{k}_{\parallel}\underline{x} = \underline{k}'_{\parallel}\underline{x} = \underline{k}''_{\parallel}\underline{x}$$



$$k\sin\alpha \cdot |\cancel{x}| = k'\sin\alpha' \cdot |\cancel{x}| =$$

$$= k''\sin\alpha''|\cancel{x}|$$

$$k = k'' \Rightarrow \sin\alpha = \sin\alpha''$$

$$\alpha = \alpha''$$

$$\frac{k}{k'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{v_f'}{v_f}$$ Snell - Descartes - tv.

(Snellius - Cartesius)

$$v_f = \frac{c}{n}$$

$$\frac{n}{n'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} \rightarrow n\sin\alpha = n'\sin\alpha'$$

$$\underline{E}_{t} = \underline{n}\times(\underline{E}_0 + \underline{E}_0'') = \underline{n}\times\underline{E}_0' \quad \leftarrow \hat{\underline{k}}\times\underline{E}_0 = v_f\underline{B}_0 = \mu v_f \underline{H}_0$$

$$\underline{H}_t = \underline{n}\times(\underline{H}_0 + \underline{H}_0'') = \underline{n}\times\underline{H}_0'$$

→ <u>Fresnel - képletek:</u>

A. eset) $\underline{n}\,\underline{E}_0 = 0 = \hat{\underline{k}}\,\underline{E}_0$ $(\underline{n}, \hat{\underline{k}})$ beesés síkja

$\underline{E}_0 \perp (\underline{n}, \hat{\underline{k}})$

B. eset) $\underline{n}\,\underline{H}_0 = 0 = \hat{\underline{k}}\,\underline{H}_0$ $\underline{E}_0 \in (\underline{n}, \hat{\underline{k}})$

$\hat{\underline{E}}_0$: polarizáció iránya

$$\underline{F} = q\left(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B}\right)$$

$$|\underline{F}| = q|\underline{E}| + \cancel{q\frac{v}{v_f}|\underline{E}|}$$

ha $v \ll v_f$

ilyenkor a részecske $\underline{E}$ irányába mozdul el, a mágneses teret "nem érzi"

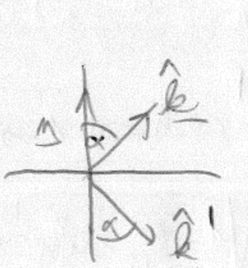
A. eset:

$$\underline{E}_0 + \underline{E}_0'' = \underline{E}_0'$$

$$\frac{1}{\mu v_f}\,\underline{n}\times\left[\hat{\underline{k}}\times\underline{E}_0 + \hat{\underline{k}}''\times\underline{E}_0''\right] = \frac{1}{\mu' v_f'}\,\underline{n}\times\left(\hat{\underline{k}}'\times\underline{E}_0'\right)$$

mert: $\underline{n}\times\left(\hat{\underline{k}}\times\underline{E}_0\right) = \hat{\underline{k}}\,\underbrace{(\underline{n}\,\underline{E}_0)}_{0} - \underline{E}_0\,(\underline{n}\,\hat{\underline{k}})$

$$-\frac{1}{\mu v_f}\left[(\underline{n}\hat{\underline{k}})\,\underline{E}_0 + (\underline{n}\hat{\underline{k}}'')\,\underline{E}_0''\right] = -\frac{1}{\mu' v_f'}(\underline{n}\hat{\underline{k}}')\,\underline{E}_0' = -\frac{1}{\mu' v_f'}(\underline{n}\hat{\underline{k}}')(\underline{E}_0 + \underline{E}_0'')$$



$\underline{n}\,\hat{\underline{k}} = \cos\alpha$

$\underline{n}\,\hat{\underline{k}}' = \cos\alpha'$

$\underline{n}\,\hat{\underline{k}}'' = -\cos\alpha$

$$\underline{E}_0'' = \frac{\cos\alpha - \frac{\mu v_f}{\mu' v_f'}\cdot\cos\alpha'}{\cos\alpha + \frac{\mu v_f}{\mu' v_f'}\cos\alpha'}\,\underline{E}_0$$

$$\underline{E}_0' = \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha + \frac{\mu n_{\ell}}{\mu' n_{\ell}'}\cos\alpha'} \cdot \underline{E}_0$$

- B eset: → ugyanaz a számolás, csak $\underline{E}_0$ helyett $\underline{H}_0$-ra, és mások a konst. faktorok

$$\underline{H}_0 + \underline{H}_0'' = \underline{H}_0'$$

$$-\mu n_{\ell}\, \underline{n} \times (\hat{\underline{k}} \times \underline{H}_0 + \hat{\underline{k}}'' \times \underline{H}_0) = -\mu' n_{\ell}'\, \underline{n} \times (\hat{\underline{k}}' \times \underline{H}_0')$$

$$\underline{H}_0'' = \frac{\mu n_{\ell}\cos\alpha - \mu' n_{\ell}'\cos\alpha'}{\mu n_{\ell}\cdot\cos\alpha + \mu' n_{\ell}'\cdot\cos\alpha'}\,\underline{H}_0$$

$$\underline{H}_0' = \frac{2\mu n_{\ell}\cos\alpha}{\mu n_{\ell}\cos\alpha + \mu' n_{\ell}'\cos\alpha'}\,\underline{H}_0$$

- Spec. esetek: ~~Brewster-szög~~ → B eset, $\underline{H}_0'' = 0 \Leftrightarrow \mu n_{\ell}\cos\alpha = \mu' n_{\ell}'\cos\alpha'$

  • Brewster-szög

legyen $\mu = \mu' = 1$ $\qquad \frac{1}{n}\cos\alpha = \frac{1}{n'}\cos\alpha'$

$$\frac{n'}{n}\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha'} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha}$$

$$\frac{n'^2}{n^2}\cos^2\alpha = 1 - \frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha$$

$$\left(\frac{n'^2}{n^2} - 1\right)\cos^2\alpha = \sin^2\alpha\left(1 - \frac{n^2}{n'^2}\right)$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{n'^2}{n^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_{Br} = \frac{n'}{n} = \frac{\sin\alpha_{Br}}{\cos\alpha_{Br}} \leftarrow \frac{\sin\alpha_{Br}}{\sin\alpha'_{Br}} = \frac{n'}{n}$$

$$\cos\alpha_{Br} = \sin\alpha'_{Br} \Rightarrow \boxed{\alpha_{Br} + \alpha'_{Br} = \frac{\pi}{2}}$$

A. esetben lehet-e ilyen?

$$\underline{E}_0^{\parallel} \leftrightarrow \frac{1}{n'}\cos\alpha = \frac{1}{n}\cos\alpha'$$

$$\frac{n^2}{n'^2}\cos^2\alpha = \sqrt{1-\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{n^2}{n'^2}=1$$

↑ csak ~~akkor~~ hiányozhat a visszavert fény

↓ Brewster-szögben polarizált fényt kapunk!

• Határszög (spec. eset 2)

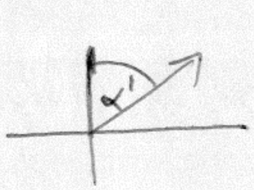
$n\sin\alpha = n'\sin\alpha'$ ~~(határszög)~~ , $\alpha' = \frac{\pi}{2}$

$n\sin\alpha_h = n'$ $\boxed{n' < n}$ csak ilyen közegnél lehetséges

ha $\alpha > \alpha_h$ $\quad \cos\alpha' = \sqrt{1-\frac{n^2}{n^2}\sin^2\alpha} = i\sqrt{\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha - 1}$

$\underline{k}'$ kompl. $\Rightarrow$ $e^{i\underline{k}'\underline{x}} = e^{ik'_z z + ik'_{\parallel}x} = e^{ik'z\cos\alpha'} \dots = e^{-k'z\sqrt{\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha - 1}} + \dots$

exponenciálisan csökken az amplitúdó



⇑ a Maxwell-egyenleteket (határfeltételek) nem is lehetne kielégíteni olyan ~~határfeltétel~~ esettel, hogy

!

↓ $\underline{\underline{\text{Van}}}$ továbbhaladó hullám, de lecseng!

↓

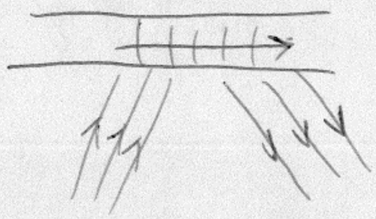
Energiamegmaradás határsága

$$\mathrm{Re}\, \underline{n}\, \underline{S}' = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, \underline{n} \left(\underline{E}' \times \underline{H}'^{*} \right) = \frac{1}{2 v_f'} \mathrm{Re} \left[\underline{n} \left(\underline{E}' \times \left(\underline{k}' \times \underline{E}' \right)^{*} \right) \right] =$$

ez a merőleges komp.

$$= \frac{1}{2 v_f'} \mathrm{Re} \left(\underline{n} \underline{k}'^{*} \right) |\underline{E}'|^2 = 0$$

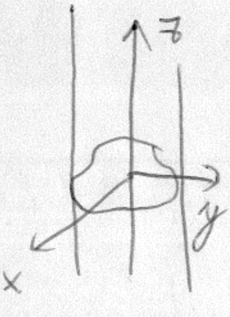
$\underline{k}'$ most komplex



az energia ~~(teljesen)~~ is visszaverődik teljesen

Hullámvezetők

(hullámok véges tartományban)



A keresztm. = áll

z irányú eltolásra invariáns

· cső „ideális vezető" ⇒ 0 behatolási mélység, $\sigma = \infty$

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = \underline{E}(x, y)\, e^{i k_z z - i\omega t} = \cancel{\left(v_f = \frac{\omega}{k_z} \right)}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k_z}$$

($\underline{H}$-ra hasonlóan)

$$= \left(\underline{E}_z(x, y) + \underline{e}_z E_{long}(x, y) \right) e^{ikz - i\omega t}$$

$$\nabla = \underline{e}_z \partial_z + \nabla_{transzv.}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} = (\underline{e}_z \partial_z + \nabla_t) \times (\underline{E}_t + \underline{e}_z E_l) e^{ikz} = \Big(\overbrace{ik\,\underline{e}_z \times \underline{E}_t}^{\perp \underline{e}_z} + 0 +$$

$$+ \nabla_t \times \underline{E}_t \underbrace{- \underline{e}_z \times \nabla_t E_l}_{\perp \underline{e}_z}\Big) e^{ikz}$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{E})_l = (\nabla_t \times \underline{E}_t) e^{ikz}$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{E})_t = \underline{e}_z \times (ik\,\underline{E}_t - \nabla_t E_l)\, e^{ikz}$$

Maxwell-egyenletek transzverz. és longit. komponensekre:

- $i\omega \underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{E} \;\rightarrow\; i\omega B_l = (\nabla_t \times \underline{E}_t) \cdot \underline{e}_z$

$$\underline{i\omega \underline{B}_t = \underline{e}_z \times (ik\,\underline{E}_t - \nabla_t E_l)}$$

- $-i\omega \varepsilon \mu \underline{E} = \mathrm{rot}\,\underline{B} \;\rightarrow\; -i\omega \varepsilon \mu E_l = (\nabla_t \times \underline{B}_t)\, \underline{e}_z$

$$\underline{-i\omega \varepsilon \mu \underline{E}_t = \underline{e}_z \times (ik\,\underline{B}_t - \nabla_t B_l)}$$

(div-k nem kellenek) $\swarrow$

Áll: a transzv. komponenseket a longitudinálisokkal ki lehet fejezni! 6 komp. helyett 2 független.

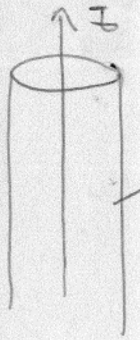
$$(\Delta + \varepsilon \mu \omega^2) \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{B} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Delta = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ápr. 11-én $13^{15} - 14^{15}$ ZH, nem lehet semmit használni

15. óra

Az (egyenes) hullámvezető



$E_t\big|_{F(\text{felület})} = 0$ $\qquad \underline{E}(\underline{x},t) = \underline{E}(x,y)\cdot e^{i(kz-\omega t)}$ $\qquad$ (uez. $\underline{B}$-re)

$H_t\big|_{F(\text{felület})} = 0$ $\qquad \left(v_f = \frac{\omega}{k} \right)$

$$= \left(\underline{E}_t + \underline{e}_z \cdot E_l\right) e^{ikz - i\omega t}$$

a Maxwell-egyenle- t ~~transzv.~~ és long. komponensekre bontjuk szét
~~teket~~ is ilyenre szedjük
szét

$\underline{\nabla} = \underline{\nabla}_t + \underline{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}$, forrásmentes megoldás: $\frac{\partial}{\partial z} E_l = ik \cdot E_t$

$$i\omega \underline{B}_t = \pm \left(\underline{\nabla} \times \underline{E}\right)_t \quad / \underline{e}_z \times$$

I. $i\omega B_l = \underline{e}_z\left(\underline{\nabla}_t \times \underline{E}_t\right)$ $\qquad$ II. $i\omega\left(\underline{e}_z \times \underline{B}_t\right) = -ik\underline{E}_t + \underline{\nabla}_t E_l$

III. $-i\omega\varepsilon\mu E_l = \underline{e}_z\left(\underline{\nabla}_t \times \underline{B}_t\right)$ $\qquad$ IV. $-i\omega\varepsilon\mu\left(\underline{e}_z \times \underline{E}_t\right) = -ik\underline{B}_t + \underline{\nabla}_t B_l$

---

ik· II, IV $\to$ $\underline{B}_t$

$$k^2\underline{E}_t + ik\underline{\nabla}_t E_l = -i\omega\, \underline{e}_z \left[-i\omega\varepsilon\mu\left(\underline{e}_z \times \underline{E}_t\right) - \underline{\nabla}_t B_l\right] =$$

$$= \omega^2\varepsilon\mu\underline{E}_t + i\omega\, \underline{e}_z \times \underline{\nabla}_t B_l$$

$$\underline{e}_z(\underline{e}_z \underline{E}_t) - \underline{E}_t \underline{e}_z^2$$

E_t-t kifejezzük a longitudinális komponensekkel:

$$\underline{E}_t\left(\varepsilon\mu\omega^2 - k^2\right) = ik\underline{\nabla}_t E_l - i\omega\, \underline{e}_z \times \underline{\nabla}_t B_l \,, \quad \gamma^2 := \varepsilon\mu\omega^2 - k^2$$

II. $ik, \nabla \to \underline{E}_t$

⋮

$$\underline{E}_t = \frac{1}{\gamma^2}\left(ik\nabla_t E_\ell - i\omega\, \underline{e}_z \times \underline{\nabla}_t B_\ell\right) \qquad \underline{B}_t = \frac{1}{\gamma^2}\left(ik\nabla_t B_\ell + i\varepsilon\mu\omega\, \underline{e}_z \times \nabla_t E_\ell\right)$$

$\Downarrow$

$$\left(\Delta + \varepsilon\mu\omega^2\right)\begin{pmatrix}\underline{E}\\ \underline{B}\end{pmatrix} = 0 \to \boxed{\left(\Delta_t + \gamma^2\right)\begin{pmatrix}E_\ell(x,y)\\ B_\ell(x,y)\end{pmatrix} = 0}$$

$\downarrow$

ha ezt megoldjuk, $\underline{E}_t, \underline{B}_t$ a fenti egyenletekből megkapható!

$\underline{E}_t, \underline{B}_t$ lineárisan függ E_ℓ, B_ℓ-től

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{lll} \cdot\ \text{TM} & B_\ell = 0 & E_\ell \neq 0 \\ \cdot\ \text{TE} & B_\ell \neq 0 & E_\ell = 0 \end{array}\right\}$$ ezek szuperpozíciója is megoldás

$$\Psi(x,y) \to \boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y) = -\gamma^2\,\Psi(x,y)}$$ sajátértékfeladat

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} B_\ell, & \text{ha TE} \\ E_\ell, & \text{ha TM} \end{cases}$$

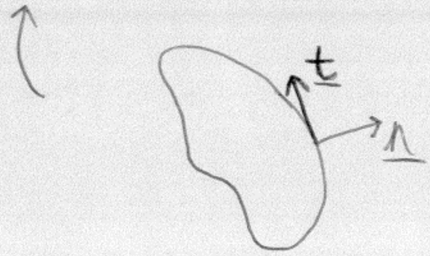
$\downarrow \int e^{i(k_x x + k_y y)}\, d\underline{k}$

a határfeltétel fogja meghatározni, hogy pontosan mely függvények oldják meg a sajátértékfeladatot

- Határfeltétel: TM: $\Psi(x,y) = E_\ell(x,y) \quad \Psi(x,y)\big|_{\underline{x}_f} = 0$ ~(Dirichlet f. rbtb.-ban)

TE: $\underline{E}_t \sim \underline{e}_z \times \underline{\nabla}_t B_\ell \qquad \underline{t}\cdot\underline{E}_t\big|_{\underline{x}_f} = 0 \sim \underline{\nabla}_t B_\ell\left(\underline{t}\times\underline{e}_z\right) =$

$\downarrow \qquad = \underline{n}\nabla_t B_\ell$

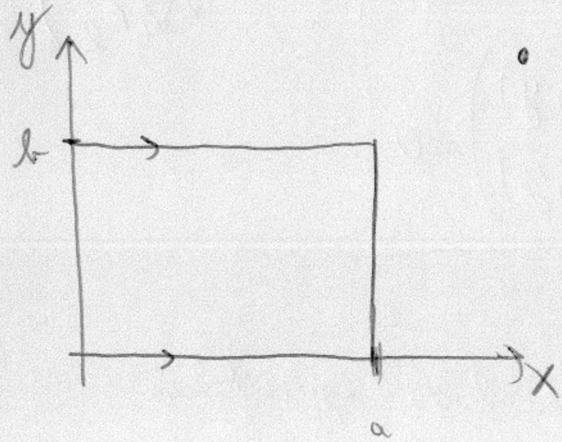


$\downarrow$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}\Big|_{\underline{x}_\Gamma} = 0$$

(~ Neumann hf. sztatikában)

– **Példa:**



$\bullet \quad \Psi = E_z \quad (TM)$

$$\Delta_t \Psi = -\gamma^2 \Psi$$

$$TM: \ \Psi\Big|_{\underline{x}_\Gamma} = 0$$

$$\to \ \Psi(x,0) = \Psi(x,b) = 0$$

$$\to \ \Psi(0,y) = \Psi(a,y) = 0$$

$$\Psi(x,y) = \sin\left(\frac{\pi}{a} n_x x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} n_y \cdot y\right) \cdot A_{n_x n_y} \qquad n_x, n_y \in \mathbb{N} \quad (1,2,\ldots)$$

$\uparrow$

adott határfeltételhez tartozó sajátfv.

$$\gamma^2 = \left(\frac{\pi}{a} n_x\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} n_y\right)^2 =$$

$$= \varepsilon\mu\omega^2 - k^2$$

$$\gamma^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\omega^2 = c^2 \left\{ \pi^2 \left[\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 \right] + k^2 \right\} \leftarrow \frac{1}{\varepsilon\mu} = c^2$$

$$\omega > c \cdot k$$

$$v_f > c$$

• $\Psi = B_\ell$ (TE)

$$\rightarrow \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}\bigg|_{x=0,a} = 0 = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\bigg|_{y=0,b}$$

$$\Psi(x,y) = B_{n_x, n_y} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a} n_x \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b} n_y \cdot y\right) \qquad n_x, n_y \in \mathbb{N}$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{\pi}{a} n_x\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} n_y\right)^2 \qquad n_x, n_y = 0, 1, \dots$$

$$\omega^2 = c^2 \left\{ \pi^2 \left[\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 \right] + k^2 \right\} \qquad \cancel{n_x, n_y = 0} \quad \text{(de csak az egyik lehet 0)}$$

$$\omega^{2\,(TE)}_{min} = c^2 \left[k^2 + \pi^2 \frac{1}{(\min(a,b))^2} \right]$$

$k \sim$ kicsi

$\downarrow$

! van egy minimális frekvencia, ami alatt nem tud vezetni a hullámvezető! (ilyenkor picit behatol a hullám, de exponenciálisan le is cseng)

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk} = c \frac{k}{[\quad]^{1/2}} \cdot \frac{c}{c} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_f}$$

$v_f \cdot v_{cs} = c^2$ $\rightarrow$ Melyikkel megy a hullám? Ez további megfontolásokat igényel (mi az, hogy megy a hullám $\rightarrow$ pl. energiaterjedés $\rightarrow$ lesz-e 3. seb.?) ...

- Általában a transzverz. komponensekre:

TM: $\Psi = E_z$, $\Psi\big|_{\partial F} = 0$, $\underline{E}_t = \frac{1}{\gamma^2} ik \underline{\nabla}_t \Psi$,

$$\underline{B}_t = \frac{1}{\gamma^2} \omega i \varepsilon\mu\, \underline{e}_z \times \underline{\nabla}_t \Psi = \varepsilon\mu \frac{\omega}{k} \underline{e}_z \times \underline{E}_t$$

$\downarrow$

$\underline{B}_t \perp \underline{E}_t$ 2D-ben is!

TE: $\Psi = B_z$, $\frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_{\partial F} = 0$, $\underline{B}_t = \frac{1}{\gamma^2} ik \underline{\nabla}_t \Psi$, $\underline{E}_t = -\frac{\omega}{k} \underline{e}_z \times \underline{B}_t$

- energiaterjedés sebessége:

$$v_E = \frac{\int_F dx\,dy\, \overline{S_z}^T}{\int_F dx\,dy \cdot \underbrace{\overline{u}^T}_{\text{energiasűrűség}}} \qquad \overline{S_z}^T = \frac{1}{2} \underline{e}_z \left(\underline{E}_t \times \underline{H}_t^*\right)$$

$$\overline{u}^T = \frac{1}{4}\left(\varepsilon |\underline{E}|^2 + \frac{1}{\mu} |\underline{B}|^2\right)$$

• TM: $$\overline{S_z}^T = \frac{1}{2\mu} \Big[\underbrace{\Big(\underline{E}_t \cdot \varepsilon\mu \frac{\omega}{k} \times \big(\underline{e}_z \times \underline{E}_t^*\big)\Big)}_{\underline{B}_t}\Big] \cdot \underline{e}_z = \frac{\varepsilon\omega}{2k} |\underline{E}_t|^2 =$$

$$= \frac{\varepsilon\omega}{2\cancel{k}} \cdot \frac{k^{\cancel{2}}}{\gamma^4} \underline{\nabla}_t \Psi \underline{\nabla}_t \Psi^* = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \omega k}{\gamma^4} \underline{\nabla}_t \Psi \cdot \underline{\nabla}_t \Psi^*$$

• TE: $$\overline{S_z}^T = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\omega}{k}\right) \underline{e}_z \left[\left(\underline{e}_z \times \underline{B}_t\right) \times \underline{B}_t^*\right] = \frac{\omega}{2\mu k} |\underline{B}_t|^2 = \frac{\omega k}{2\mu} \frac{1}{\gamma^4} \underline{\nabla}_t \Psi \underline{\nabla}_t \Psi^*$$

• $$\int dx\,dy\, \overline{S_z}^T \overset{(TM)}{=\!=} \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\omega k}{\gamma^4} \int dx\,dy\, \underbrace{\underline{\nabla}_t \Psi \underline{\nabla}_t \Psi^*}_{\underline{\nabla}_t (\Psi \underline{\nabla}_t \Psi^*) - \Psi \Delta \Psi^*}$$

feltéve, hogy γ^2 valós (belátható → hermitikus op. sajátért.)

$$\Rightarrow \Delta_t \psi^* = \Delta_t \psi = -\gamma^2 \cdot \psi^*$$

$$\int dx\,dy\,\overline{S_z}^T = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\omega k}{\gamma^4}\int dx\,dy\,\nabla_t(\psi\nabla_t\psi^*) + \gamma^2|\psi|^2 =$$

$$= \frac{\varepsilon\omega k}{2\gamma^4}\left[\int_C dl\,\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial n} + \gamma^2\int dx\,dy\,|\psi|^2\right] = \frac{\varepsilon\omega k}{2\gamma^2}\int dx\,dy\,|\psi|^2$$

msz.:

$$\int_F dx\,dy\,\underline{B} = \int_C dl\,\underline{B}\,\underline{n}$$

TM : $\psi|_{kf} = 0$

(TE-nél $\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\Big|_{kf} = 0$)

hasonló számolással:

- TE: $\int dx\,dy\,\overline{S_z}^T = \frac{\omega k}{2\mu\gamma^2}\int dx\,dy\,|\psi|^2$

- TM: $\int dx\,dy\,\overline{u}^T = \frac{1}{4}\int dx\,dy\left(\underbrace{\varepsilon|\psi|^2}_{|E_z|^2} + \overbrace{\varepsilon\frac{1}{\gamma^4}k^2|\nabla_t\psi|^2}^{|E_t|^2} + \overbrace{\frac{\varepsilon^2\mu^{\cancel{2}}\omega^2}{\cancel{\mu}\gamma^4}|\nabla_t\psi|^2}^{\frac{1}{\mu}|B_t|^2}\right) =$

$$= \frac{\varepsilon}{4}\int dx\,dy\,|\psi|^2\cdot\left(1 + \frac{k^2 + \varepsilon\mu\omega^2}{\gamma^2}\right) = \frac{\cancel{2}\varepsilon^2\mu\omega^2}{2\cancel{4}\gamma^2}\int dx\,dy\,|\psi|^2$$

$\gamma^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - k^2$ volt

TM

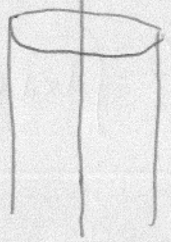
$$\Rightarrow v_E = \frac{\int dx\,dy\,\overline{S_z}^T}{\int dx\,dy\,\overline{u}^T} = \frac{\frac{\cancel{\varepsilon}\omega k}{\cancel{2}\mu\cancel{\gamma^2}}\cancel{\int dx\,dy\,|\psi|^2}}{\frac{\varepsilon^2\mu\omega^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{\gamma^2}}\cancel{\int dx\,dy\,|\psi|^2}} = \frac{k}{\omega\varepsilon^2\mu^2} = \frac{c^2}{v_f} = v_{cs} = v_E^{(TM)} = v_E^{(TE)}$$

Üregrezonátor

$z = 0, d$ ideális vezető lemez határolja a hullámvezetőt

$$\Psi(x,y,z,t) = \Psi(x,y) \cdot e^{i(kz-\omega t)}$$ ← ez volt hullámvezetőnél

↑ nem tudja a határfeltételt



TM: $E_t(z=0, x, y) = E_t(z=d, x, y) = 0$

$$E_t \sim \sin\left(\frac{\pi}{d} n_z \cdot z\right) = \frac{1}{\gamma^2} \nabla_t \cdot \partial_z E_l$$

a hullámvezetőhöz hasonlóan járunk el:

- $$\Psi^{(TM)} = A(\underset{(x,y)}{\underline{n}}) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{d} n_z \cdot z\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} n_x \cdot x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} n_y \cdot y\right)$$

  ↑ téglalap keresztmetszet, oldalain 0 a Ψ

$$\omega^2 = c^2 \pi^2 \cdot \left(\left(\frac{n_z}{d}\right)^2 + \left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2\right) \qquad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$$

- $$\Psi^{(EM)} = A(\underline{n}) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{d} n_z \cdot z\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} n_x x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b} n_y \cdot y\right)$$

$$\omega^2 = c^2 \pi^2 \left(\left(\frac{n_z}{d}\right)^2 + \left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2\right)$$

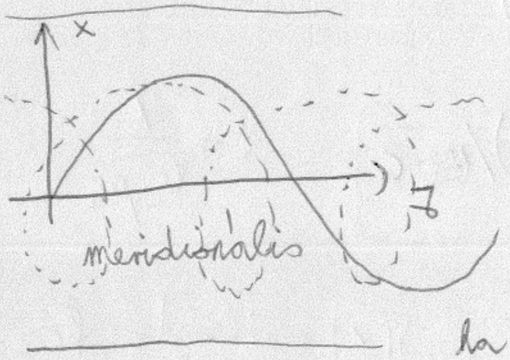
$n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$ (de egyszerre mind 3 nem 0)

= hullámvezetőknél, üregrezonátornál síkhullámmegoldások szuperpozíciójából rakjuk össze a megoldást, majd határfeltételekhez illesztettük őket

16. óra

Fényvezető

pl.
(üvegszálas optikai kábelek)



$n(x)$ lassan változik

$$n(x) = \sqrt{\varepsilon_r(x)} \leftarrow \mu_r = 1$$

ha $\frac{dn(x)}{dx} < 0$ → meridionális
(tengely közeli)

(más esetben lehet még spirális is)

hullámoptika → sugároptika

általánosabb eset

$$\text{rot}\, \underline{E}_\omega = i\omega\mu\, \underline{H}_\omega \qquad \text{rot}\, \underline{H}_\omega = -i\omega\, \varepsilon(\underline{x})\, \underline{E}_\omega$$

$$\text{div}\, \underline{D}_\omega = 0 = \text{div}\left(\varepsilon(\underline{x})\, \underline{E}_\omega\right) \qquad \text{div}\, \underline{H}_\omega = 0$$

$$\text{rot rot}\, \underline{H}_\omega = \underbrace{-\Delta \underline{H}_\omega}_{\text{grad div} H_\omega = 0} = -i\omega\, \text{rot}\left(\varepsilon(\underline{x})\, \underline{E}_\omega\right) = -i\omega\, \varepsilon(\underline{x})\, \text{rot}\, \underline{E}_\omega - i\omega \nabla\varepsilon \times \underline{E}_\omega =$$

$$= \underbrace{\varepsilon(x)\mu\omega^2 H_\omega - i\omega \nabla\varepsilon \times \underline{E}_\omega}_{\text{indukciótv.}}$$

msz.: $\text{div}\left(\varepsilon(x)\underline{E}_\omega\right) = \nabla\varepsilon \cdot \underline{E}_\omega + \varepsilon\, \text{div}\, \underline{E}_\omega = 0$

hasonlóan:

$$\Delta \underline{E}_\omega + \varepsilon(\underline{x})\mu\omega^2 \underline{E}_\omega = \text{grad}\left(-\frac{1}{\varepsilon} \nabla\varepsilon \cdot \underline{E}_\omega\right)$$

---

az inhomogenitást $\nabla\varepsilon$-os tagok okozzák

<u>lassú</u> változás esetén $\to \left|\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}\right| << \frac{1}{\lambda}$

$\cancel{\left(|\underline{E}| \sim v_f |\underline{B}|\right)}$

$\Downarrow$

ilyenkor elhanyagoljuk

$$\left(\Delta + \varepsilon(\underline{x})\mu\omega^2\right)\begin{pmatrix}\underline{E}_\omega \\ \underline{H}_\omega\end{pmatrix} \approx 0 \qquad (*)$$

A megoldást a köv. alakban ker.: $\boxed{\Psi(\underline{x}) = e^{i\omega S(\underline{x})/c}}$ $\qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$

msz.: $\nabla\Psi = \frac{i\omega}{c}\nabla S \cdot \Psi$ $\qquad S(\underline{x}) =$ <u>eikonál fv.</u>

$$\Delta\Psi = \frac{i\omega}{c}\Delta S \cdot \Psi - \frac{\omega^2}{c^2}(\nabla S)^2\Psi$$

$$\varepsilon(\underline{x})\mu = \frac{n^2(\underline{x})}{c^2} = \frac{1}{v_f^2(\underline{x})}$$

$\Downarrow$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left(n^2(\underline{x}) - (\nabla S)^2\right)\Psi + \frac{i\omega}{c}\Delta S \cdot \Psi = 0$$

$$S(\underline{x}) \sim \underbrace{\hat{\underline{k}}\,\underline{x}}_{\substack{\text{homogén} \\ \text{(lin. tag)}}} + \underbrace{\ldots}_{\text{korrekciók (kicsik)}}$$

ha a korrekciók kicsik (lassú vált.) $(**)$

$\Downarrow$

$|S\Delta S| < (\nabla S)^2 \qquad \Delta S$ közel 0 (2. derivált)

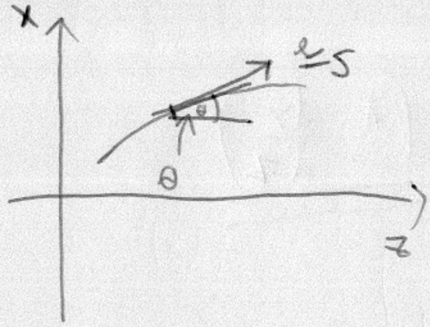
$$\boxed{n^2(\underline{x}) = (\nabla S)^2}$$

geom. optika egyenlete

Fermat-elv

$\left.\begin{matrix}(*) \\ (**)\end{matrix}\right\}$ elhanyagolások (lassú vált.)

$$\boxed{\nabla S = n(\underline{x}) \cdot \underline{e}_s}$$



ahol

$$\underline{e}_s = \frac{d\underline{x}}{ds}$$

$$\underline{e}_s \nabla S = n(\underline{x})$$

$$n(\underline{x}) = \underbrace{\frac{dS}{ds}}$$

ívhossz menti derivált (ezt a komponensét veszem a grad.-nak)

$\underline{S}$-et sorbafejtve:

$$e^{i\omega/c\left(S(\underline{x}_0) + (\underline{x}-\underline{x}_0)\nabla S(\underline{x}_0)\right)}$$

$$\frac{\omega}{c}\underline{e}_s \nabla S = \underline{e}_s \underline{k}(\underline{x})$$

$$e^{i\underline{k}(\underline{x})\underline{x}}$$

$$\frac{\omega}{c} n(\underline{x}) = \underline{e}_s \underline{k}(\underline{x})$$

$$\underline{e}_s = \left(\underset{x}{\sin\theta}, \underset{z}{\cos\theta}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left(\nabla S\right) = \nabla n(\underline{x})$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(n(x)\, \underline{e}_s\right) = \nabla n(\underline{x})$$

$$\frac{dn}{dx} = \frac{d}{ds}\left(n(x)\sin\theta\right) \quad (*)$$

$$\frac{dn}{dz} = 0 = \frac{d}{ds}\left(n(x)\cos\theta\right)$$

$$\downarrow$$

$$n(x)\cos\theta = \bar{n} = \text{állandó}$$

(a megoldásra ~~közeg~~)

$\uparrow$

kezdőfelt. szabja meg

θ_0

$$\cos\theta_{max} = 1$$

ez a visszafordulás helye $\rightarrow \theta(x_m) = 0$

msz.:

$$\frac{dx}{ds} = \sin\theta$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos\theta$$

$$\cos\theta \frac{d}{dz} = \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow$$

(*) $\cdot n$:

$$n\frac{dn}{dx} = n\cos\theta \frac{d}{dz}\left(n(x)\sin\theta\right)$$

$$n\frac{dn}{dx} = \bar{n}\cdot\frac{d}{dz}\left(n(x)\frac{dx}{ds}\right) = \bar{n}\frac{d}{dz}\left(\bar{n}\frac{dx}{dz}\right)$$

$z \leftrightarrow t$ (idő)

$n^2 \leftrightarrow m$ (tömeg)

$-\frac{1}{2}n^2 \leftrightarrow V$ (potenciál)

$\Downarrow$

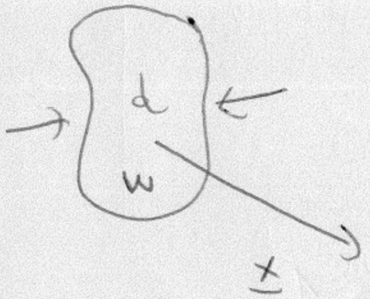
$$-\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \stackrel{!}{=} \text{áll} = \frac{1}{2}\bar{n}^2$$

$$z(x) = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{n^2(x)}{\bar{n}^2} - 1}}$$

$\Rightarrow$ a maximum helyénél (megfordulás)

$\theta = 0$, de az erő $\propto n^2 \neq 0 \to$ lesz gyorsulás

Sugárzás keletkezése



$d \ll |\underline{x}| = r$

Lorentz-mérték:

ezek már a forrásokon kívül vannak

$$\phi_w(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \frac{\rho_w(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

$$\underline{A}_w(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{\underline{j}_w(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|} \quad e^{-i\omega t'} \leftarrow t' = \left(\cancel{t} - \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{c}\right)$$

ezzel mind2 oldalon egyszerűsítünk

$$|\underline{x}-\underline{x}'| \simeq |\underline{x}| - \hat{\underline{x}}\underline{x}'$$

- $\underline{E}_w(\underline{x}), \underline{B}_w(\underline{x}) = ? \to \underline{B}_w(\underline{x}) = \text{rot}\,\underline{A}_w(\underline{x})$

$\text{rot}\,\underline{H}_w = -i\omega\varepsilon_0 \underline{E}_w(\underline{x}) \to \underline{x}$-ben már homogén a lokális tér

$$\underline{E}_w(x) = \frac{i}{\omega\varepsilon_0\mu_0}\,\text{rot}\,\text{rot}\,\underline{A}_w(\underline{x}) = \frac{i}{\omega\varepsilon_0\mu_0}\,\text{rot}\,\underline{B}_w$$

- $$\underline{A}_w(\underline{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x' \frac{\underline{j}_w(\underline{x}')}{1-\frac{\hat{\underline{x}}\underline{x}'}{r}} e^{-ik\hat{\underline{x}}\underline{x}'} = \qquad \underline{k} := k\hat{\underline{x}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x' \underline{j}_w(\underline{x}') \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\hat{\underline{x}}\underline{x}'}{r}\right)^n$$

- hosszúhullámú közelítés: $\lambda \gg d$
  - $\lambda \gg r \gg d$ közelzóna
  - $r \sim \lambda$ átmeneti zóna
  - $r \gg \lambda \gg d$ sugárzási (távol) zóna

- közelzóna:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \to \underline{k}\,\underline{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r \sim 0 \to e^{ikr} \simeq 1$$

$$\leftarrow e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|} \simeq 1$$

$$\underline{A}_w(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\underline{j}_w(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

sztatikus képlet, csak $\underline{j}$ azonnal követi a források változását

- átmeneti zóna: bonyolult
- sugárzási zóna:

$$\underline{A}_w \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \frac{\underline{j}_w(\underline{x}')}{1-\frac{\hat{\underline{x}}\underline{x}'}{r}} \cdot e^{-ik\hat{\underline{x}}\underline{x}'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \underline{j}_w(\underline{x}') \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\hat{\underline{x}}\underline{x}'}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-ik\hat{\underline{x}}\underline{x}'\right)^m$$

$\overline{\underline{S}}^T = \underline{E}_w \times \underline{H}_w^*$ ha $\underline{E}_w$ és $\underline{H}_w$ $\frac{1}{r^2}$-el csökkene, a Poynting-vektor nem adna (lényeges) járulékot

$\Downarrow$

sugárzás $n=0$-ra:

- $m=0$ elektromos-dipól

$$\underline{A}_w^{(ed, sug)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \, \underline{j}_w(\underline{x}')$$

el. dipól

msz.:

$$0 = \int d^3x' \, \partial_k \left(j_{w_k}(x') \cdot x_i' \right) = \int d^3x' \cdot x_i' \cdot \operatorname{div} \underline{j}_w(\underline{x}') + \int d^3x' \, j_{w_i}(\underline{x}') =$$

k. előzőekben

$$-i w \, \rho_w(\underline{x}') + \operatorname{div} \underline{j}_w(\underline{x}') = 0$$

$$= \int d^3x' \, \underline{j}_w(\underline{x}') = i w \int d^3x' \cdot \underline{x}' \cdot \rho_w(\underline{x}') = i w \cdot \underline{d}_w$$

$$\underline{A}_w(\underline{x})^{(ed, sug)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \, i w \, \frac{e^{ikr}}{r} \, \underline{d}_w$$

$$\underline{B}_w(\underline{x})^{(ed, sug)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \, i w \, \frac{1}{r} \, \varepsilon_{ijk} \left(\partial_j e^{ikr} \right) (d_w)_k$$

amikor $\operatorname{rot} \underline{A}$-t számoltunk, csak olyan deriválást használhatunk, ami az r hatványt nem változtatja meg, egyébként $\frac{1}{r^\alpha}$ (ha $\alpha > 1$) $\rightarrow \underline{S} \sim \frac{1}{r^{\alpha} \cdot r}$

$\Downarrow$

rot csak e^{ikr}-re hat $\frac{1}{r}$-re nem!

az energiában r^2-es felületre kiintegrálva nem ad járulékot

$$\underline{B}_w(\underline{x})^{(ed, sug)} = + \frac{\mu_0 w k}{4\pi r} e^{ikr} \cdot \underbrace{\hat{\underline{x}} \times \underline{d}_w}_{\text{kereszt}}$$

$$\hat{\underline{x}} \cdot \underline{B}_w = 0$$

(transzverzális a sugárzás)

$$\underline{E}_w = \operatorname{rot} \underline{B}_w \cdot \frac{i}{\varepsilon_0 \mu_0 w}$$

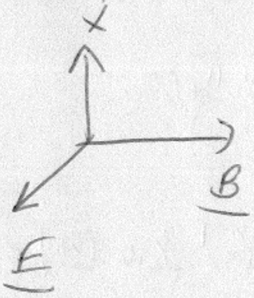
$$\underline{E}_w^{(ed, sug)} = \frac{i \mu_0 w k}{\varepsilon_0 \mu_0 w} \frac{ik}{4\pi r} \cdot e^{ikr} \cdot \hat{\underline{x}} \times \left(\hat{\underline{x}} \times \underline{d}_w \right) = - \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \hat{\underline{x}} \times \left(\hat{\underline{x}} \times \underline{d}_w \right)$$

$$\underline{E}_w \perp \underline{B}_w$$

$$\overline{\underline{S}}^T_\omega = \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{E}_\omega \times \underline{B}^*_\omega\right)$$

mn.:

$$\underline{E}_\omega^{(ed,sug)} = -\frac{k}{4\pi\varepsilon_0\mu_0\omega}\,\hat{\underline{x}}\times\underline{B}_\omega^{(ed,sug)}(\underline{x}) =$$



$$= -v_f \cdot \hat{\underline{x}} \times \underline{B}_\omega^{(sug,ed)}$$

$$\overline{\underline{S}}^T_\omega = \frac{1}{2\mu_0}\, v_f \left(\left(\underline{B}_\omega^{(ed,sug)} \times \hat{\underline{x}}\right)\times \underline{B}^{*(ed,sug)}\right) = \frac{v_f}{2\mu_0}\,\hat{\underline{x}}\,\left|\underline{B}_\omega^{(ed,sug)}\right|^2$$

$$B^* \times (\hat{\underline{x}} \times \underline{B}) = \hat{\underline{x}}\,(\underline{B}_\omega)^2 - \underline{B}_\omega \cdot \underbrace{(\hat{\underline{x}}\underline{B}_\omega)}_{0}$$

$$\overline{P}^T = \int d\Omega\, r^2\, \overline{\underline{S}}^T \cdot \hat{\underline{x}}$$

ábra

Sugárzások keletkezése ~~(ism.)~~

~~múltkor $m=0 \to$ tagra néztük csak~~

0) Ism: Távol a forrástól:

$$\underline{B}_\omega(\underline{x}) = \nabla\times\underline{A}_\omega(\underline{x}) \qquad \underline{A}_\omega(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x\, \underline{j}_\omega(\underline{x}')\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\hat{\underline{x}}\,\underline{x}'}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{\infty}(-i\underline{k}\underline{x}')^m\frac{1}{m!}$$

$$\underline{E}_\omega(\underline{x}) = \frac{i}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\nabla\times\underline{B}_\omega(\underline{x}) \qquad \underline{k} = \frac{\omega}{c}\hat{\underline{x}} \qquad \hat{\underline{x}}\text{: megfigyelés iránya}$$

$d \ll \lambda \ll r = |\underline{x}|$

hosszú hullámú közelítés, sugárzás:

$$\overline{\underline{S}}_\omega^T = \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{E}_\omega(\underline{x}) \times \underline{B}_\omega^*(\underline{x})\right)$$

$\sim \frac{1}{r^2}$ $\qquad \sim 1/r \qquad 1/r$

a $\left(\frac{d}{r}\right)^n$-es tagot elhagytuk, mert a Poynting-vektorban felületre kiintegrálva nem ad járulékot

$$\underline{A}_\omega^{(sug)}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int d^3x' \, \underline{j}_\omega(\underline{x}')\,(-i\underline{k}\underline{x}')^m$$

$$\underline{B}_\omega^{(sug)}(\underline{x}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\,\hat{\underline{x}} \times \int d^3x' \cdot \underline{j}_\omega(\underline{x}')\cdot(-i\underline{k}\underline{x}')^m$$

$$\underline{E}_\omega^{(sug)}(\underline{x}) = -v_f \cdot \hat{\underline{x}} \times \underline{B}_\omega^{(sug)}(\underline{x})$$

a gyorsulás miatt van ω^2!

$$m=0: \quad \underline{B}_\omega^{(ed,sug)} = \frac{\mu_0 v_f \omega^2}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\hat{\underline{x}} \times \underline{d}_\omega\right)$$

sugárzás csak gyorsuló töltésrendszerben lép fel!

$$\underline{E}_\omega^{(ed,sug)} = -\frac{\mu_0 v_f^2 \omega^2}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\hat{\underline{x}} \times \left(\hat{\underline{x}} \times \underline{d}_\omega\right) \qquad c \equiv v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

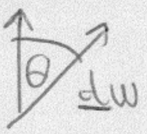
$\underline{E}_\omega \perp \underline{B}_\omega \perp \hat{\underline{x}}$

$$\overline{\underline{S}}_{\omega,ed} = \frac{v_f}{2\mu_0}\,\hat{\underline{x}}\cdot\left|\underline{B}_\omega^{(ed,sug)}\right|^2$$

1) $$\overline{P}^T = \int d\Omega\, r^2\, \hat{\underline{x}}\, \overline{\underline{S}}_\omega^T = \frac{\mu_0\omega^4}{32\pi^2 v_f}\int d\Omega\,|\hat{\underline{x}} \times \underline{d}_\omega|^2 \;\cancel{|\underline{d}_\omega|^2 \cdot \int d\Omega} = \frac{\mu_0\omega^4}{32\pi^2 v_f}|\underline{d}_\omega|^2\int d\Omega \sin^2\theta$$

(átlagos telj.) $\uparrow$ megfelelően nagy gömbfelületre $\int$-va, ami az egész töltésrendszert magába foglalja

$\hat{\underline{x}}$



$\Downarrow$

$$\bar{P}^{+} = \frac{\mu_0\omega^4}{\cancel{32}\pi^{\cancel{2}}\, \nu\varrho}\,|\underline{d}_\omega|^2 \cdot \frac{\cancel{8\pi}}{3} = \frac{\mu_0\omega^4}{12\pi\, \nu\varrho}\,|\underline{d}_\omega|^2$$

4

1) $m=1$: mágneses dipólsugárzás és elektromos kvadrupólsugárzás:

~~$j_\omega(\underline{x}')\cdot(\hat{\underline{x}}\,\underline{x}')$~~

$$\text{mn.: } \int d^3x'\, \underline{j}_\omega(\underline{x}')\cdot(\hat{\underline{x}}\cdot\underline{x}') \to \frac{1}{2}\int d^3x' \Big[\underbrace{\underline{j}_\omega(\underline{x}')\cdot(\hat{\underline{x}}\,\underline{x}') - \underline{x}'(\hat{\underline{x}}\,\underline{j}_\omega)}_{\hat{\underline{x}}\times(\underline{j}_\omega(\underline{x}')\times\underline{x}')}\Big] =$$

~~most~~ 2 részre bontjuk

a másik része a kvadrupólhoz lesz

a) mágn. dipól:

$$\underline{A}^{(sug)}_{\omega,md}(\underline{x}) = -\frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,\hat{\underline{x}} \times \frac{1}{2}\underbrace{\int d^3x' \left(\underline{x}' \times \underline{j}_\omega(\underline{x}')\right)}_{\underline{m}_\omega}$$

$$\underline{B}^{(md,sug)}_\omega = -\frac{k^2\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,\overbrace{\hat{\underline{x}}\times\left(\hat{\underline{x}}\times\underline{m}_\omega\right)}^{\hat{\underline{x}}(\hat{\underline{x}}\,\underline{m}_\omega)-\underline{m}_\omega}$$

$$\underline{E}^{(md,sug)}_\omega = \frac{\nu\varrho\, k^2\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,\hat{\underline{x}}\times\underline{m}_\omega \leftarrow \underline{E}_\omega = -\nu_\varrho\,\hat{\underline{x}}\times\underline{B}^{(sug)}_\omega(\underline{x})$$

hasonló az elektromos dipólra: $\underline{m}_\omega \to \underline{d}_\omega$

duális szimmetria $\to$ $\underline{E}^{(md)}_\omega \to \underline{B}^{(ed)}_\omega$

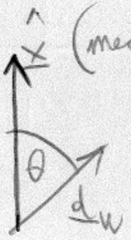
$\underline{B}^{(md)}_\omega \to \underline{E}^{(ed)}_\omega$

(az egyenletek szintjén is megfigyelhető ~~szerint~~
$\text{rot}\,\underline{H} = \ldots + \frac{\partial D}{\partial t}$ $\quad \text{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$)

↳ azért nincs teljes szimm., mert nincs mágneses monopólus

$$\bar{\underline{S}}^{T}_{\omega,md} = \frac{1}{2\mu_0 v_g}\left[\underline{E}^{(md)}_{\omega}(\underline{x}) \times \left(\hat{\underline{x}} \times \underline{E}^{*(md)}_{\omega}(\underline{x})\right)\right] = \frac{v_g \mu_0 k^4}{32\pi^2}\cdot\frac{1}{r^2}\left|\hat{\underline{x}}\times\underline{m}_\omega\right|^2 \hat{\underline{x}}$$

$$\bar{P}^{T} = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi v_g^3}\left|\underline{m}_\omega\right|^2$$


$\hat{\underline{x}}$ (megfigyelés iránya)

→ e dipól.-nál $\underline{E}_\omega$ benne van a síkban

b) elektromos kvadrupól

$$\frac{1}{2}\int d^3x' \left[\underline{j}_\omega(\hat{\underline{x}}\underline{x}') + \underline{x}'(\hat{\underline{x}}\underline{j}_\omega)\right]$$

msz: $0 = \int d^3\underline{x}' \left[f\, \partial_k g\, j_{\omega,k} + g\, \partial_k f \cdot j_{\omega,k} + f g \cdot i\omega \rho_\omega\right]$ ← k. komp.

$f = x'_l \qquad g = x'_j$

$$-i\omega \int d^3x' \cdot x'_l \cdot x'_j\, \rho_\omega = \int d^3x' \left(j_{\omega,j} \cdot x'_l + x'_j\, j_{\omega l}\right) \quad / \cdot \hat{x}_l$$

$$= -\frac{i\omega}{2}\int d^3x'\; \underline{x}'(\hat{\underline{x}}\underline{x}')\,\rho_\omega(\underline{x}')$$

$$\underline{A}^{(sug)}_{\omega,eq}(\underline{x}) = -\frac{\omega k \mu_0}{8\pi}\,\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x'\; \underline{x}'(\hat{\underline{x}}\underline{x}')\,\rho_\omega(\underline{x}')$$

$$Q_{\omega,\alpha\beta} = \int d^3x' \, \rho_\omega(\underline{x}') \left(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} \underline{x}'^2 \right)$$

(kvadrupólmom. sugárzásra (ua, mint statikában))

$$Q_{\omega\alpha} = Q_{\omega,\alpha\beta} \cdot \hat{x}_\beta$$

$$\underline{\hat{x}} \times \underline{Q}_\omega(\hat{\underline{x}}) = 3 \underbrace{\int d^3x' \, \rho_\omega(\underline{x}') \cdot (\underline{\hat{x}} \times \underline{x}') \cdot (\underline{x}' \cdot \underline{\hat{x}})}_{= 3 \cdot \underline{\hat{x}} \times \int d^3x' \, \underline{x}' (\underline{\hat{x}} \underline{x}') \rho_\omega(\underline{x}')}$$

$\Downarrow$

$$\underline{B}^{(\text{sug})}_{\omega,eq}(\underline{x}) = -\frac{i\omega k^2 \mu_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{1}{3} \underline{\hat{x}} \times \underline{Q}_\omega(\underline{\hat{x}})$$

$$\frac{1}{2\mu_0} r^2 |\underline{B}_\omega|^2 \underline{\hat{x}} = \overline{\underline{S}_\omega}^T \quad \text{(ált. képlet)}$$

az el. kvadrupólmom. mértéke

$$\frac{d\overline{P_{eq}}^T}{d\Omega} = \frac{r^2 \omega^2 k^4 \mu_0}{1152\pi^2} \left| \underline{\hat{x}} \times \underline{Q}_\omega(\underline{\hat{x}}) \right|^2 \sim \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \frac{d\overline{P_{ed}}^T}{d\Omega}$$

ez már ω^6-al megy $(k^4 \sim \omega^4)$

Tetszőleges pályán mozgó ponttöltés elektromágneses tere

Liénard–Wiechert potenciál

$$\rho(\underline{x},t) = q\cdot\delta(\underline{x}-\underline{x}_0(t)) \qquad \underline{j}(\underline{x},t) = q\,\dot{\underline{x}}(t)\cdot\delta(\underline{x}-\underline{x}_0(t))$$

Lorentz-mérték $\quad \Phi(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\int dt'\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,\delta^{(3)}(\underline{x}'-\underline{x}_0(t'))\,\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)$

$\downarrow$

most úgy nem végezzük el a ~~retardált~~ Green-fv δ-ját ~~(most)~~

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}\,\delta\left(\cancel{t}-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}{c}\right)$$

$\uparrow$

azt akarjuk nézni, ~~amikor~~ ~~$\left(t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}{c}\right)$~~ amikor $t = t'+\frac{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}{c}$

$$f(t) = t'-t+\frac{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}{c}$$

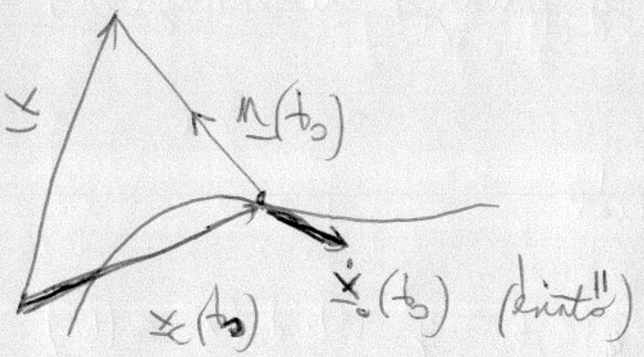
$\delta(f(t)) = ?$ $\leftarrow$ nem tudjuk az $\underline{x}_0(t')$ trajektóriát

$$f(t') = 0 + \left.\frac{df}{dt'}\right|_{t'=t_0}(t-t_0)$$

$\Downarrow$

$$\delta(f(t)) = \frac{1}{\left|\frac{df}{dt'}\right|_{t_0}}\,\delta(t'-t_0) \Rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_0)|}\,\frac{1}{\left|\frac{df}{dt'}\right|_{t_0}} = \phi(\underline{x},t)$$

$$f(t') = t'-t+\frac{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}{c} \rightarrow \left.\frac{df}{dt'}\right|_{t_0} = 1+\frac{1}{c}\,\frac{\underline{x}-\underline{x}_0(t_0)}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_0)|}\left(-\dot{\underline{x}}_0(t_0)\right)$$



$$\Downarrow$$

$$\underline{n}(t_0) = \frac{\underline{x}-\underline{x}_0(t_0)}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_0)|} \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = 1 + \frac{1}{c}\frac{\underline{x}-\underline{x}_0(t_0)}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_0)|}\cdot(-\dot{\underline{x}}_0(t_0)) = 1 - \frac{\underline{n}(t_0)\cdot\dot{\underline{x}}_0(t_0)}{c}$$

$$\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_0)|}\cdot\frac{1}{1-\frac{\underline{n}(t_0)\dot{\underline{x}}_0(t_0)}{c}}$$

- $\underline{j}(\underline{x},t) = q\dot{\underline{x}}(t)\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0(t))$

$$\Downarrow$$

$\underline{A}(\underline{x},t)$ analóg módon: $\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\dot{\underline{x}}_0(t_0)\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_0)|}\cdot\frac{1}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}} =$

$$= \frac{1}{c^2}\cdot\dot{\underline{x}}_0(t_0)\,\phi(\underline{x},t)$$

$$\underline{E}(\underline{x},t) = -\nabla\phi(\underline{x},t) - \dot{\underline{A}} = \overbrace{-\frac{1}{c^2}\left[\ddot{\underline{x}}_0(t_0)\frac{dt_0}{dt}\phi(\underline{x},t) + \dot{\underline{x}}_0(t_0)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t_0}\cdot\frac{dt_0}{dt}\right]}^{-\dot{\underline{A}}}$$

$$-\nabla_x\phi(\underline{x},t)$$

ϕ explicite csak t_0-tól függ

mellékszámítások)

Legyen: $R(t_0) := r(t_0)\cdot\left(1 - \frac{\underline{n}(t_0)\,\underline{\dot{x}}_0(t_0)}{c}\right)$

$$r(t_0) := |\underline{x} - \underline{x}_0(t_0)| \qquad \underline{r}(t_0) := \underline{x} - \underline{x}_0(t_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(\underline{x}, t_0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R(t_0)}$$

$$-\nabla_x \phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2(t_0)}\nabla_x R(t_0)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t_0} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2(t_0)}\cdot\frac{\partial R}{\partial t_0}$$

$$\frac{dt_0}{dt} \to \frac{dr}{dt} = \frac{dt_0}{dt}\cdot\frac{dr}{dt_0} = c\left(1 - \frac{dt_0}{dt}\right) \qquad r = c\cdot(t - t_0)$$

$$\frac{d\underline{r}}{dt_0} = \frac{d(\underline{n}\,r(t_0))}{dt_0} = \qquad \cancel{\underline{r}(t_0) = \underline{x} - \underline{x}}$$

$$= \frac{d\underline{n}}{dt_0}\cdot r + \underline{n}\cdot\underbrace{\frac{dr}{dt_0}}_{-\dot{x}_0(t_0)} = \frac{d\underline{n}}{dt_0} r - \underline{n}\,\underline{\dot{x}}_0(t_0)$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}}{r}$$

$$\frac{d\underline{n}(t_0)}{dt_0} = \frac{d\underline{r}}{dt_0}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\cdot\underline{r}\cdot\frac{dr}{dt_0} = -\underline{\dot{x}}_0\frac{1}{r} - \frac{\underline{n}}{r}\frac{dr}{dt_0}$$

$$\frac{d\underline{r}}{dt_0} = \left(-\underline{\dot{x}}_0\frac{1}{r} - \frac{\underline{n}}{r}\frac{dr}{dt_0}\right)\cdot r - \underline{n}\,\underline{\dot{x}}_0(t_0) \to \frac{dr}{dt_0} = -\underline{n}\cdot\underline{\dot{x}}_0(t_0)$$

$$\frac{dr}{dt_0} + \widehat{\underline{n}\cdot\underline{n}}\cdot\frac{dr}{dt_0} = -\underline{n}\,\underline{\dot{x}}_0(t_0) - n\,\underline{\dot{x}}_0(t_0)$$

1. óra

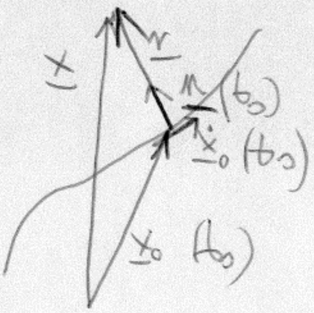
Liénard-Wiechert-potenciál (ism)

1) $t_0 = t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}_0(t_0)|}{c}$ → t_0 időben indult a sug. a sugárzó, pályán mozgó testből.

$\dot{\underline{x}}_0(t_0)$ → t_0 szerinti derivált

$\frac{d}{dt_0}x_0 = \dot{x}_0$

$\underline{r} = \underline{x} - \underline{x}_0(t_0)$ $\quad \underline{n}(t_0) = \frac{\underline{r}(t_0)}{r(t_0)}$ $\quad r = |\underline{x} - \underline{x}_0(t_0)| = c(t - t_0)$



$R := r\left(1 - \frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)_{t_0} = r - \frac{\underline{r}\dot{\underline{x}}_0}{c}\Big|_{t_0}$

$\phi(\underline{x}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R(t_0)}$, $\quad \underline{A}(\underline{x}, t) = \frac{1}{c^2}\dot{\underline{x}}_0(t_0)\,\phi(\underline{x}, t)$

$\underline{E}(\underline{x}, t) = -\nabla_x \phi(\underline{x}, t) - \frac{1}{c^2}\left(\ddot{\underline{x}}_0\phi + \dot{\underline{x}}_0\frac{d\phi}{dt_0}\right)\frac{dt_0}{dt}$

mn:

$\frac{dr}{dt} = c\left(1 - \frac{dt_0}{dt}\right) = \frac{dr}{dt_0} \cdot \frac{dt_0}{dt}$

$\frac{dr}{dt_0} = \frac{d(\underline{n}\underline{r})}{dt_0} = \underbrace{\frac{d\underline{n}}{dt_0}\underline{r} - \underline{n}\dot{\underline{x}}_0}_{= -2\underline{n}\dot{\underline{x}}_0 - \frac{dr}{dt_0}}$ $\quad \frac{d\underline{n}}{dt_0} = \frac{d}{dt_0}\frac{\underline{x} - \underline{x}_0}{|\underline{x} - \underline{x}_0|} = -\dot{\underline{x}}_0\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt_0}\cancel{\left(\underline{r} = -\underline{n}\dot{\underline{x}}_0 - \frac{dr}{dt_0} - \underline{n}\dot{\underline{x}}_0\right)}$

$\frac{dr}{dt_0} = -\underline{n}\dot{\underline{x}}_0$

$\Rightarrow \frac{dt_0}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}}$ $\Big|$ $\frac{dr}{dt_0} = -\underline{n}\dot{\underline{x}}_0$

$\frac{d\phi}{dt_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R^2}\right)\frac{dR}{dt_0}$

$$\frac{dR}{dt_0}=\frac{dr}{dt_0}-\frac{1}{c}\,\frac{dr}{dt_0}\cdot\dot{\underline{x}}_0-\frac{\underline{r}}{c}\ddot{\underline{x}}_0=-\underline{n}\,\dot{\underline{x}}_0+\frac{1}{c}\cdot\dot{\underline{x}}_0^{\,2}-\frac{\underline{r}\,\ddot{\underline{x}}_0}{c}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d\phi}{dt_0}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2}\left(\underline{n}\,\dot{\underline{x}}_0+\frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^{\,2}-\frac{\underline{r}\,\ddot{\underline{x}}_0}{c}\right)$$

$$\frac{dR}{dt_0}=-\underline{n}\,\dot{\underline{x}}_0+\frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^{\,2}-\frac{\underline{r}\,\ddot{\underline{x}}_0}{c}$$

$$-\nabla_x\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2}\,\underline{\nabla_x}R$$

$$\underline{\nabla_x}R=\underline{n}-\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}+\frac{dR}{dt_0}\cdot\nabla_x t_0$$

R közvetlenül ($\underline{x}$) és közvetve (t_0) is függ $\underline{x}$-től

$$\nabla_x r=-c\nabla_x t_0=\underline{n}+\frac{dr}{dt_0}\cdot\nabla_x t_0$$

$$\nabla_x t_0=-\frac{\underline{n}}{c}\cdot\frac{1}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}}$$

$$\underline{E}(\underline{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2}\left[\underline{n}-\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\underbrace{-\frac{1}{c}\frac{\underline{n}}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}}}_{\nabla_x t_0}\left(-\underline{n}\dot{\underline{x}}_0+\frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^{\,2}-\frac{\underline{r}\,\ddot{\underline{x}}_0}{c}\right)\right]-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}}$$

$$\cdot\frac{1}{c^2}\left[\ddot{\underline{x}}_0\frac{1}{R}-\frac{\dot{\underline{x}}_0}{R^2}\left(-\underline{n}\dot{\underline{x}}_0+\frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^{\,2}-\frac{\underline{r}\,\ddot{\underline{x}}_0}{c}\right)\right]$$

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}}\left[-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{R}\ddot{\underline{x}}_0 - \frac{1}{c^3R^2}\,\dot{\underline{x}}_0(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0) + \frac{1}{c^2R^2}\underline{n}(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0)\right]}_{(***)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2\left(1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)}\left(-\frac{1}{c^2}\underline{n}\dot{\underline{x}}_0^2 + \frac{1}{c^3}\cdot\dot{\underline{x}}_0\cdot\dot{\underline{x}}_0^2\right)}_{(**)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}} - \frac{\dot{\underline{x}}_0(\underline{n}\dot{\underline{x}}_0)}{c^2\left(1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)}\right]}_{(*)}$$

Msz.:

$$\frac{(*)}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}} = \left(\underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)\left(1 + \frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c\left(1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)}\right) = \left(\underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)\frac{1}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}} = -\frac{\dot{x}_0^2}{c^2}\left(\underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)$$

$$\underline{R} = \underline{r}\left(1 - \frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)$$

$$\underline{n}\,\underline{R} = R$$

$$R = r\,\underline{n}\left(\underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)\Big|_{t_0} = \underline{n}\,\underline{R} \qquad R = r\left(\overset{\underline{n}^2}{1} - \frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)_{t_0}$$

$$\underline{R} = r\left(\underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)$$

$$\hat{\underline{R}} := \frac{\underline{R}}{R}\ (\text{egységvektor}) = \frac{r\left(\underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)}{r\left(1 - \frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)}$$

$$(*) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\frac{\underline{R}}{R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\underline{R}}{R^3}$$

$$(**)\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2}\,\frac{\underline{R}}{R}\cdot\left(-\frac{\dot{x}_0^2}{c^2}\right)$$

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\underline{\hat{R}}}{R^2}\left(1-\frac{\dot{\underline{x}}_0^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2 R^2}\,\underline{r}\times\left(\underline{\hat{R}}\times\ddot{\underline{x}}_0\right)\right]$$

$$\sim\frac{1}{R^2} \qquad\qquad \sim\frac{1}{R}$$

(***)

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{r}{r\left(1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)}\left[\;\dots\;\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[-\frac{1}{c^2}\frac{r}{R}\ddot{\underline{x}}_0 + \frac{r}{c^2R^2}\left(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0\right)\left(\underline{n}-\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2 c^2}\underbrace{\left[-r\ddot{\underline{x}}_0 + \left(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0\right)\underline{\hat{R}}\right]}_{\underline{r}\times\left(\underline{\hat{R}}\times\ddot{\underline{x}}_0\right)}$$

$$\cancel{\left(\frac{R}{R} = \frac{r(\;)}{r(\;)}\right)}$$

$$\underline{r}\,\underline{\hat{R}} = \underbrace{\underline{r}\,\underline{R}}_{rR}\cdot\frac{1}{R} = r$$

$$\underline{E}_{sug}(\underline{x},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi R^2}\,\underline{r}\times\left(\underline{\hat{R}}\times\ddot{\underline{x}}_0\right) \qquad \underline{n}\cdot\underline{E}_{sug} = 0$$

$$B_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\left(\frac{1}{c^2}\cdot\dot{x}_{0_k}\phi\right) = \frac{1}{c^2}\varepsilon_{ijk}\left(\ddot{x}_{0k}\,\phi\,\partial_j t_0 + \dot{x}_0\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)$$

$$\underline{B}^{(sug)} = -\frac{\mu_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{R^2}\left[\underline{n}\times\ddot{\underline{x}}_0 + \left(\underline{n}\times\dot{\underline{x}}_0\right)\cdot\frac{r}{cR}\left(\underline{n}\ddot{\underline{x}}_0\right)\right]$$

$$\underline{B}^{(sug)} = \frac{1}{c}\,\underline{n}\times\underline{E}^{(sug)}$$

2) Teljesítmény:

$$\underline{S}^{(x,t)} = \frac{1}{\mu_0}\left(\underline{E}^{sug}\times\underline{B}^{sug}\right) = \frac{1}{\mu_0 c}\cdot\underline{n}(t_0)\,\underline{E}^{sug}(\underline{x},t)^2 = \frac{1}{\mu_0\cdot c}\,\underline{n}\cdot\frac{\mu_0^2 q^2}{16\pi^2 R^4}\cdot$$

$$\cdot\left[\underline{\hat{R}}\left(\underline{r}\ddot{\underline{x}}\right) - \ddot{\underline{x}}_0\, r\right]^2$$

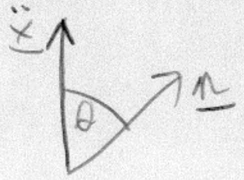
a) nemrelativisztikus határeset: $\frac{|\dot{x}_0|}{c} \ll 1$

$R \approx r$

$\Downarrow$

$$\underline{S}(\underline{x},t) = \frac{1}{\mu_0 c}\,\underline{n}\,\frac{\mu_0^2 q^2}{16\pi^2 r^4}\Big[\underbrace{(\underline{r}\,\ddot{\underline{x}}_0)^2 - 2(\ddot{\underline{x}}_0\,\underline{r})^2 + r^2\ddot{x}_0^2}_{r^2\ddot{x}_0^2 - (\underline{r}\,\ddot{\underline{x}}_0)^2}\Big] =$$

$$\underline{S}^{nemrel}(\underline{x},t) = \underline{n}\,\frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c\, r^{\cancel{4}\,2}}\,\cancel{r^2}\left(\ddot{x}_0^2 - (\underline{n}\,\ddot{\underline{x}}_0)^2\right)$$



$$\oint \underline{S}\,\underline{n}\,d\Omega\,r^2 = \frac{\varepsilon_0\mu_0 q^2}{\varepsilon_0 16\pi^2 c}\,\ddot{x}_0^2\underbrace{\int d\Omega\,(1-\cos^2\theta)}_{\frac{8\pi}{3}} =$$

óriás gömbfelületre vett ∫

$$= \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,\ddot{x}_0^2(t_0)$$

(pillanatnyi teljesítmény)

Larmor-képlet

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2\,\ddot{x}_0^2}{16\pi^2 c^3}\sin^2\theta$$

b) Speciális relativisztikus mozgások:

$\underline{\beta} = \frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0$, $\dot{\underline{\beta}} = \frac{\ddot{\underline{x}}_0}{c}$, $\underline{R} = r(\underline{n}-\underline{\beta})$, $R = r(1-\underline{n}\,\underline{\beta})$

$$\hat{\underline{R}} = \frac{\underline{n}-\underline{\beta}}{1-\underline{n}\,\underline{\beta}}$$

$$\underline{E}^{sug} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot c^2 r}\cdot\frac{1}{(1-\underline{n}\,\underline{\beta})^2}\,\underline{n}\times\left(\frac{\underline{n}-\underline{\beta}}{1-\underline{n}\,\underline{\beta}}\times c\,\dot{\underline{\beta}}\right)$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left|\underline{S}\right| = \frac{1}{c^2} \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2} \frac{1}{(1-\underline{n}\underline{\beta})^6} \left[\underline{n} \times \left((\underline{n}-\underline{\beta}) \times \dot{\underline{\beta}}\right)\right]^2 \Bigg|_{t_0}$$

↓ ez egy pillanatra van véve

↑ ez a retardált pillanatban kisugárzott telj.

$t_0 \in (T_1, T_2)$ emisszió

$t = \left(T_1 + \frac{r(T_1)}{c}, T_2 + \frac{r(T_2)}{c}\right)$ észlelés

$$\mathcal{E}(T_1, T_2, \text{emittált}) = \int_{T_1 + \frac{r(T_1)}{c}}^{T_2 + \frac{r(T_2)}{c}} dt \; r^2 \left|\underline{S}\right| = \to \text{ a nem retardált időben detektált telj.}$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} dt_0 \frac{dt}{dt_0} r^2 \left|\underline{S}\right|_{t_0} = \int_{T_1}^{T_2} dt_0 \frac{1}{(1-\underline{n}\underline{\beta})^5} \cdot \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \cdot c^2} \left(\underline{n} \times \left((\underline{n}-\underline{\beta}) \times \dot{\underline{\beta}}\right)\right)^2$$

– Lineáris gyorsító: $\dot{\underline{\beta}} \parallel \underline{\beta}$

⇓

$\underline{\beta} \times \dot{\underline{\beta}} = 0 \to \underline{n} \times (\underline{n} \times \dot{\underline{\beta}}) - n \quad (n\dot{\beta})^2$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{T_1}^{T_2} dt_0 \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^5} \cdot \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^2} \dot{\beta}^2 \underbrace{(1-\cos^2\theta)}_{\sin^2\theta}$$

$$\frac{\sin^2}{(1-\beta\cos\theta)^5}\Bigg|_{\theta=\theta_{max}} \to \theta_{max} \approx \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}$$

↓

egyre jobban előre sugároz a részecske, amint $\beta \to 1$ $(v \to c)$

19. óra

jún. 26. (kedd) helyett jún. 25. (hétfő)

o) Ism.:

$\underline{x}_0(t)$ sugárzás $\sim 1/R$ térerősség járuléka

$$\underline{E}_{sug}(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c\, r\, (1-\underline{n}\underline{\beta})^3}\,\underline{n}\times\left[(\underline{n}-\underline{\beta})\times\dot{\underline{\beta}}\right]\Big|_{t_0}$$

$\underline{n}(t_0)$

$$r(t_0) = |\underline{x}-\underline{x}_0(t_0)| \qquad \underline{\beta}(t_0) = \frac{\dot{\underline{x}}_0(t_0)}{c}$$

$$\underline{S}_{sug}(\underline{x},t) = \frac{1}{\mu_0 c}\,\underline{n}(t_0)\,\underline{E}^2(\underline{x},t)$$

– nem-relativisztikus határeset $|\underline{\beta}| \ll 1$

$$E^{nem\text{-}rel}_{sug} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,\underline{n}\times(\underline{n}\times\dot{\underline{\beta}})\Big|_{t_0}$$

leadott energia

$$\mathcal{E}\Big(\underbrace{t_1+\frac{R(t_1)}{c}}_{\tau_1},\ \underbrace{t_2+\frac{R(t_2)}{c}}_{\tau_2}\Big) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt_0\, r^2\,\underline{n}(t_0)\,\underline{S}_{sug}(\underline{x},t)$$

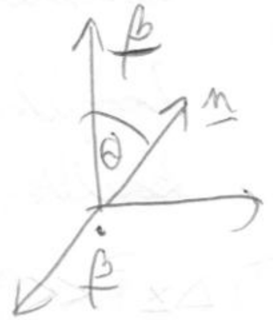
$$P(t) = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,\ddot{\underline{x}}_0^2(t_0)$$

– relativisztikus hatások

• lin. mozgás: $\underline{\beta} \parallel \dot{\underline{\beta}}$

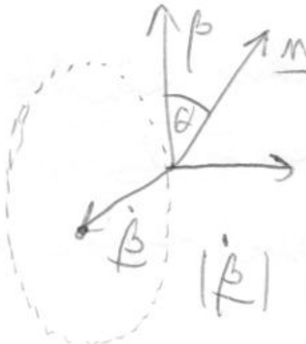
$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \frac{1}{(1-\underline{n}\underline{\beta})^5} \left(\underline{n} \times (\underline{n} \times \dot{\underline{\beta}})\right)^2 \approx \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \frac{\sin^2\theta(t_0)}{(1-\beta\cos\theta(t_0))^5}$$

ha $|\dot{\underline{\beta}}|$ nem változik



$\theta_{max} \sim \sqrt{1-\beta^2}$ ha $\beta \to 1$, $\underline{\beta} \parallel \underline{n}$ → előrefelé sugároz

• körmozgás, szinkrotron

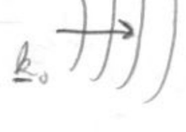


$|\dot{\underline{\beta}}|$ nem változik (feltevés)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} \approx \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 \cdot c} \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \left[\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3} + \frac{(\beta^2-1)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{(1-\beta\cos\theta)^5}\right]$$

1) Thomson-szórás (e.m. hullám szóródása szabad nem-rel. töltésen)

$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad \underline{k}_0 = k_0 \underline{n}_0 \quad \underline{e}_0 \underline{n}_0 = 0$



$$\underline{E}_{be}(\underline{x}, t) = \underline{e}_0 E_0 \cdot e^{i(\underline{k}_0 \underline{x} - \omega t)}$$

$$\underline{B}_{be}(\underline{x}, t) = \frac{1}{c} \underline{n}_0 \times \underline{E}_{be}$$

$$m\dot{\underline{v}} = q \underline{E}_{be}(\underline{x}, t)$$

$$\dot{\beta} = \frac{q}{mc} \underline{e}_0 E_0 e^{i(\underline{k}_0 \underline{x} - \omega t)}$$

határeset: hosszúhullámú közelítés

$|\Delta \underline{x}| \ll \lambda$

megfigyelés iránya (θ: szórás szöge)

A töltés mozogni fog → sugárzás

$$\underline{E}_{szórt} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot c} \cdot \frac{\underline{n} \times (\underline{n} \times \dot{\underline{\beta}})}{r}$$

$\dot{\beta} \propto e^{i(\underline{k}_0 \underline{x} - \omega t)}$ → klasszikus közelítésben a beérkező hullám frekvenciájával sugároz ki a töltés

$$\overline{\frac{dP_{sug}}{d\Omega}}^{T} = \frac{1}{\mu_0 c} \cdot r^2 \left| \underline{E}_{szórt}(\underline{x}, t) \right|^2$$

← időátlag

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^2} \cdot \frac{q^2}{m^2 c^2} \cdot E_0^2 \cdot \frac{1}{2} \left[\underline{n} \times (\underline{n} \times \underline{e}_0) \right]^2$$

$$= \frac{q^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 m^2 c^3} E_0^2 \left(1 - (\underline{n}\,\underline{e}_0)^2\right)$$

mx.: $\underline{n}\,\underline{e}_0 = \sin\theta \cdot \cos\varphi$

hatáskeresztmetszet: (független a bejövő sug.-tól)

$$\frac{1}{\overline{P_{be}}^{T}} \overline{\frac{dP_{szórt}}{d\Omega}}^{T} = \frac{d\sigma}{d\Omega}_{Th} = \frac{q^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^4 m^2} \left(1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi\right)$$

Thomson

$$\overline{P_{be}}^{T} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{Th}^{teljes} = \underbrace{\int d\Omega \left(1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi\right)}_{\frac{8\pi}{3}} \left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}\right)^2$$

$$r_0 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}$$ (hosszúság dim.jú, mert σ m^2 dim.jú)

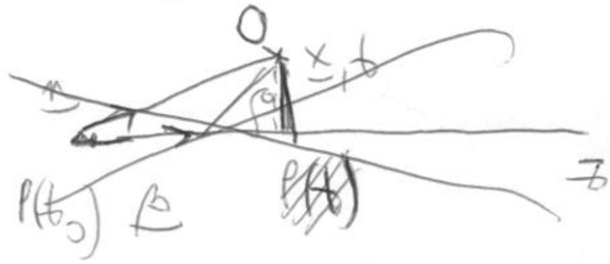
$$r_0 = \frac{\alpha_q}{m \cdot c^2}$$ $q - e$, $m - m_e$

klasszikus elektronsugár

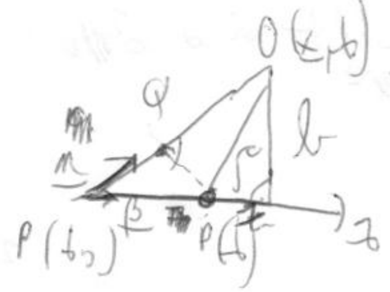
$$t_0 = t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}_0(t_0)|}{c}$$ (ha lassan mozog a rész., $\underline{x}_0(t_0) \approx \underline{x}_0(t)$)

$$t_0 \approx t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}_0(t)|}{c}$$

2) Relativisztikus egyenes vonalú egyenletes mozgást végző töltés tere



$$\overline{OP(t_0)} = r = c(t-t_0)$$



$$\overline{P(t_0)P(t)} = v(t-t_0) = \beta \cdot r$$

$$\overline{P(t_0)Q} = \underline{\beta}\underline{n}\,\beta r = \beta n\, \underline{r}$$

$$\overline{QO} = r - \underline{\beta}\,\underline{n}\, r = r(1-\beta n) \equiv R = \sqrt{\rho^2 - \beta^2 b^2}$$

l. Liénard–Wiechert pot.

$$\phi(x,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R(t_0)}$$

$$\overline{QP(t)}^2 = \rho^2 - R^2 \quad \text{másrészt}$$

$$\overline{QP(t)}^2 = (\beta r)^2 - r^2(\beta n)^2 = \beta^2 r^2 \overbrace{(1-\cos^2\theta)}^{\sin^2\theta} = \beta^2 b^2$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2-\beta^2 b^2}} = \phi(x,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R(t_0)}$$

A rész. koord.-ja a z tengely mentén $= z$.

$$\rho^2 = z^2 + b^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+(1-\beta^2)b^2}} = \phi(x,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2+\frac{z^2}{1-\beta^2}}}$$

$$q_{trans} = \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad I_{tr} = \frac{I}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

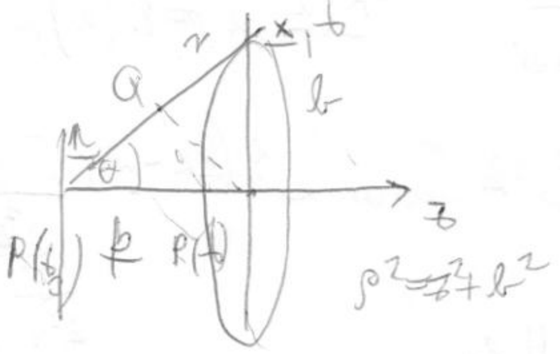
$\downarrow$

csak ilyen ~~trafó~~ mentén $\sqrt{\ }$ változás
nincsen

ekvipot. felületek

$$\underline{b}^2 + \frac{z^2}{1-\beta^2} = \text{áll} \quad \text{ellipszoid}$$

$\downarrow$ látható kép



összenyomódott kép

3) Cserenkov-sugárzás: ε, μ (anyagban halad a töltés)

$$v_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu}}$$

Lorentz-mérték
$\hookrightarrow$ hullámegyenlet
$\downarrow$
Fourier-trafó

$$\left(\varepsilon(\omega)\mu\,\omega^2 - \underline{k}^2\right)\begin{pmatrix}\Phi(\underline{k},\omega)\\ \underline{A}(\underline{k},\omega)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon(\omega)}\,\rho(\underline{k},\omega)\\ \mu\underline{j}(\underline{k},\omega)\end{pmatrix}$$

$$f(\underline{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k \int d\omega\; e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}\, f(\underline{k},\omega)$$

$$\rho(\underline{x},t) = Q\cdot\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{v}_0 t) = \frac{Q}{(2\pi)^3}\int d^3k\; e^{i(\underline{k}\underline{x}-\underline{k}\underline{v}_0 t)} =$$

$$\underbrace{\int d\omega\, \delta(\omega-\underline{k}\underline{v}_0)}_{1}$$

$$= \frac{Q}{(2\pi)^3}\int d^3k\int d\omega\; \delta(\omega-\underline{k}\underline{v}_0)\; e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}$$

$$\rho(\omega,\underline{k}) = \frac{Q}{2\pi}\delta(\omega-\underline{k}\underline{v}_0)$$

$$\underline{j}(\underline{k},\omega) = \underline{v}_0\,\rho(\underline{k},\omega)$$

$$\phi(\underline{k},\omega) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon(\omega)}\frac{\delta(\omega-\underline{k}\underline{v}_0)}{\underline{k}^2-\varepsilon(\omega)\mu\omega^2} \qquad \underline{A}(\underline{k},\omega) = \varepsilon(\omega)\mu\,\underline{v}_0\,\phi(\underline{k},\omega)$$

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{Q\mu}{2\pi}\underline{v}_0\frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\int d^3k\int d\omega\; e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}\frac{\delta(\omega-\underline{k}\underline{v}_0)}{\underline{k}^2-\varepsilon(\omega)\mu\omega^2} \circledast$$

$$k_x^2+\underline{k}_\perp^2-\varepsilon(k_x v_0)\cdot\mu\, k_x^2 v_0^2$$

msz.: $\underline{v}_0 \parallel \underline{e}_x$

$$k_x^2+k_\perp^2-\varepsilon(k_x v_0)\mu\, k_x^2 v_0^2 = k_x^2(1-\beta^2(k_x v_0))+\underline{k}_\perp^2$$

$$\left(\frac{v_0^2}{v_f^2}\right)$$

$$v_f^2 = \frac{1}{\varepsilon(v_0 k_x)\cdot\mu}$$

$$\circledast = \frac{Q\mu}{2\pi}\cdot\underline{v}_0\cdot\frac{1}{(2\pi)^2}\int dk_x\int d^2k_\perp\;\frac{1}{k_x^2(1-\beta^2)+k_\perp^2}\; e^{i(\underline{k}_\perp\cdot\underline{x}_\perp+k_x(x-v_0 t))}$$

Veszély!

- amíg $1>\beta^2 \rightarrow$ torzított coulomb potenciál

DE ha $\beta^2 > 1$ → nevező 0 lehet → szingularitás

$$(1-\beta^2) < 0$$

↓

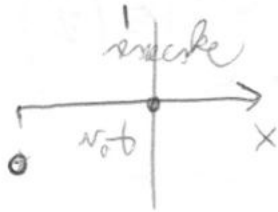
mi lesz ennek az értelme?

↳ kauzalitás

$x - v_0 t = \xi$ → $\xi > 0$ $(x > v_0 t)$: részecske előtt

↘ $\xi < 0$ $(x < v_0 t)$: részecske mögött

! $A(x, \underline{x}_\perp, t) := 0$ ha $\xi > 0$ (ne hagyja le a jel a részecskét)



$$\varepsilon(k_x v_0) \cdot \mu \cdot v_0^2 = \beta^2$$

$$\varepsilon(k_x v_0) = ?$$

↓

így nem tudjuk kiintegrálni

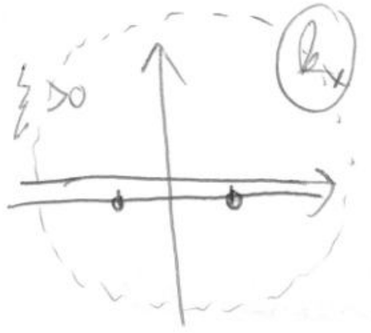
anyagmodell:

$\varepsilon(k_x v_0) \approx \varepsilon$ (nem függ k_x-től)

$$\underline{k}_\perp' = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \underline{k}_\perp \qquad d^2 k_\perp' = \frac{1}{\beta^2 - 1} d^2 k$$

$$\underline{A} = \frac{Q\mu}{2\pi} v_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_x \int d^2 k_\perp' \frac{1}{k_\perp'^2 - k_x^2} \cdot e^{i\left[\sqrt{\beta^2-1}\, \underline{k}_\perp' \underline{x}_\perp + k_x \xi\right]} = (*)$$

$$\circledast \overset{\xi > 0}{=} 0$$



$k_x \to k_x + i\varepsilon$: eltoljuk a pólust

$k_x + i\varepsilon = \pm |k_\perp'|$ ← így lesz 0 az integrál, ha $\xi > 0$

$\xi < 0$

msz.:
$$\oint_{C_a} dk_x \, e^{ik_x\xi}\left(\frac{1}{k_x+|k_\perp'|} - \frac{1}{k_x-|k_\perp'|}\right)\frac{1}{-2|k_\perp'|} =$$

$$= -2\pi i \frac{1}{-2|k_\perp'|}\left(e^{-i|k_\perp'|\cdot\xi} - e^{i|k_\perp'|\xi}\right)$$

20. óra

Cserenkov-sugárzás II

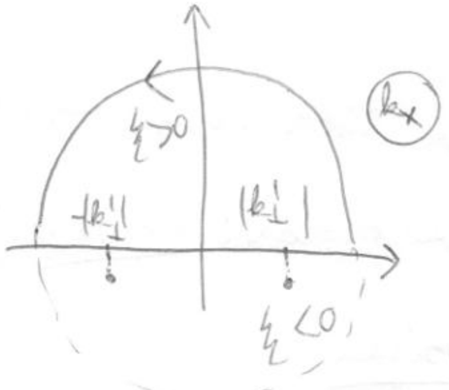
$$\rho(\underline{x},t) = Q\cdot\delta(\underline{x}-\underline{v}_0 t) \qquad v_0 > v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu}} \qquad \beta = \frac{v_0}{v_f\,(k_x v_0)} \simeq \text{áll}$$

$$\underline{A}(x,t) = \frac{\mu Q}{(2\pi)^3} v_0 \cdot \int d^2 k_\perp \int dk_x \frac{e^{i(\underline{k}_\perp \underline{x}_\perp + k_x(x - v_0 t))}}{\underline{k}_\perp^2 - k_x^2(\beta^2-1)} = \qquad k_\perp' = \underline{k}_\perp \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}$$

$$= \frac{\mu Q}{(2\pi)^3} v_0 \int d^2 k_\perp' \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \, e^{i\left(\sqrt{\beta^2-1}\, \underline{k}_\perp' \underline{x}_\perp + k_x\xi\right)}\left(\frac{-1}{2|\underline{k}_\perp'|}\right)\left(\frac{1}{|k_\perp'|+k_x} - \frac{1}{k_x-|k_\perp'|}\right)$$

$\xi = x - v_0 t$

$\underline{A}(x, \underline{x}_\perp, t)\Big|_{\xi>0} = 0$ → ha a részecske gyorsabban megy, mint v_0, a tér nem tudja megelőzni, ezért lesz a részecske előtt 0 a tér



gyök

$k_x = \pm|\underline{k}_\perp'| - i\varepsilon \qquad |\underline{k}_\perp'| = \rho$

$$\underline{A}(x, \underline{x}_\perp, t)_{\xi=0} = \frac{\mu Q i v_0}{2\cdot(2\pi)^2}\int_0^\infty dk_\perp' \left(e^{ik_\perp'\cdot\xi} - e^{-ik_\perp'\cdot\xi}\right)\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot e^{i\sqrt{\beta^2-1}\,k_\perp'\rho\cos\varphi}}_{2\pi\, j_0(\sqrt{\beta^2-1}\,k_\perp'\rho)} =$$

$$= \frac{\mu Q}{2\pi}\underline{v}_0\int_0^\infty dk_\perp' \sin k_\perp'\cdot|\xi|\cdot j_0(\sqrt{\beta^2-1}\cdot k_\perp'\rho) =$$

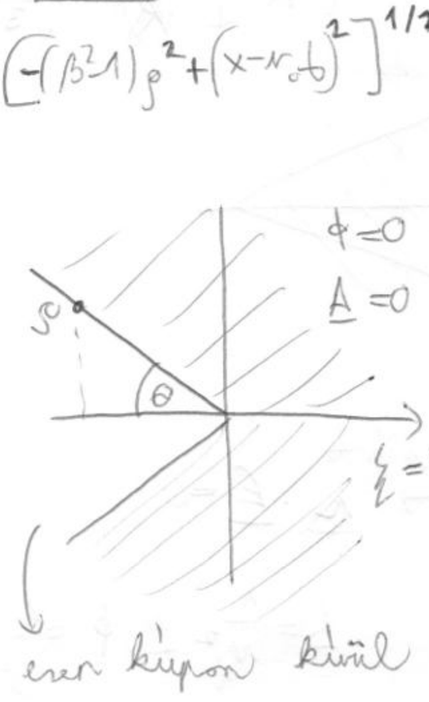
0. Bessel-fv.

most:

Most

$$\int_0^\infty dt\, j_0(at)\sin bt = \begin{cases} 0 & 0\le b<a \quad \sqrt{\beta^2-1}\cdot\rho > v_0t-x \\ (b^2-a^2)^{-1/2} & b>a>0 \quad \sqrt{\beta^2-1}\cdot\rho < v_0t-x \end{cases}$$

$$\frac{1}{\left[-(\beta^2-1)\rho^2+(x-v_0t)^2\right]^{1/2}}$$



$\phi=0$

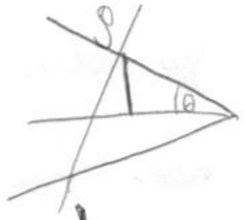
$\underline{A}=0$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{\rho}{v_0t-x} > \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}$ Mach-kúp

$\xi = x - v_0 t$

ha β nő, a kúp nyílásszöge összeszűkül

ezen kúpon kívül 0 az elektromos tér

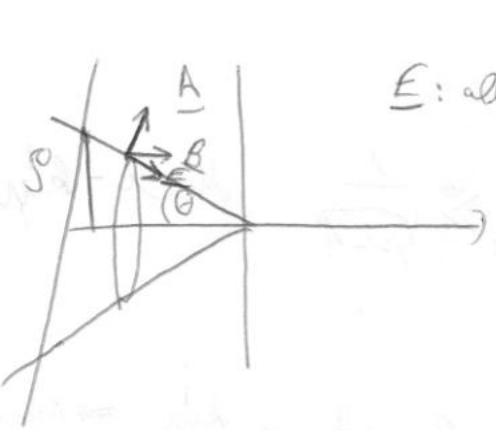


ha egy adott kúpszeleten mérünk teret, vissza tudjuk állítani a kúpot → meg tudjuk mondani, honnan jött a részecske és mekkora sebességgel

$$\underline{A}\left(|x-v_0 t| > |x_\perp'|\right) = \frac{\mu Q}{2\pi}\underline{v}_0 \frac{1}{\left\{\underbrace{\left[(\underline{x}-\underline{v}_0 t)^2-|\underline{x}_\perp'|^2\right]}_{R}(\beta^2-1)\right\}^{1/2}}$$

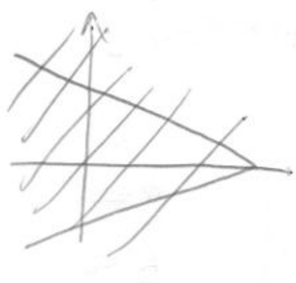
φ és $\underline{A}$ szingulárissá válik: ez amiatt van, hogy $\beta \approx$ áll.-t feltételeztünk → a felületnél valójában elmosódik az eredmény

$$\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A} = \underline{v}_0 \times \frac{\mu Q}{2\pi}\nabla\frac{1}{R} = -\frac{1}{v_\varphi^2}\underline{\beta}\times\nabla\phi \qquad \left(\nabla\frac{1}{R}\right)_\perp = \cancel{\frac{1}{R}}\frac{x_\perp}{R^3}(\beta^2-1)$$



$\underline{E}$: alkotó irányába mutat

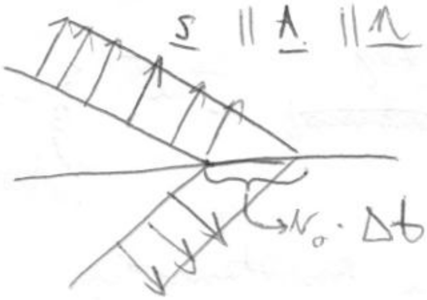
$\underline{B}$: a főkör érintője



$$\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}} = -\nabla\phi \overset{\beta\cdot}{+} (\underline{\beta}\nabla)\phi \xrightarrow{\text{próbáld}} \underline{n}\cdot\underline{E} = 0$$

$$\underline{B}\cdot\underline{E} = 0 \qquad \underline{A} = \frac{1}{v_\varphi^2}\underline{v}_0\phi = \frac{1}{v_\varphi^2}\underline{\beta}\phi$$

$\underline{S}_{palást} \sim \underline{n}$



$$|\underline{v}_{energia}| = v_0 \cdot \sin\theta = \frac{v_0}{\beta} = v_f$$

Sugárzási visszahatás a mozgásra

$$P_{Larmor} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \dot{\underline{v}}^2 \qquad \text{(Larmor-teljesítmény)}$$

$$\underline{F}_{sug}\underline{v} = P_{Larmor} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \left[\frac{d}{dt}(\underline{v}\dot{\underline{v}}) - \underline{v}\ddot{\underline{v}}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\underline{v}^2\right) = \underbrace{\underline{F}_{ext}}_{\text{külső erő}} \cdot \underline{v} - \underline{F}_{sug} \cdot \underline{v}$$

$$m\tau = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

$$\frac{d}{dt}\left[E_{kin} + m\tau \underbrace{\underline{v}\cdot\dot{\underline{v}}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2}\right] = \underline{F}_{ext}\cdot\underline{v} + m\tau\ddot{\underline{v}}\cdot\underline{v}$$

$$\frac{d}{dt}\left[E_{kin} + \tau\frac{dE_{kin}}{dt}\right] = (\underline{F}_{ext} + m\tau\ddot{\underline{v}})\underline{v} \qquad \left(\tau\left|\frac{dE_{kin}}{dt}\frac{1}{E_{kin}}\right| \lll 1\right)$$

• ha: $\tau \left| \frac{dE_{kin}}{dt} \frac{1}{E_{kin}} \right| << 1$

pl: elektronra

$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$ ↗ amíg a ~~átsugárzás~~ fény az e^- $\frac{2}{3}$-án végigmegy

$\tau = r_0 \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{c} \sim 10^{-23}$ s → ez a karakterisztikus idő, amihez képest nagynak kell lennie

$\frac{1}{\left| \frac{dE_{kin}}{dt} \frac{1}{E_{kin}} \right|}$-nak (az energia változási ~~ideje~~ ideje)

↓

ilyenkor $\frac{dE_{kin}}{dt}$ elhanyagolható

$\underline{F}_{sug} = -m\tau \underline{\ddot{v}}$ $\quad m\underline{\dot{v}} = \underline{F}_{ext} - \underline{F}_{sug}$

baj: öngyorsító elektron $\quad m(\underline{\dot{v}} - \tau \underline{\ddot{v}}) = \underline{F}_{ext}$

$\underline{F}_{ext} = 0 \quad \underline{\dot{v}}(t) = \dot{v}_0 e^{t/\tau}$ külső erő nélkül is gyorsul az e^-? → ez rossz

Másik alakban írjuk fel az egyenletet:

$\underline{\dot{v}}(t) = \underline{u}(t) e^{t/\tau}$

$\underline{\dot{v}} - \tau \underline{\ddot{v}} = -\tau e^{t/\tau} \underline{\dot{u}}$

$m\underline{\dot{u}} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \underline{F}_{ext}(t)$

$u(t) = -\frac{1}{m\tau} \int_{t_i}^{t} dt' \cdot e^{-t'/\tau} \cdot \underline{F}_{ext}(t')$

$$\underline{v}(t) = -\frac{1}{m\tau} e^{t/\tau} \int_{t_i}^{t} dt' \cdot e^{-t'/\tau} \cdot \underline{F}_{ext}(t')$$

$\downarrow$

ha $\underline{F}_{ext}=0$, $\underline{v}$ is $\neq 0$ $\rightarrow$ ezt a problémát kiküszöböltük,

viszont a rendszernek így memóriája van

$$s = \frac{t'-t}{\tau} \qquad ds = \frac{dt'}{\tau} \qquad m\underline{\dot{v}} = F_{ext}$$

$\downarrow$ lokálisan $(\tau \to 0)$ ezt vissza kell kapni!

$$\underline{\underline{\dot{v}(t)}} = -\frac{1}{m} \int_{s_i}^{0} ds\, e^{-s}\, \underline{F}_{ext}(t + s\tau)$$

$s_i := +\infty$

$$= \frac{1}{m} \int_0^\infty ds\, e^{-s} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \underline{F}_{ext}}{dt^n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot (s\tau)^n =$$

$$\int_0^\infty ds\, e^{-s} \cdot s^n = n!$$

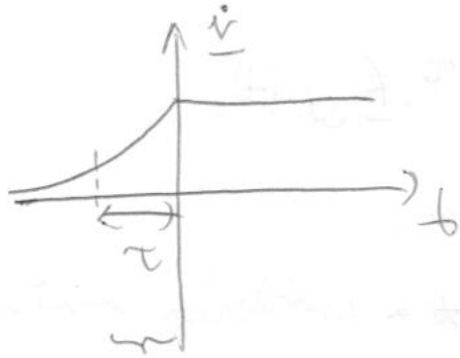
$\uparrow$ parc. int

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \underline{F}_{ext}}{dt^n} \cdot \tau^n \cdot \frac{1}{m} \xrightarrow[\tau \to 0]{} \underline{\underline{\frac{1}{m} \underline{F}_{ext}}}$$

$$m\underline{\dot{v}} = \int_0^\infty ds \cdot e^{-s} \cdot \underline{F}_{ext}(t + s\tau)$$

Akauzalitás (nem kauzalitás)

$$\underline{F}_{ext}(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \underline{F}_0 & t > 0 \end{cases}$$



ennyivel előbb kezd el játszani az erő

- $t>0$ $\quad m\dot{\underline{v}} = \underline{F}_0 \int_0^\infty ds\, e^{-s} = \underline{F}_0$
- $t<0$ de $-|t| + s\tau > 0 \quad s > \frac{|t|}{\tau}$

$$m\dot{\underline{v}} = \underline{F}_0 \int_{\frac{|t|}{\tau}}^\infty ds\, e^{-s} = \underline{F}_0 \cdot e^{-\frac{|t|}{\tau}} =$$

$$= \underline{F}_0 \cdot e^{t/\tau}$$

↓

ennek az akauzalitásnak az oka, hogy ilyen mérettartományban (10^{-20} s) már nem a Newton-egyenletek, hanem a kvantummechanika írja le a világot.

Töltött részecskék gyorsításánál ezek a képletek jól használhatóak → a részecske nem csak gyorsul, a sugárzás miatt lassul is

Természetes vonalszélesség: harmonikus oszcillátorra

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \int_0^\infty ds\, e^{-s} x(t+s\tau) \qquad \underline{F}_{ext} = -m\omega_0^2 x$$

(mozgásegyenlet)

↳ Vajon ω_0 tényleg frekivel fog-e mozogni, vagy a sugárzás miatt megváltozik a freki?

$x(t) = x_0 e^{-\alpha t}$

$\alpha^2 \cancel{x_0} \cancel{e^{-\alpha t}} = -w_0^2 \cancel{x_0} \cancel{e^{-\alpha t}} \cdot \frac{1}{1+\alpha\tau}$

mivi $\int_0^\infty ds\, e^{-s(1+\alpha\tau)}$ ha $\mathrm{Re}(1+\alpha\tau) > 0$ $\rightarrow$ elvégezhető az int.

$\rightarrow \alpha^3 \tau + \alpha^2 + w_0^2 = 0$

- $\tau = 0 \quad \alpha = \pm i w_0 \rightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{\pm i w_0 t}$ $\checkmark$ (szokásos megoldás)
- τ kicsi

$\alpha^3 \tau \cong -w_0^2 \alpha \tau$ $\rightarrow$ gyökvesztés: csak azokat a gyököket tartom meg, melyek közel vannak az $\alpha = \pm i w_0$ megoldáshoz

$\alpha^2 + w_0^2 (1 - \alpha t) = 0$

$\alpha = \frac{1}{2} w_0^2 \tau \pm i w_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4} w_0^2 \tau^2} \approx$

atomi szinten $w_0^2 \tau^2 \sim 10^{-10}$

$\approx \pm(i w_0 + \Delta w_0) + \frac{\Gamma}{2}$ $\qquad \Gamma = w_0^2 \tau$

$\Delta w_0 = -\frac{w_0^2 \tau}{2}$ klasszikus „Lamb-shift"

a sugárzási visszahatás miatt eltolódik a frekvencia

$x(t) = x_0 e^{-\Gamma/2\, t} e^{\pm i (w_0 + \Delta w_0) t}$

fékezési hatás (amplitúdócsökkenés) a kisugárzás miatt

$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{iwt} x(t) = \frac{x_0}{\alpha - i w}$

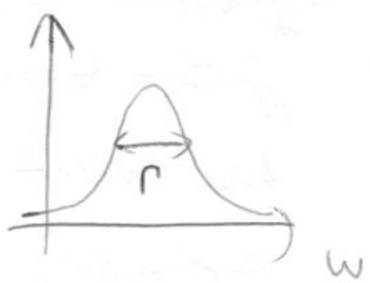
$q \cdot x(\omega) \rightarrow$ dipól ω komponense $(d(\omega))$

$$I(\omega) \sim \omega^4 |x(\omega)|^2 = \omega^4 d_0^2 \, \frac{1}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0 - \Delta\omega_0)^2}$$

(sugárzási teljesítmény)

nem csak ~~$(\omega_0 - \omega)$~~ ω_0 frekvencián sugároz ki (van csúcs), hanem

$$|\omega - \omega_0 - \Delta\omega_0| \lesssim \frac{\Gamma}{2} \text{ félszélességben}$$



$\downarrow$

vonalszélesség: ezt nem lehet kiküszöbölni

baj: ez olyan frekvenciafüggést ad a vonalszélességnek, amit az atomfizika nem igazol → kvantummech. számítás (de kvalitatíve jó a kép)

21. óra

Az elektromágneses anyag mozgásegyenlete

1) Abraham – Lorentz – modell – csak (e.m. erőhatás van):

$\underline{P}_{teljes} = \underline{P}_{e.m.}$ $\qquad \frac{d\underline{P}_{e.m.}}{dt} = 0 = \int d^3x \Big[\rho(\underline{x},t) \left(\underline{E}_{saját}(\underline{x},t) + \underline{E}_{külső}(\underline{x},t) \right) +$

$+ \underline{j}(\underline{x},t) \times \left(\underline{B}_{saját}(\underline{x},t) + \underline{B}_{külső}(\underline{x},t) \right) \Big]$

(külső erőhatás)

$$\frac{d\underline{P}_{mech}}{dt} = \int d^3x \left[\rho(\underline{x},t)\, \underline{E}_k(\underline{x},t) + \underline{j}(\underline{x},t) \times \underline{B}_k(\underline{x},t) \right] =$$

$$= -\int d^3x \left(\rho(\underline{x},t)\, \underline{E}_S(\underline{x},t) + \underline{j}(\underline{x},t) \times \underline{B}_S(\underline{x},t) \right) \qquad R = |\underline{x} - \underline{x}'|$$

$\underline{E}_S = -\dot{\underline{A}}_S - \underline{\nabla}\varphi_S \qquad \underline{B}_S = \underline{\nabla} \times \underline{A}_S$

$$\varphi_S(\underline{x},t) = \int d^3x' \, \frac{\rho(\underline{x}', t - \frac{R}{c})}{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\underline{A}_S(\underline{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\underline{j}(\underline{x}', t - \frac{R}{c})}{R}$$

Merev töltéseloszlás (modell):

→ $\underline{j}(\underline{x},t) = \underline{v}(t)\, \rho(\underline{x})$ ← időtől független töltéseloszlás

↑ az egész rendszer sebességének vesszük adott t-ben

→ pill. nyugalom

$\underline{v}(t) = 0 \leftrightarrow \underline{j}(\underline{x},t) = 0$ (de gyorsulhat!)

→ a rendszer méretével 0-hoz tartunk → az egymással való k.h. retardálódásban sorbafejthetünk $\left(t \sim t' = t - \frac{R}{c}\right)$

~~[illegible]~~ ($t'-t$ kicsi)

$$\frac{d\underline{P}_{mech}}{dt} = -\int d^3x\, \rho(\underline{x},t)\, \underline{E}_S(\underline{x},t) = \int d^3x\, \rho(\underline{x},t)\, \left(\underline{\nabla}\phi_S(\underline{x},t) + \underline{\dot{A}}_S(\underline{x},t)\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, c^n} \int d^3x\, \rho(\underline{x},t) \int d^3x' \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\rho(\underline{x}',t)\, \underline{\nabla}_x R^{n-1} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\, \underline{j}(\underline{x}',t)\, R^{n-1}\right]$$

$\frac{1}{R}$ miatt -1 a kitevőben, egyébként R^n lenne

ϕ sorfejtés: $n=0$ $\quad \underline{F}_\phi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x\, \rho(\underline{x},t) \int d^3x'\, \rho(\underline{x}',t)\, \underline{\nabla}_x \frac{1}{R} \overset{\text{a merevség miatt}}{=} 0$ (ha lenne lehetséges, elmozdulna a rendszer)

↳ a töltésrendszerben az egyik töltés által a másikra gyakorolt hatás

$$\underline{F}_\phi^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(-1)}{c} \cdot \int d^3x \cdot \rho(\underline{x},t) \cdot \int d^3x'\, \rho(\underline{x}',t)\, \underbrace{\underline{\nabla}_x R^0}_{0} = 0$$

$n' = n-2$

$n = n'+2 \qquad n' = 0, 1, \dots$

$$\frac{d\underline{P}_{mech}}{dt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n'}}{n'!\, c^{n'+2}} \cdot \int d^3x \int d^3x'\, \rho(\underline{x},t)\, R^{n'+1} \cdot \left[\underbrace{\frac{\partial^{n'+2}}{\partial t^{n'+2}} \rho(\underline{x}',t)}_{\frac{\partial^{n'+1}}{\partial t^{n'+1}}\left(-\underline{\nabla}_{x'}\, \underline{j}(\underline{x}',t)\right)} \cdot \right.$$

$n'! \to (n'+1)\cdot(n'+2)$

$$\left. \cdot \frac{\underline{\nabla}_x R^{n'+1}}{(n'+1)(n'+2)\, R^{n'-1}} + \frac{\partial^{n'+1}}{\partial t^{n'+1}}\, \underline{j}(\underline{x}',t)\right]$$

(töltésmegmaradás)

ebben a tagban nem volt eltolás, csak átnevezés msz.:

$$\nabla_x R^{n'+1} = (n'+1)\, R^{n'} \cdot \underline{R} \cdot \frac{1}{R}$$

$n'=n$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, c^{n+2}} \int d^3x \int d^3x'\, \rho(\underline{x},t) \cdot R^{n-1} \cdot \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \Big[-\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{n+1 \text{ kiesett}} \cdot \underline{R}\left(\nabla_{x'}\, \underline{j}(\underline{x}',t)\right) + \underline{j}(\underline{x}',t) \Big] =$$

msz: parc. int.:

$$-\int d^3x' \cdot R^{n-1} \cdot \underset{\text{i. komp.}}{\underline{R}_i} \cdot \left(\underset{\text{l. komponens}}{\nabla_{x'_l}\, j_l}(\underline{x}',t)\right) = (n-1) \int d^3x'\, \underbrace{R^{n-3}\, R_l \cdot R_i \cdot j_l}_{R^{n-1} \cdot \underbrace{\frac{R_l}{R}}_{\hat{R}_l} \cdot \underbrace{\frac{R_i}{R}}_{\hat{R}_i} \cdot j_l} -$$

$$-\int d^3x'\, R^{n-1}\, j_i(\underline{x}',t)$$

mmsz.: $\nabla_{x'_l} R_i = \delta_{il}$, $\nabla_{x'} R = -\hat{\underline{R}}$

$R_i = x_i - x'_i$

$\hat{\underline{R}} = \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|}$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, c^{n+2}} \int d^3x \int d^3x'\, \rho(\underline{x},t)\, R^{n-1} \underbrace{\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left(\underline{j}(\underline{x}',t) - \frac{n-1}{n+2}\, \hat{\underline{R}}\left(\hat{\underline{R}}\, \underline{j}(\underline{x}',t)\right) - \frac{1}{n+2}\, \underline{j}(\underline{x}',t) \right)}_{*}$$

$$* = \rho(\underline{x}')\, \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left[\frac{n+1}{n+2}\, \underline{v}(t) - \frac{n-1}{n+2}\, \hat{\underline{R}}\left(\hat{\underline{R}}\, \underline{v}(t)\right) \right]$$

$\underline{j}(\underline{x}',t) = \underline{v}(t) \cdot \rho(\underline{x}')$

kitüntetett irány

$$\hat{\underline{R}} = \hat{\underline{v}}\left(\hat{\underline{R}}\, \hat{\underline{v}}\right) + \underline{e}_\perp \left(\underline{e}_\perp\, \hat{\underline{R}}\right)$$

legyen

- $\rho(\underline{x})$ gömbszimmetrikus (úgyis 0-hoz tartunk a méretttel)

$\Downarrow$

$$\int d\Omega_{\hat{R}}\, \rho(|\underline{x}'|)\, \underline{e}_\perp \left(\underline{e}_\perp\, \hat{\underline{R}}\right)\left(\hat{\underline{R}}\, \underline{v}\right) = 0$$

← mivel ρ páros, a másik tag páratlan szög szerint

$$\int d\Omega_{\hat{R}}\, \rho(|\underline{x}'|)\, \hat{\underline{v}}\left(\hat{\underline{R}}\, \hat{\underline{v}}\right)\left(\hat{\underline{R}}\, \underline{v}\right) = \int d\Omega_{\hat{R}}\, \rho(|\underline{x}'|)\, \underline{v}\left(\hat{\underline{R}}\, \hat{\underline{v}}\right)\left(\hat{\underline{R}}\, \hat{\underline{v}}\right) = \cancel{\underline{v}\, \rho(|\underline{x}'|) \int d\Omega_{\hat{R}}}$$

$$= \underline{\dot{v}}\,\rho\,(|\underline{x}'|)\int d\Omega_{\hat{R}}\,(\hat{\underline{R}}\,\hat{\underline{v}})^2 = \underline{\dot{v}}\,\rho\,(|\underline{x}|)\,\frac{4\pi}{3}$$

ezzel helyettesítünk

ha mégsem végzem el a $\int d\Omega$-t, de tudom, hogy a szög szerinti rész $\frac{4\pi}{3}\dot{v}\cdot\rho$-t fog adni $\to \int d\Omega\,\frac{1}{3}$-szorosát adja

~~(d f)~~

$$\frac{dP_{mech}}{dt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,c^{n+2}}\cdot\int d^3x\int d^3x'\,\rho(\underline{x})\,\rho(\underline{x}')\cdot R^{n-1}\cdot\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\,\underline{v}(t)\underbrace{\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{1}{3}\frac{n-1}{n+2}\right)}_{\frac{2n+4}{3(n+2)}=\frac{2}{3}}$$

- $n=0$

$$\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{c^2}\int d^3x\,\rho(x)\int d^3x'\,\rho(x')\cdot\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}}_{2\cdot U_{elsztat}}\cdot\underline{\dot{v}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}\frac{U_{elsztat}}{c}\,\underline{\dot{v}} = \frac{4}{3}\,m_{mech}\cdot\underline{\dot{v}}$$

$$U_{elsztat} = E_{nyugalmi} = m_{mech}\cdot c^2$$

és a faktor valóban megjelenik, abban különbözik a klassz. Newton-étől

$\downarrow$

oka: az e^- nem pontszerű

- $n=1$

$$\underbrace{-\frac{1}{6\pi\varepsilon_0\cdot c^3}\,\underline{\ddot{v}}\;e^2}$$

sugárzási veszteséghez tartozó erőhatás (visszahatáshoz)

- $n\geq 2$ $\quad e^2\cdot a^{n-1}$ $\quad$ a: töltésrendszer mérete

ha $a\to 0$ $\quad\downarrow$ $\quad 0$

(fő feltételezés: csak EM k. h. van)

$$\underline{\underline{\frac{dP_{mech}}{dt}}} = F_{ext} = \underline{\underline{\underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)m\,\underline{\dot{v}}} - \underbrace{\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0\cdot c^3}\,\underline{\ddot{v}}}}}$$

a külső erők által létrehozott mozgás

a sugárzás miatti impulzusveszteség