Elektrodinamika gyakorlat

- Nagy Márton, nagymarci@mki.kfki.hu
- gyakorlófeladatok (be lehet adni)
- 2 db ZH (1. ZH kb. félév közepén)

1. óra

1) Maxwell-egyenletek vákuumban

$\underline{E}$, $\underline{B}$ térerősségek

$$\nabla \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$ ← Lenz-tv.

$$\nabla \underline{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$ → töltéssűr.

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \cdot \underline{j} + \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$ → áramsűr.

SI-rendszerben: ←

$[Q] = C$,

$[E] = \frac{V}{m}$

$[\varepsilon_0] = \frac{C^2 s^2}{kg\, m^3}$

$[B] = \frac{Vs}{m^2}$

$[\mu_0] = \frac{kg\, m}{C^2}$

$[j] = \frac{A}{m^2}$

CGS

$[B] = [E]$

$[\varepsilon_0] = 1$

$$\nabla \underline{B} = 0, \quad \nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \underline{E} = \varrho \qquad \nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c} \underline{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

mindkettőben igaz: $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

2) Kör.-ek:

$\nabla \underline{B} = 0 \Rightarrow \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ → II. ↓ $\nabla \times \left(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) = 0$

↑ I. ↑ egyszerűen összefügg"

$\underline{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$

mértékinv.

$\underline{A} \to \underline{A} + \nabla \chi$

$\phi \to \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$

potenciálok leírása a másik két Maxwell-le

$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \underline{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$)

össz.:

$\Delta \underline{A} = \text{grad div} - \text{rot rot}$

$\Delta \underline{A} = \nabla(\nabla A) - \nabla \times (\nabla \times \underline{A})$

$\nabla(\nabla A) + \Delta \underline{A} = \mu_0 \underline{j} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}$

(nem kell, hogy egy másik ember)

• 1) Lorenz-mértéke: $\nabla \underline{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$ →

$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = \Box \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\Box \underline{A} = \mu_0 \cdot \underline{j}$

• 2) Coulomb-mértéke:

$\nabla \underline{A} = 0 \to \Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta \underline{A} = \mu_0 \underline{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi$

• 3) Sugárzási mértéke:

$\phi = 0$

$\underline{E} = -\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$. $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ → $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \underline{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\Box \underline{A} = \mu_0 \underline{j} - \nabla(\nabla A)$

3) kontinuitási egyenlet: az eredeti és a potenciálos egyenletek is kiadják

ezt mindenképpen → $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \underline{j} = 0$

teljesíti a Maxwell-egyenletekből levő

tetsz. ρ és $\underline{j}$ értékek (de a mozgásegyenleteket nem biztos)

2) ↑ pl. Lorenz-mértékek

4) $\underline{A}, \phi$ $\nabla \underline{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0$ → $\underline{A}' \to \underline{A} + \nabla \chi$ $\phi' \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$

eredetileg

de lesz $\underline{A}' \to$, $\phi' \to$ akarunk, melyekre ez igaz

$\nabla A' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$\nabla \underline{A} + \Delta \chi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$

ismert

$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \Delta \chi = \nabla \underline{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$

hullámegyenlet → létezik megoldásai

így lehet a mértékfeltételeket kitalálni

(milyen χ legyen, hogy adott mértékfeltétel teljesüljön?)

Coulomb: $\nabla \underline{A} \neq 0$ $A' = A + \nabla \chi$, $\nabla A' = \nabla A + \Delta \chi = 0$

Elektrodin. feladatai

1) adott töltések, áramok, stb. esetén $\underline{E}, \underline{B} = ?$

2) adott $\underline{E}, \underline{B}$ hogy mozog a töltés?

↓

Lorentz-erőtörvény: $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$ → ez egyértelműen a 2)-t megmondja

Elektrosztatika

$\nabla \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\nabla \times \underline{E} = 0 \quad \underline{E} = -\nabla \phi \quad \rightarrow \boxed{\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (Poisson-egyenlet)

→ Green-fv.: ← inhomogén d.e.

$G(\underline{r}, \underline{r}'): \boxed{\Delta_r G(\underline{r}, \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}')}$ → milyen potenciál keletkezik $\underline{r}$ helyen, ha $\underline{r}'$ helyre lenkunk egy pontszerű forrást

↙

ekkor: $\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3 r' \, G(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \rho(\underline{r}')$

= G → keressük

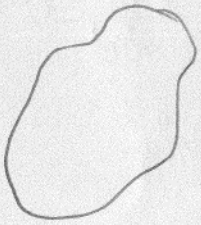
1) Végtelen térfogat:

$G(\underline{r}, \underline{r}') = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$

2) Határfeltételek:

(pl. fém → konstans potenciál)

Green-tételek: $\psi(\underline{r})$, $\phi(\underline{r})$



↙ Gauss-tétel

I. $\oint d\underline{A}\ \psi \underline{\nabla}\phi = \int dV \left(\underline{\nabla}\psi\,\underline{\nabla}\phi + \psi\Delta\phi\right)$

II. $\oint d\underline{A}\left(\psi\underline{\nabla}\phi - \phi\underline{\nabla}\psi\right) = \int dV\left(\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi\right)$

$\phi(\underline{r}) := \varphi$ ← a keresett skalár potenciál

$\psi(\underline{r}') = G(\underline{r},\underline{r}')$

$$\oint d\underline{A}'\left\{G(\underline{r},\underline{r}')\frac{\partial\varphi(\underline{r}')}{\partial\underline{r}'} - \varphi(\underline{r}')\cdot\frac{\partial}{\partial\underline{r}'}G(\underline{r},\underline{r}')\right\} = \int dV'\cdot G(\underline{r},\underline{r}')\cdot\underbrace{\Delta\varphi}_{\left(-\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho\right)} - \int dV'\,\underbrace{\Delta_{r'}G(\underline{r},\underline{r}')}_{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}\underbrace{\varphi(\underline{r}')}_{\varphi(\underline{r})}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\int dV'\ G(\underline{r},\underline{r}')\rho(\underline{r}') - \varphi(\underline{r}) = \oint d\underline{A}'\left\{G(\underline{r},\underline{r}')\frac{\partial\varphi(\underline{r}')}{\partial\underline{r}'} - \varphi(\underline{r}')\frac{\partial}{\partial\underline{r}'}G(\underline{r},\underline{r}')\right\}$$

↙

Tétel:
ha a határfeltételek ← itt $\underline{r}'$ a határon megadjuk, egyértelműen mennyi meghatározott lesz a feladat (a potenciál)

1) Dirichlet-feladat: $\varphi(\underline{r}')$ adott a határon!

$G(\underline{r}, \underline{r}') = 0$, ha $\underline{r}'$ a határon $\Rightarrow$ áll: φ egyértelmű

2) Neumann-féle feladat: $\frac{\partial \varphi(\underline{r}')}{\partial r'}$ adott a határon, ($\frac{\partial G}{\partial r'} = 0$)

ha $\underline{r}'$ a határon mozog $\Rightarrow$ áll: φ egyértelmű

pl. témfelület

---

3) Dirichlet-feladat megoldása:

a) „tükrözéses" módszer

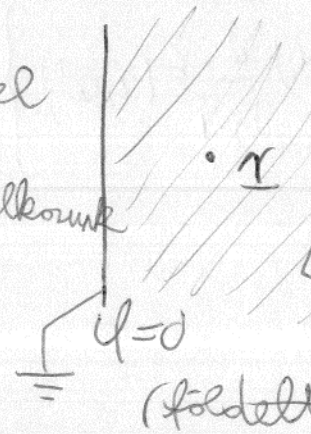
b) 2D-ben Γ komplex fgv.-ek

c) ortogonális fv.-sorok

a) Töltéstükrözés

I.-spec. geometriánál működik

- alapfeladata:



$\underline{r}'$ → Green-fv.-t keressük

($\underline{r}$ helyen ell. töltésnek

$\underline{r}'$ helyen mekkora a pot.-ja)

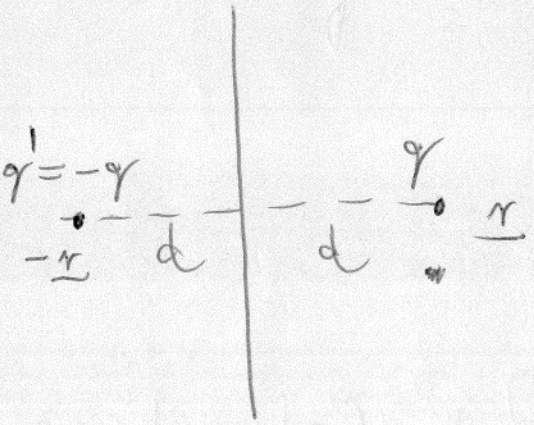
- HA a bal féltéren helyezünk el tetsz. töltést, az kielégíti hiszen a $\Delta\varphi = 0$ egyenletet a jobb féltéren)

ennek a Δ-a 0

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r} - \underline{r}'|} + f(\underline{r}, \underline{r}') \quad \text{ahol } \Delta f = 0$$

(hogy $\Delta\varphi = 0$ legyen)

f-et választjuk $q' = -q$ töltésű, tükörpontba helyezett töltés pot-nak



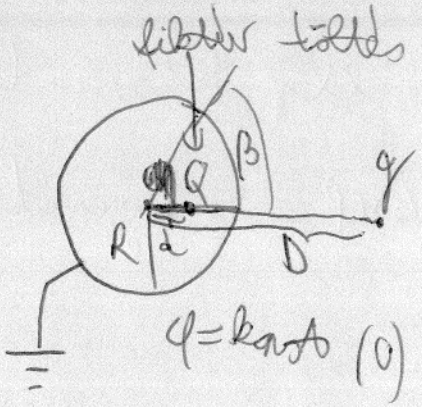
ez mindig teljesül, ha fiktív ponttöltéseket rakosgatunk le, mert a ponttöltés tere $\Delta\varphi = 0$, ha nem a középpontban (töltésen) vagyunk

(Nem baj, hogy a fiktív töltést a bal féltéren nem tudja adja, mint mondjuk egy fémlap),

határfelt. + $\Delta f = 0$

a lényeg, hogy megoldja a problémát a jobb féltéren és a határon, és mivel a megoldás egyértelmű (← Green-tétel), ezért az f is lesz az igazi esetben.

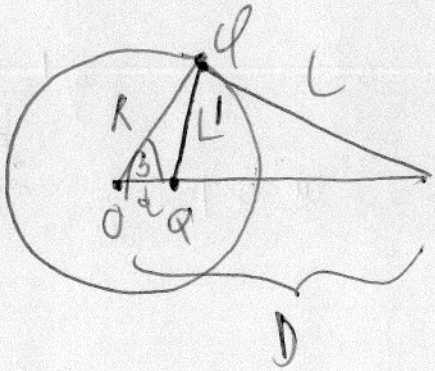
II.



$\varphi = 0$ (kell) $d = ?$ (Hova tegyük Q töltést?)

úgy képzeljük, mintha csak Q, q lenne a térben

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{L} + \frac{Q}{L'}\right)$$



$$L' = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd\cos\beta}$$

$$L = \sqrt{R^2 + D^2 - 2RD\cos\beta}$$

$$\frac{q}{L} = -\frac{Q}{L'} \rightarrow q^2 L'^2 = Q^2 L^2$$

$\Uparrow$ $\varphi = 0$

$$q^2(R^2 + d^2 - 2Rd\cos\beta) = Q^2(R^2 + D^2 - 2RD\cos\beta)$$

a határon $\forall\beta$-ra teljesüljön

$$\left(-2Rdq^2 + 2RDQ^2\right)\cos\beta = Q^2(R^2 + D^2) - q^2(R^2 + d^2)$$

$\downarrow$

ez úgy lesz $\forall\beta$-ra igaz, ha

$$-2Rdq^2 + 2RDQ^2 = 0 \quad \text{és} \quad Q^2(R^2 + D^2) = q^2(R^2 + d^2)$$

$$DQ^2 = dq^2$$

$$\frac{Q^2}{q^2} = \frac{d}{D} \longrightarrow \frac{d}{D}(R^2 + D^2) = R^2 + d^2$$

$$dR^2 + dD^2 = DR^2 + Dd^2$$

~~$d^2 = A$~~

$$d^2 - \frac{1}{D}(D^2+R^2)\,d + R^2 = 0 \rightarrow d = \frac{1}{2D}(D^2+R^2) - \sqrt{\frac{1}{4D^2}(D^2+R^2)^2 - R^2}$$

$$d = \frac{1}{2D}(D^2+R^2) - \frac{1}{2D}(D^2-R^2) \rightarrow \boxed{d = \frac{R^2}{D}}$$

$$Q = -\sqrt{\frac{d}{D}} \cdot q = -\frac{R}{D} q$$

$$\Downarrow$$

ekkor $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{L} + \frac{Q}{l}\right)$ ...

HF $\varphi = \text{konst} \neq 0$ a gömbfelületen (nincs töltés) a gömb

2. óra

1) Komplex fv-ek módszere // el.stat. feladatok /
(2D-ban működik)

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ diffható $\quad f(z+\Delta z) = f(z) + \Delta z \cdot f'(z)$

$z = x + iy \quad f(z) = u(x,y) + iV(x,y)$

$z + \Delta z = x + \Delta x + i(y + \Delta y)$

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iV(x+\Delta x, y+\Delta y) = u(x,y) + iV(x,y) + (\Delta x + i\Delta y)\cdot(A+iB)$$

$$\underline{u^{(x,y)}} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} + \underline{iv^{(x,y)}} + i\Delta x \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + i\Delta y \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \underline{u^{(x,y)} + iv^{(x,y)}} + \Delta x(A+iB) +$$

$$+ \Delta y(iA - B)$$

$\forall \Delta x, \Delta y$ - ra ennek teljesülnie kell

$$\Delta x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = A \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = B \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -B \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = A$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$ Cauchy-Riemann

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0} \qquad (\overrightarrow{\text{grad}}\, u)\cdot(\overrightarrow{\text{grad}}\, v) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0 \rightarrow \Delta u = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v = 0 \rightarrow \Delta v = 0$$

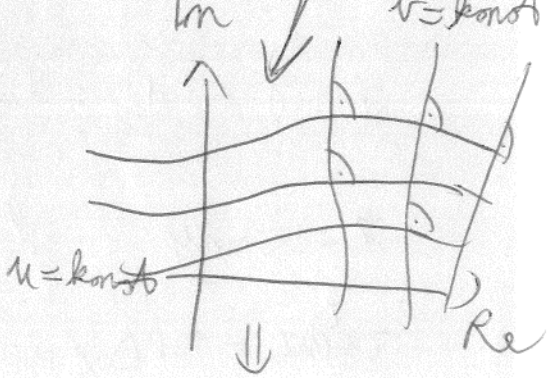
egy komplex fv kielégíti a Δ egyenletet

pl. $f(z) = z^2 \qquad z = x + iy$

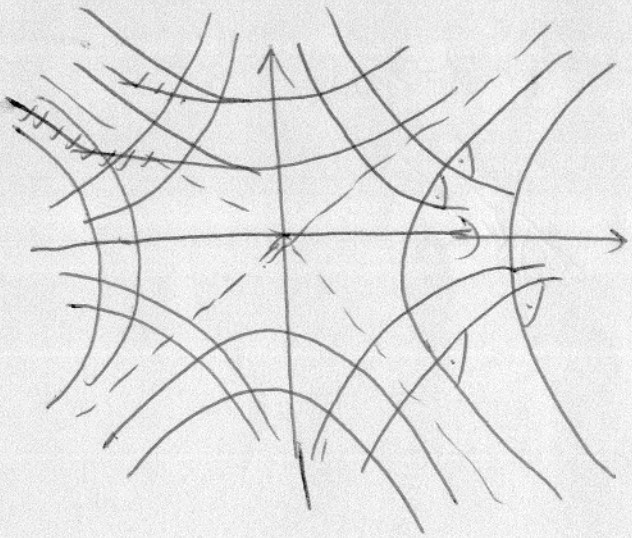
$z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$

$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \Delta u = 0$

$v(x,y) = 2xy \qquad \Delta v = 0$



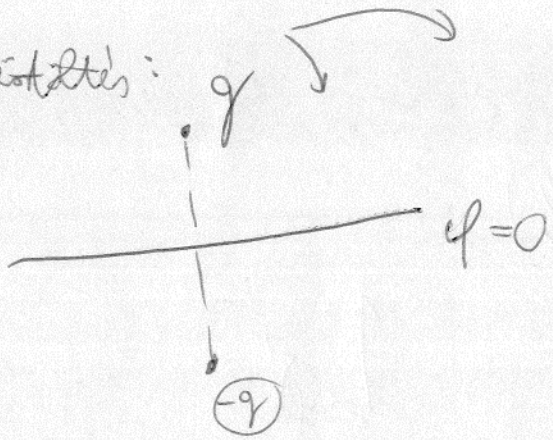
$\forall$ pontban merőlegesek

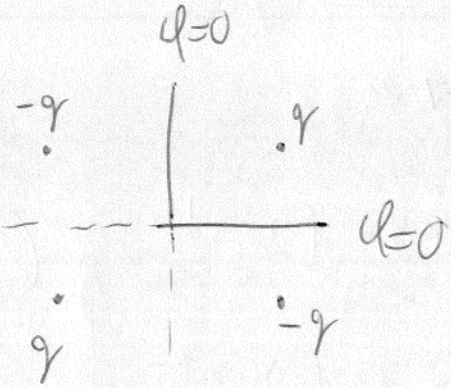


elektrosztat.:

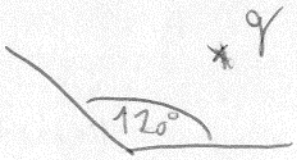
→ találjunk olyan leképezéseket (konform = szögtartó), melyekkel egyszerűbb a peremfeltételeket leírni, és diffhatóak

tükrözés:





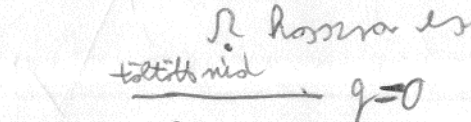
DE



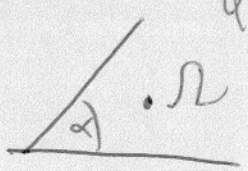
tükrözéssel már ezt nem lehet megoldani

VISZONT tükrözés 2D-ban:

Ω hosszú első töltéssűr.



$\varphi = 0$



(síkid, alt. többesszög.)

(hidrodin.-ban hasonló

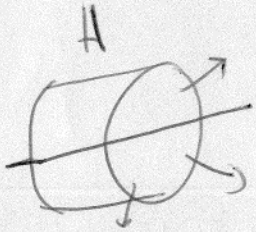


)

keressünk $\Phi(z) = ?$

úgy $\Phi(z)$ hogy $\xrightarrow{\text{diff}}$ $\operatorname{Re}\Phi(z) = \varphi$

$z = x + iy$



síkid tere: Ω r

$$\varphi = -\frac{\Omega}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$$

(szimm.) $\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{\Omega H}{\varepsilon_0}$

$E(r)\, 2\pi r \cdot H = \frac{\Omega H}{\varepsilon_0}$

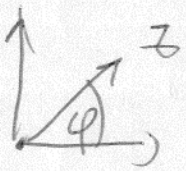
$$E(r) = \frac{\Omega}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

$\operatorname{Ln} z$ definíciója:

$$e^{\operatorname{Ln} z} = z$$

$$z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\exp\left(i\cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$



$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\underbrace{\arg(z)}_{\varphi}$$

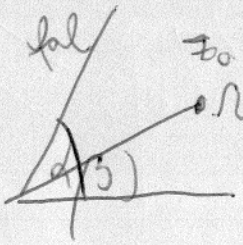
$\Phi(z)$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Re}\Phi = \varphi$ $\quad \Phi(z) = -\frac{\Omega}{2\pi\varepsilon_0}\operatorname{Ln}(z)$ $\leftarrow$ majdnem ez a jó lesz

---

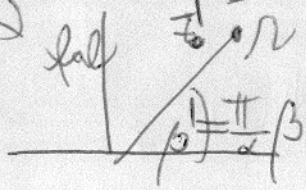
ikiterjesztés (koordinátatrafó):

$z \to z^n = |z|^n \cdot e^{i\varphi\cdot n} \to$ ilyen $\Phi(z)$-nek, de még határfeltétel kell, kiviszi a szöget





bizonyítjuk

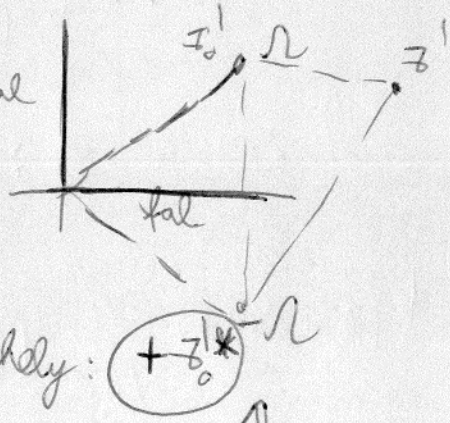


~~a~~ helyz is megváltozik a z' töltésnek !!

$\rightarrow z_0' = z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}$

ezt már meg tud~~ok~~juk oldani

a transzformált probléma megoldása: tükörtöltéssel



$$\Phi(z_0') = \frac{-\Omega}{2\pi\varepsilon_0} \ln(z' - z_0') +$$

$$+ \frac{\Omega}{2\pi\varepsilon_0} \ln(z' - z_0'^*) =$$

$$= -\frac{\Omega}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{z' - z_0'}{z' - z_0'^*}\right) \Rightarrow$$ ez a komplex fv megoldja a feladatot

↓ de ez a határvalue-problémát oldja meg

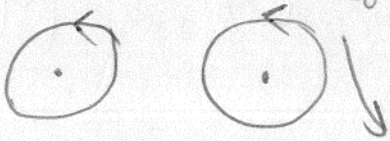
~~(de ez az eredeti határvalue)~~

↘ visszatranszformáljuk: $z' = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$, $z_0' = z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}$

$$\Phi(z) = -\frac{\Omega}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}}{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - z_0^{*\frac{\pi}{\alpha}}}\right)$$

---

ell.: $\oint E \, dm A = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$



$$\Phi = -\frac{\Omega}{2\pi\varepsilon_0} \ln(z)$$

$$\mathrm{Res}\,\Phi = \frac{\Omega}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi} \rightarrow$$ ezt a potenciálnak

a ~~koordinátatranszformációnál~~ ← minden képpen tudnia kell

ez nem "semleges"?

$$\left(\operatorname{Res}_{(z_0)} \phi(z)\right) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot \phi(z)$$

Most:

$$z = z_0 + \Delta z$$

(Binomiális) $\hookrightarrow$ $z^{\frac{\Pi}{\alpha}} = z_0^{\frac{\Pi}{\alpha}} \left(1 + \frac{\Delta z}{z_0} \frac{\Pi}{\alpha}\right)$

ha $z \to z_0$: $z^{\frac{\Pi}{\alpha}} - z_0^{\frac{\Pi}{\alpha}} = z_0^{\frac{\Pi}{\alpha} - 1} \cdot \Delta z \cdot \frac{\Pi}{\alpha}$

$$\phi(z_0 + \Delta z) = -\frac{\Lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(z_0^{\frac{\Pi}{\alpha}} \left(1 + \frac{\Pi}{\alpha} \frac{\Delta z}{z_0}\right)\right) + \frac{\Lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(z^{\frac{\Pi}{\alpha}} - z_0^{\frac{\Pi}{\alpha}}\right)$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta z \left[\ln \Delta z + \ln\left(z_0^{\frac{\Pi}{\alpha} - 1} \cdot \frac{\Pi}{\alpha}\right)\right]$$

konstanshoz tart

$(z \to z_0,\ z \neq z_0^*)$

$\left(\lim_{x \to 0} x \ln x = 1\right)$ $\Downarrow$

$$\phi(z_0 + \Delta z) \to -\frac{\Lambda}{2\pi\varepsilon_0} \quad \checkmark$$

~~(Ez)~~

Eljárás:

koordinátatrafó $\longrightarrow$ megoldás pl. tükörtöltéssel $(\phi(z'))$

$\downarrow$

ell.: ez a $\Delta = 0$ egyenletet $\leftarrow$ visszatrafó $\phi(z') \to \phi(z)$

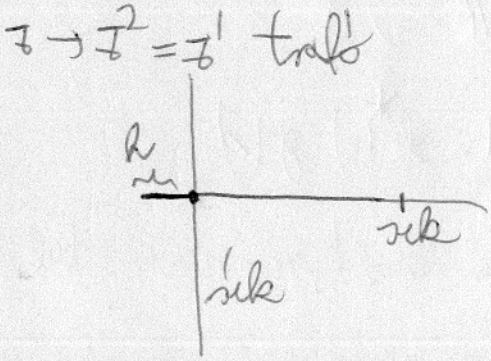
bárki megoldja, (sima $z' = g(z)$ helyettesítés)

és a határfeltételeket is,

de a $\oint E \, dA$-t is tudnia kell — 14 —

hasonló példa:





2) Ortogonális fv-rendszerek:

- 3D-ben $\underline{v}$ vektorok, 3db egységvektor: $\underline{e}^{(i)}$

$$\underline{v} = \sum_i v_i \underline{e}^{(i)} \rightarrow v_i = \underline{v} \cdot \underline{e}^{(i)}$$

$$\underline{e}^{(i)} \cdot \underline{e}^{(k)} = \delta_{ik} \quad \text{: ortogonalitás vektoroknál}$$

$$\sum_m e_m^{(i)} \cdot e_m^{(k)} = \delta_{ik}$$

$$v_k = \sum_i v_i \cdot e_k^{(i)} \qquad v_i = \sum_m v_m \cdot e_m^{(i)}$$

$$v_k = \sum_i \sum_m v_m \cdot e_m^{(i)} \cdot e_k^{(i)} \Rightarrow v_k = \sum_m v_m \underbrace{\sum_i e_k^{(i)} \cdot e_m^{(i)}}_{\delta_{km}}$$

$$\sum_i e_k^{(i)} \cdot e_m^{(i)} = \delta_{km}$$ teljességi összefüggés

arról igaz, mert el tudtuk bontani a vektort a bázisok szerint

(teljes tere vektor operátorok összege az egység)

- <u>függvények:</u>

"skalárszorzás": $\langle f(x) | g(x) \rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\langle f(x) | g(x) \rangle := \int dx\, f^*(x) \cdot g(x)$$

↳ ez teljesíti a skalárszorzat tul.-ait

↓ ↳ fv-ek a vektortér elemei

$$L^2(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int |f|^2 dx < \infty \}$$ (négyzetesen integrálható fv-ek tere)

(∃ is véges)

<u>TONR</u> (teljes ortonormált rendszer) (fv.-ek terében):

$\phi_n(x)$

$$f(x) = \sum_n f_n \phi_n(x)$$

$$\int dx\, \phi_n^*(x) \phi_m(x) = \delta_{nm} \to \text{ortonormált rendszer}$$

$$f(x) = \sum_n f_n \phi_n(x) \to \int \phi_m^*(x) f(x)\, dx = \sum_n f_n \underbrace{\int dx\, \phi_n^*(x) \phi_m(x)}_{\delta_{nm}}$$

$$f_m = \int dx\, \phi_n^*(x) f(x) \qquad = f_m$$

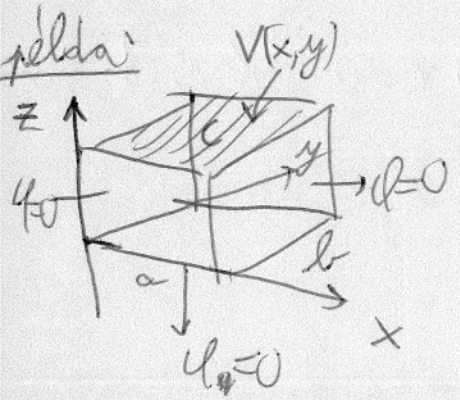
$$f(x) = \sum_n \int dy\, \phi_n^*(y) f(y) \phi_n(x) = \int dy \underbrace{\left(\sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(y) \right)}_{\delta(x-y)} f(y)$$

teljességi össz.: $\delta(x-y) = \sum_n \varphi_n(x)\,\varphi_n^*(y)$

↓

ekkor $\forall$ fv. kifejthető ezek szerint

példa:



a felső lap kivételével $\forall$ lapon 0

↑ a tökéletesség

itt $V(x,y)$ a potenciál

$$\boxed{\Delta\Phi = 0}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Phi(x,y,z) := X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$$

$$X''\cdot Y\cdot Z + X\cdot Y''\cdot Z + X\cdot Y\cdot Z'' = 0 \;/:XYZ$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

x y z fv-e ⇒ külön-külön $\forall$ állandó

$$\frac{X''}{X} = -\alpha^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = \beta^2 \qquad \frac{Z''}{Z} = \alpha^2+\beta^2$$

$X(x) = e^{\pm i\alpha x}$ $\quad Y(y) = e^{\pm i\beta y}$ ↓ $\quad Z(z) = e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z}$

$$\Phi(x,y,z) = e^{\pm i\alpha x}\cdot e^{\pm i\beta y}\cdot e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot z}$$

peremfeltételek illesztés:

ilyen alakban keressük a mo.-t

$$\varphi_{\alpha\beta}(x,y,z) = \sin(\alpha x)\cdot\sin(\beta y)\cdot \operatorname{sh}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z\right)$$

↓

ez $\forall \alpha$-ra tudja, hogy $x=0$, $y=0$, $z=0$ -ban $\Phi_{\alpha\beta}=0$

$$\varphi_{\alpha\beta}(x=a, y, z) = 0 \quad \leftarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(x, y=b, z) = 0 \quad \leftarrow \beta = \frac{m\pi}{b}$$

$$\varphi_{nm}(x,y,z) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\operatorname{sh}\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}\, z\right)$$

↓

ez a fv. tetszőleges n,m-re tud 5 határfeltételt

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{nm} A_{nm}\varphi_{nm}(x,y,z)$$

(potenciál)

(mejj:

$\varphi_n(x)$: $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right), \quad \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)$$

normálás

$n \in \mathbb{N}^+$ $\quad$ $m \in \mathbb{N}^+$

→ ez egy teljes ortonormált fv. rendszer)

↓

most pont ilyenünk van

$$\Phi(x,y,c) = \sum_{nm} A_{nm}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cdot \underbrace{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}\cdot c\right)}_{\text{konst}} =$$

$$= V(x,y)$$

az elvek meghatározásai:

$\left(f_n = \int \varphi_n^*(x) \cdot f(x)\right)$ → ez volt előbb

↓

$$\sum_{n,m} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) = \frac{V(x,y)}{\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} \cdot c\right)}$$

$$A_{nm} = \frac{4}{ab} \int dx dy \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cdot \frac{V(x,y)}{\sinh(\dots)}$$

Szeparálható megoldást kerestünk a Δ egyenletre

↳ ez pont egy teljes ortonormált rendszert ad (exp. fv.)

↓

elvek meghatározása a peremfeltételből

3. óra

1. gyakorlófeladatsor /1:

$\phi, \underline{A} \to \underline{E}, \underline{b}$

Lett.-ben 1 skalárfeltétel előírható

L: $\nabla \underline{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

C: $\nabla \underline{A} = 0$

Sug.: $\phi = 0$

axiális: $\underline{n} \cdot \underline{A} = 0$

ha van $\underline{A}$ vektorpot. $\nabla \underline{A} \neq 0$

? ↳ $\nabla \underline{A}' = 0$

$\underline{A}' = \underline{A} + \nabla X$ $\quad \nabla \underline{A}' = 0$ $\quad \nabla \underline{A} + (\nabla \nabla) X = 0$

ez adott a térben $\quad (\nabla \nabla) X = -\nabla \underline{A}$

$\Downarrow$

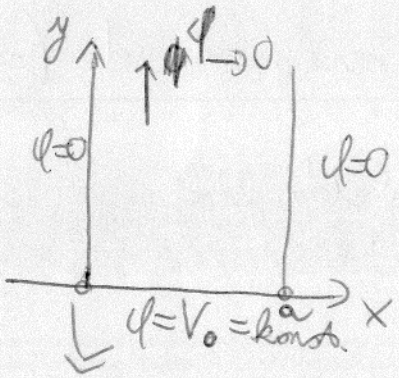
kiszámíthatjuk

$\Box \underline{A} = \ldots / \cdot \nabla$

$\Box \nabla \underline{A} = \ldots$

1) Speciális feladatok (első ha ortogonalitásához):

2D



$\Delta \varphi = 0$

$\varphi = X(x) \cdot Y(y)$ ~~$\cdot Z(z)$~~

ilyenkor a sarkokon nem értelmezzük → igazából a lényeg, hogy a belső pontokban kielégítse a Δ egyenletet, a határokhoz közelítve pedig tartson az oda előírt értékhez

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \cdot X = 0 \quad / : X Y$$

$$\underbrace{\frac{1}{X} \cdot X''}_{\text{konst.}} + \underbrace{\frac{1}{Y} \cdot Y''}_{\text{konst.}} = 0$$

← arg. szerinti deriált

x irányban 2 helyzet tűnik el → x irányban trigon.

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = \lambda^2$$

$$Y = C \cdot e^{\lambda y} + D \cdot e^{-\lambda y}$$

↓ nem tart 0-hoz, ha $y \to \infty$

$$X(x) = A \cdot \cos(\lambda x) + B \cdot \sin(\lambda x)$$

$x = 0$-ban $0 \to A = 0$

~~1.)~~ $X =$

a határfeltételekkel

$$X = A \cdot \sin(\lambda x) \qquad \lambda = \frac{n\pi}{a}$$

$$Y = D \cdot e^{-\lambda y} \qquad X(a) = 0$$

$$\varphi(x,y) = \sum_n \underbrace{\tilde{A}_n \cdot D}_{\tilde{A}_n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

$$\varphi(x, y=0) = V_0 \qquad \tilde{A}_n = ?$$

$$\sum_n \hat{A}_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \underbrace{e^{-\frac{n\pi}{a}\cdot 0}}_{1} = V_0$$

↑ sin-ok szerinti sorfejtés

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sum_n A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot V_0 \cdot dx$$

$$\sum_n A_n \cdot \underbrace{\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx}_{\frac{a}{2}\delta_{nm}} = \underbrace{\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot V_0 \cdot dx}_{-\left[\frac{a}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot V_0\right]_0^a =}$$

0, ha m páros

$-2\frac{aV_0}{m\pi}$ ha m páratlan.

~~$\frac{a}{2} A_m =$~~

$$A_m = \begin{cases} \frac{4V_0}{m\pi}, & \text{ha } m \text{ páratlan} \\ 0, & \text{ha } m \text{ páros} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x,y) = \sum_{n \text{ páratlan}}^{\infty} \frac{4V_0}{m\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot e^{-\frac{n\pi}{a} y}$$

Kész, de felösszegezhető.

$$\varphi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n \text{ páratlan}} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a} y} \cdot e^{i\frac{n\pi}{a} x} = \frac{4V_0}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n \text{ páratlan}} \frac{1}{n} e^{-\frac{\pi}{a}(y-ix)n} = (*)$$

Emlékeztető $\ln(1-x) = -\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right)$

$$\ln(1+x) = -\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots\right)$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right]$$

$$\sum_{n \text{ páratlan}} \frac{z^n}{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$$

$(*)$

$$= \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Im}\left[\ln\left(\underbrace{\frac{1+e^{-\frac{\pi}{a}(y-ix)}}{1-e^{-\frac{\pi}{a}(y-ix)}}}_{z}\right)\right] =$$

$\leftarrow \ln z = \ln|z| + i\arg(z)$

$\arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right)$

$$= \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right)$$

1mszi:

$$Z = \frac{1+e^{\frac{-\pi}{a}(y-ix)}}{1-e^{\frac{-\pi}{a}(y-ix)}} = \frac{\left(1+e^{\frac{-\pi}{a}(y-ix)}\right)\left(1-e^{\frac{-\pi}{a}(y+ix)}\right)}{\text{nevező (skalár)}} =$$

$$= \frac{1+e^{-\frac{\pi}{a}y}e^{\frac{i\pi}{a}x} - e^{-\frac{\pi}{a}y}e^{-\frac{i\pi}{a}x} - e^{-\frac{2\pi}{a}y}}{\dots} = \frac{1+e^{-\frac{2\pi}{a}y} + 2i\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-\frac{\pi}{a}y}}{\dots}$$

$$\frac{\mathrm{Im}Z}{\mathrm{Re}Z} = \frac{2e^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{1-e^{-\frac{2\pi}{a}y}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{a}y\right)}$$

$$\varphi(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\arctg\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{a}y\right)}\right]$$

ha $y \to 0$, sh $\to 0$, arctg $\to \frac{\pi}{2}$, $\varphi \to V_0$ ✓

2) Más koordinátarendszerek:

(ortogonálisokat fogunk nézni)

u_1, u_2, u_3 : 3 koordináta

- két közeli pont távolsága:

$$dl^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$$

h_1, h_2, h_3 a koordinátákhoz-ei

(pl. x, y, z) Descartes

r, φ, z henger

r, θ, φ) gömb

pl. $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$

$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$

– Vektoranalízis – műveletek:

$$(\nabla \Phi)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \qquad d(h_i u_i)$$ a valódi távolság

$$(\nabla \underline{A}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]$$

ez a felületi integrál vére.

$$(\mathrm{rot}\, A)_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 A_2)\right] \qquad \left(\int \mathrm{div} A \cdot dV = \oint A\, d\underline{f}\right.$$

vonalmenti integrál

↓

$\Delta\Phi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\Phi)$ → 2. gyakorlófeladatsor 1. ⁴

3) Gömbi-koordinátákk

Φ: potenciál

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\Phi$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial(r\Phi)}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(r\Phi)\right] = 0$$

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta)\, Q(\varphi)$$

$$U''PQ + \frac{1}{r^2} UP''Q + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} UP'Q + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta} UPQ'' = 0$$

$$\frac{U''}{U} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{P''}{P} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{P'}{P} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{Q''}{Q}\right] = 0$$

$$\frac{r^2 U''}{U} + \frac{P''}{P} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{P'}{P} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{Q''}{Q} = 0$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2 \rightarrow \Phi = e^{\pm i m \varphi}$$ Hogy egyértékű legyen, m egész

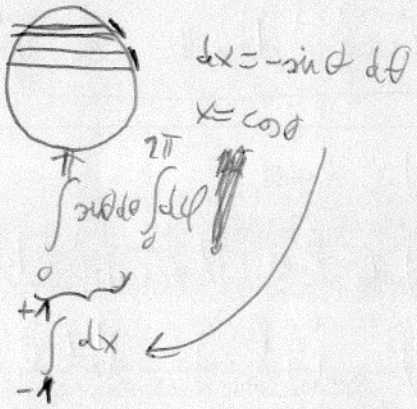
$$\frac{r^2 U''}{U} = l(l+1)$$

$$\frac{P''}{P} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{P'}{P} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) = 0$$

~~$x = \cos\varphi$~~ $\downarrow$ $\boxed{x = \cos\theta}$ $dx = -\sin\theta\, d\theta$

l egész

↳ érdemes ezt a helyettesítést megjegyezni gömbiben!



$$\frac{d^2 P(x)}{dx^2} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P(x) = 0$$

$\Downarrow$

megoldásai az (asszociált) Legendre-polinomok

– Definíció: $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l$ ($m=0$-ra oldja meg az egyenletet)

• Leg.-polinom

l-edfokú x-ben

$2l$ a legmag. fokú ehh

x legm. fokú ehhja l

$-1 < x < 1$ -en van értelmezve

• asszociált Leg.-pl. $P_l^m = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \cdot (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m} (x^2-1)^l$

(nem feltétlenül pl., mert $\sqrt{1-x^2}^m$ is megjelenik)

Áll.: P_ℓ-ek TONR-ek a $[-1,+1]$ intervallumon
(teljes ortonorm. rendszer (gömbfelületen))

$$\int P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x)\, dx \approx \delta_{\ell\ell'}$$ ~~(teljes)~~ ortogonálisak

(+ belátható, hogy teljesek is)

4. óra

I) Kiegészítések a gömbfüggvényekhez

1) ℓ egész
2) P_ℓ-ek normáltsága
3) addíciós tétel

1) Laplace gömbi:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\Phi = \frac{U(r)}{r}\cdot P(\theta)\cdot Q(\varphi)$$

$$\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{P\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{Q}\cdot\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi \rightarrow \Phi = e^{\pm im\varphi} \qquad m \in \mathbb{N}_0^+$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}u = 0 \qquad \frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -l(l+1)$$

$u = Ar^{l+1} + Br^{-l}$

$x = \cos\theta$ $\quad m = 0$ setzt

$$m \neq 0: \quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} = -\frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) + l(l+1)\cdot P = 0$$

$$P(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \qquad \frac{dP}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha) x^{n+\alpha-1}$$

$$\Downarrow$$

$$(1-x^2)\frac{dP}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha) x^{n+\alpha-1} - a_n (n+\alpha) x^{n+\alpha+1} \qquad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) x^{n+\alpha-2} - a_n (n+\alpha)(n+\alpha+1) x^{n+\alpha}$$

$$-l(l+1)P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n l(l+1) x^{n+\alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[\underbrace{a_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) x^{n+\alpha-2}}_{\text{Umindexes}} - a_n (n+\alpha)(n+\alpha+1) x^{n+\alpha} + l(l+1) a_n \cdot x^{n+\alpha} \Big] = 0$$

$$\rightsquigarrow a_0 \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} + a_1 (1+\alpha)\alpha x^{\alpha-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) x^{n+\alpha-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha)(n+\alpha+1) x^{n+\alpha} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} l(l+1)\, a_n \cdot x^{n+\alpha} = 0$$

$n \to n+2$ eltolást összegyben

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+\alpha+2)(n+\alpha+1) - a_n\left[(n+\alpha)(n+\alpha+1) + l(l+1)\right] x^{n+\alpha} = 0$$

$a_0\,\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-2} + a_1\,\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}$

↓ ∀ együtthatónak el kell tűnnie !

rekurzív összefügg.: ha $a_0, a_1 = 0 \Rightarrow$ 0 az összes elő.

$\Downarrow$

vagy ~~(hog)~~ $a_0 \neq 0$, ekkor $\alpha(\alpha-1)=0$

$\alpha=1 \quad \alpha=0$

vagy $a_1 \neq 0$, ekkor $\alpha(\alpha+1)=0$

$\alpha=-1 \quad \alpha=0$

$\Rightarrow$ a páros és páratlan elők ezután függetlenek

$$a_n \frac{\left[(\alpha+n)(\alpha+n+1) - l(l+1)\right]}{(\alpha+n+2)(\alpha+n+1)} = a_{n+2}$$

vagy n-re: $a_{n+2} \sim a_n$, ekkor ± 1-ben szingularitás lesz ↓

(mivel az egész görbületűeken kell, $x \in [-1,1]$)

↑

pl. $\frac{1}{1-x^2} \sim 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$ ekkor hasonló

↓

Állítás: $\exists n$, hogy $a_{n+i} = 0$, $\forall i > 0$-ra

↓ nincs szing.

melyik a_n ehhez $\Downarrow$ ellentmondás!! $\longrightarrow$ ekkor nincs több tag

$(\alpha+n)(\alpha+n+1) = l(l+1)$

$\alpha=0$ esetén $n(n+1)=l(l+1) \Rightarrow l$ egész

$\alpha=1$ -ll- $(n+1)(n+2)=l(l+1)$ $\quad l=n+1$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$P(x)$ l-edfokú polinom; $\boxed{l \text{ egész}}$

levezethető:

$$\boxed{P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l}$$ Legendre-polinomok

2) Ortonormáltság:

a) Áll.: $\int_{-1}^{+1} P_l(x)\cdot P_{l'}(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } l\neq l' \\ \frac{2}{2l+1}, & \text{ha } l=l' \end{cases} = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$

Biz.: $\int_{-1}^{+1} P_{l'}(x)\underbrace{\left\{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]+l(l+1)P_l(x)\right\}}_{0}=0$

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]+l(l+1)\int P_{l'}P_l=0$$

(parc. int.)

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d}{dx}\left[P_{l'}(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]-\int_{-1}^{+1}\frac{dP_{l'}}{dx}\frac{dP_l}{dx}(1-x^2)+l(l+1)\int_{-1}^{+1}P_l P_{l'}=0$$

ennek $=0$ (±1-ben $=0$)

$l \leftrightarrow l'$ csere

$$l(l+1)\int_{-1}^{+1}P_{l'}P_l=\int_{-1}^{+1}\frac{dP_{l'}}{dx}\cdot\frac{dP_l}{dx}(1-x^2)$$

$$l'(l'+1)\int_{-1}^{+1}P_{l'}P_l = \text{——ll——}$$

$\Rightarrow$ ezek polinomok, ezért nem tarthatnak ∞-be (egyébként az $1-x^2\to0$ $\to$ kikompenzálhatnák)

$$\left[l(l+1)-l'(l'+1)\right]\int_{-1}^{+1} P_l P_{l'} = 0 \quad \rightarrow \quad l \neq l' \text{ -re}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l P_{l'} = 0$$

---

b) normáltság: $P_l = \dots (l, 1.)$

$$\int_{-1}^{+1} \left[P_l(x)\right]^2 dx = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l\right]\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l\right] dx = (*)$$

parc. int.: $\int_a^b u v' = \left[u \cdot v\right]_a^b - \int_a^b u' \cdot v$

$$(*) = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d}{dx}\right)\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1} \cdot (x^2-1)^l \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^l \cdot (x^2-1)^l\right] - \frac{1}{(2^l l!)^2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1} (x^2-1)^l \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+1} (x^2-1)^l = (**)$$

$\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1} \cdot (x^2-1)^l \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^l \cdot (x^2-1)^l$: 0, mert elben marad (x^2-1)-es tag

$$\Big|_{-1}^{+1} = 0$$

$$(**) = \dots \text{ (folytatjuk a parc. integrálást)} = \frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^l \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l}_{(2l)!} = \frac{(-1)^l (2l)!}{(2^l l!)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^l dx$$

$\left(x^n\right)^{(n)} = n!$

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^l dx = \frac{(2^l l!)^2}{(2l+1)!}(-1)^l \quad \text{belátható}$$

$$\text{III} \Rightarrow \int_{-1}^{+1} P_l^2(x) = \frac{2}{2l+1}$$

---

asszociált L.-polinomok (gömbfv.-ek):

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m \cdot (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_\ell(x)$$

$$\int_{-1}^{+1} dx\, P_\ell^m \cdot P_{\ell'}^m(x) = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}$$

$$\Phi = \frac{u(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi) = \left[A r^\ell + B r^{-(\ell+1)}\right] \underbrace{\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}}_{\text{normálás}} P_\ell^m(\cos\theta) \cdot e^{+im\varphi}$$

a $-m$-eshez jön ki a másik

$Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ gömbfv.

$$\int Y_{\ell' m'}^* Y_{\ell m}\, d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad \text{(ortonormáltság)}$$

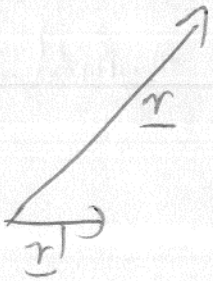
$m \to -\ell, -\ell+1, \ldots 0, 1, \ldots \ell$: ez is abból jön ki, hogy ne legyen singularitásba

$$\Delta\Phi = 0 \rightarrow \Phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell m} r^\ell + B_{\ell m} r^{-(\ell+1)}\right) Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

~~(II) Multipólus sorfejtés~~

sorfejtés gömbfv-ekkel:

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \text{(valami)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$$

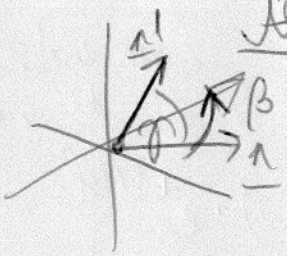


$$r_< = \min\left(|\underline{r}|, |\underline{r}'|\right)$$

$$r_> = \max\left(|\underline{r}|, |\underline{r}'|\right)$$

$$Y_{\ell m}(\underline{n}) \equiv Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \quad \text{(jelölés)}$$

3) addíciós tétel:



Áll.: $P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\underline{n}') Y_{\ell m}(\underline{n})$

$\cos\gamma = \underline{n}\underline{n}'$

Biz.: Legyen $\underline{n}'$ rögzített $\Rightarrow P_\ell(\cos\gamma)$ mint $\underline{n}$-nek fv-e

ugyanakkor:

$P_\ell(\cos\gamma)$ sorfejtése: $P_\ell(\cos\gamma) \triangleq \sum_{\ell,m} A_{\ell m}(\underline{n}') \cdot Y_{\ell m}(\underline{n})$

bmely fv. kifejthető az egységgömbön

ha $\gamma = \theta$ (így vesszük fel a koordinátarendszert)

$$\Delta_{\underline{n}} P_\ell(\cos\theta) + \ell(\ell+1) P_\ell(\cos\theta) = 0$$

csak az $\ell' = \ell$ maradhat meg

$\underline{n}$-függő Δ-egyenlet

$$\Delta_{\underline{n}} Y_{\ell m} + \ell(\ell+1) Y_{\ell m} = 0$$

$$P_\ell(\cos\gamma) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_m(\underline{n}') Y_{\ell m}(\underline{n})$$

θ-tól függő fv-ek kifejtése:

$$f_m(\theta) = \sum_\ell a_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

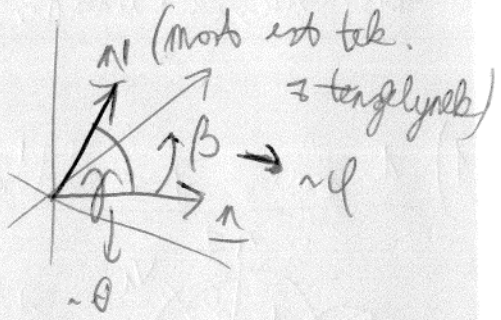
$$a_\ell = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cdot \sin\theta \, P_\ell(\cos\theta) f(\theta) \cdot \frac{2\ell+1}{2}$$

$$A_m(\underline{n}') = \int Y^*_{\ell m}(\underline{n}) P_\ell(\cos\gamma) \, d\Omega$$

(együtthatók meghatározása)

Tekintsük $\sim Y^*_{\ell m}(\underline{n})$-t az $\underline{n}'$ tengelyre vonatkozóan

$\widetilde{Y}_{\ell m'}(\alpha, \gamma, \beta)$ jönnek ki eredmények.



Általában igaz:

$$g(\theta,\varphi) = \sum_{\ell m} A_{\ell m} Y_{\ell m}(\underline{n})$$

~~$g(\theta,\varphi) = Y_{\ell m}$~~

~~$g(0,\varphi) =$~~ $Y_{\ell 0}(\theta=0,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$

$\Downarrow$

ha $m \neq 0$, azaz más kiesnek

$$g(0,\varphi) = \sum_\ell A_{\ell 0} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

$$A_{\ell 0} = \int Y^*_{\ell 0}\, g(\theta,\varphi) = \int P_\ell(\cos\theta) \cdot \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, g(\theta,\varphi)$$

$$g(0,\varphi) = \sum_\ell \int \frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot P_\ell(\cos\theta) \cdot g(\theta,\varphi)$$

~~ha g speciálisan~~ most $\theta = \gamma$, $\varphi = \beta$

ha $\underline{n}'$-ben vagyunk, az most a $\theta = 0, \varphi$-nek felel meg

$$A_m(\underline{n}') = \int d\Omega\, \underbrace{Y^*_{\ell m}(\underline{n})}_{\hat{=}(\gamma,\beta)} P_\ell(\cos\gamma)$$

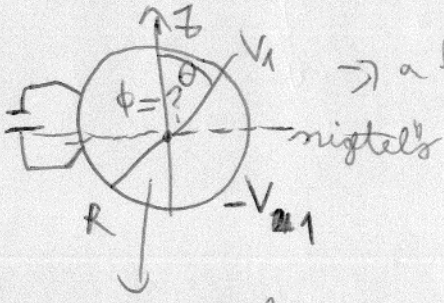
$\frac{4\pi}{2\ell+1} Y^*_{\ell m}(\gamma,\beta)$ | $Y_{\ell m}$-nek a $P_\ell(\cos\gamma)$-ra vonatkozó együtthatója

$$Y^*_{\ell m}(0,\varphi) = \frac{2\ell+1}{4\pi} \int \underbrace{P_\ell(\cos\gamma)\, Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)}_{\text{ha } n' \text{ a } z \text{ tengely}}$$

5. óra

ZH: hétfő (kedd) utáni héten kedden (~~felülvizsgával 1 héten~~)

1) 1 gömbi peremértékfeladat:



$\phi=?$ a gömb belsejében

→ a kétféle gömbön más potenciál

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta)$$

(Legendre-polinom)

(ha ~~a~~ ~~d~~ szimmetria van)

$A_l, B_l = ?$ $\quad B_l = 0$ ez tudja garantálni

↓ ennek szingularitása lesz $r=0$-nál

a Laplace-egyenletet (skv.-e a gömbi Lapl.-nak)

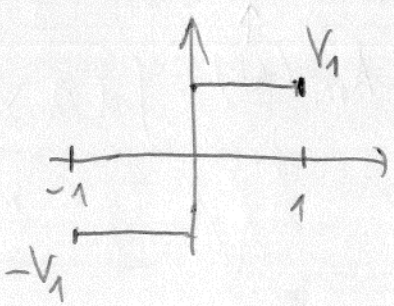
$$\Phi(r,\theta)=\sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

msz.: →

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_{l'}(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$ ortogonalitás

határfeltétel:

$$\Phi(R,\theta)=f(\cos\theta)$$ most $$f(\cos\theta)=\begin{cases} V_1, & \text{ha } -1\le\cos\theta\le 0 \\ -V_1, & \text{ha } 0<\cos\theta\le 1 \end{cases}$$



$$\sum_l A_l R^l P_l(\cos\theta)=f(\cos\theta) \qquad x=\cos\theta$$

$$A_l R^l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1} P_l(x) f(x)\,dx$$

$$\phi(r,\theta)=\sum_l A_l r^l \cdot P_l(\cos\theta) \quad \text{, ahol} \quad A_l=\frac{1}{R^l}\,\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,P_l(x)\,dx$$

konkrétan: $P_l(x)=\frac{1}{2^l\cdot l!}\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^l\cdot\left[(x^2-1)^l\right]$

! ha l páros $\to P_l$ páros
ha l páratlan $\to P_l$ páratlan !

megj.: $P_l(+1)=1$ ← így vannak normálva ∫most $f(x)$ páratlan !!

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,P_l(x)\,dx=\begin{cases}0, \text{ ha } l \text{ páros}\\ 2\cdot V_1\int_0^1 P_l(x)\,dx \quad \text{ha } l \text{ páratlan}\end{cases}$$

↑ határ miatt

msz.: végeredmény

$$\int_0^1 P_l(x)\,dx=?=\frac{1}{2^l\cdot l!}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1}\cdot(x^2-1)^l\right]_0^1=\frac{(l-2)(l-4)\cdots}{\left(\frac{l+1}{2}\right)!}(-1)^{\frac{l-1}{2}}$$

mmsz.: $\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1}(x^2-1)^l=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1}\cdot(x^2-1)(x^2-1)^{l-1}$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1}(x^2-1)^l=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1}\underbrace{\sum_{r=0}^{l}\binom{l}{r}\cdot(-1)^r(x^2)^{l-r}}_{\text{binomiális tétel}}=\sum_{r=0}^{l}\binom{l}{r}(-1)^r\left(\frac{d}{dx}\right)^{2l-2r}\cdot x^{2l-2r}$$ ⊛

$$⊛=\sum_r\binom{l}{r}\cdot(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{(2l-2r-l+1)!}\cdot x^{2l-2r-l+1}=\sum_r\binom{l}{r}\cdot(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{(l+1-2r)!}x^{l+1-2r}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^q x^p=\frac{p!}{(p-q)!}x^{p-q}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{n-k} b^k \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

mert

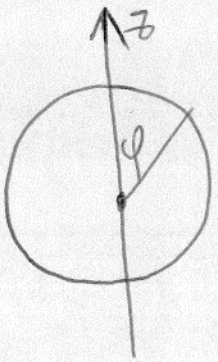
$$(-z)! = \begin{cases} +\infty \\ \text{vagy} \\ -\infty \end{cases}$$

$z \in \mathbb{Z}$

$x=0$ helyen: ha $2r = l+1$: $\binom{l}{\frac{l+1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{l+1}{2}} \cdot (l-1)!$

$r = \frac{l+1}{2}$

2) Másfajta feladat:



$\phi(r=R, \vartheta) =$ polinomjaik $\cos\vartheta$ -nak

P_l l-edfokú

$\Downarrow$

n-edfokú polinomok $P_0, P_1, \dots P_n$-ekből ki lehet keverni

$f(x) = \sum_{l=0}^{n} a_n x^n$ → max. n-edrendű P_l $(l \le n)$

pl. $f(x) = \underbrace{1}_{P_0} - \underbrace{x}_{P_1} = P_0 - P_1$

$P_0 = 1$

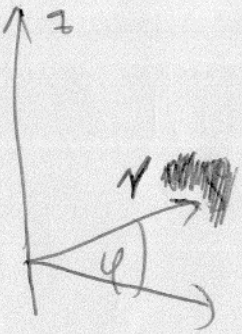
$P_1 = x$

$P_2 = \frac{x^2+1}{\dots}$

↓

ilyenkor nem kell $\int$-ni, elég kitalálni

3) Hengerkoordináták, Bessel-fv.ek:



$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Szétválasztás:

$$R(r)\cdot Q(\varphi)\cdot Z(z) = \Psi(r,\varphi,z)$$

$$\Delta\Psi = 0: \quad R'' QZ + \frac{1}{r} R' \cdot QZ + \frac{1}{r^2} R \cdot Q'' \cdot Z + RQZ'' = 0$$

$$1/RQZ \;\rightarrow\; \underbrace{\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R}}_{\text{csak } r\text{-től függ}} + \frac{1}{r^2}\cdot\underbrace{\frac{Q''}{Q}}_{\text{csak } \varphi\text{-től függ}} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{\text{csak } z\text{-től függ}} = 0$$

$$\frac{Z''}{Z} = k^2, \quad \frac{Q''}{Q} = -\nu^2 \;(\varphi) \leftarrow \text{nőjön legyen periodikus} \Rightarrow \ominus m^2$$

$$Z(z) = e^{\pm kz} \qquad Q(\varphi) = e^{\pm i\nu\varphi}$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) = 0$$

~~Bessel-egyenlet~~

Helyettesítés: $x = kr$, $\frac{d}{dr} = k\frac{d}{dx}$

$r = \frac{x}{k}$

$$\frac{k^2}{R}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 R + \frac{k}{x}\left(\frac{d}{dx}\right)R + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) = 0 \qquad /\cdot k^2 \cdot R$$

Bessel-egyenlet

$$\boxed{\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0}$$

$R(x) = x^{\alpha} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot x^j$ alakban keressük a mo.-t

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot x^{j+\alpha}$$

✓

egyenletbe visszaírva:

$$\frac{d^2R}{dx^2} = \sum_j a_j (\alpha+j)(\alpha+j-1) x^{\alpha+j-2}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dR}{dx} = \sum_j a_j (\alpha+j) \cdot x^{\alpha+j-2}$$

$$R = \sum_j a_j \cdot x^{\alpha+j}$$

$$\frac{1}{x^2} R = \sum_j a_j \cdot x^{\alpha+j-2}$$

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (\alpha+j)(\alpha+j-1) x^{\alpha+j-2} + a_j (\alpha+j) \cdot x^{\alpha+j-2} + \underbrace{a_j x^{\alpha+j}}_{a_{j-2} \cdot x^{\alpha+j-2}} - \nu^2 \cdot a_j x^{\alpha+j-2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left[(\alpha+j)(\alpha+j-1) + (\alpha+j) - \nu^2 \right] \cdot x^{\alpha+j-2} + \left(a_{j-2} \cdot x^{\alpha+j-2} + \dots + a_0 \cdot x^{\alpha} + a_1 x^{\alpha+1} \right) =$$

$$= a_0 \cdot (\alpha^2 - \nu^2) \cdot x^{\alpha-2} + a_1 \left[(\alpha+1)^2 - \nu^2 \right] x^{\alpha+1} + \sum_{j=2}^{\infty} a_j \left[(\alpha+j)^2 - \nu^2 \right] x^{\alpha+j-2} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\alpha+j}}_{\sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2} \cdot x^{\alpha+j-2}} = a_0 (\alpha^2 - \nu^2) x^{\alpha-2} + a_1 \left[(\alpha+1)^2 - \nu^2 \right] x^{\alpha+1} + \sum_{j-2}^{\infty} (\dots)$$

a Σ-ra:

$$a_j\left[(\alpha+j)^2-\nu^2\right]+a_{j-2}=0$$

$$\downarrow$$

rekurziós képlet: $a_j=\dfrac{-a_{j-2}}{(\alpha+j)^2-\nu^2}$

0-ra és 1-re:

a_0 és a_1 mindkettő nem lehet 0, mert akkor az egész sor 0.

$$\downarrow$$

I. eset:

$a_0\neq 0$ $\quad \alpha^2=\nu^2 \quad \alpha=\pm\nu$

$$\Downarrow$$

$a_1:=0$ $\quad a_j\cdot\underbrace{\left[(\alpha+j)^2-\alpha^2\right]}_{(j^2+2\alpha j)}=a_{j-2}\cdot(-1)$

$j:=2l \qquad a_j\cdot 2l\,(2l+2\alpha)=-a_{j-2}$

$$a_{2l}=-\frac{1}{4l(l+\alpha)}\cdot a_{2l-2}$$

$$\Rightarrow a_{2l}=\frac{(-1)^l}{2^{2l}\,l!}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(l+\alpha+1)}\cdot a_0$$

gamma-fv.

$$\Gamma(x):=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt$$

ha $x\geq 0$

↓

a faktoriális általánosítása

~~(tört)~~ nem egészekre

$$\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^n\,dt=n!$$

HF: belátni:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

2 HF belátni: "$x-1!$" "$x!$"

$$x\,\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$$

$$\int e^{-t}\cdot t^n \overset{\text{parc.int.}}{=} e^{-t}\left(t^n+n\,t^{n-1}+n(n-1)t^{n-2}+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\,t^{n-3}+\dots\right)$$

↑ parc. int

$$\Gamma(n+1)=n!\quad n\in\mathbb{N}$$

Γ-nak $\ominus$ egészekben pólusai vannak

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{n-m!}$$

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-l+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-l+1)}$$ (legtöbbször jelölés miatt kerül elő)

Bessel-fv-ek:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\,\Gamma(l+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\,\Gamma(l-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

6. óra

1. ZH: 1 gyr. 17. (szinek után)

1) Hengerkoord. (folyt.), Bessel-fv.-ek:

a) $\frac{d^2 J_{\pm\nu}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_{\pm\nu}}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_{\pm\nu}(x) = 0$ egyenletet elégítik ki

Ha ν nem egész: J_ν és $J_{-\nu}$ lin. függetlenek

($Q(l) = e^{\pm i\nu l}$ $\nu \in \mathbb{N}$)

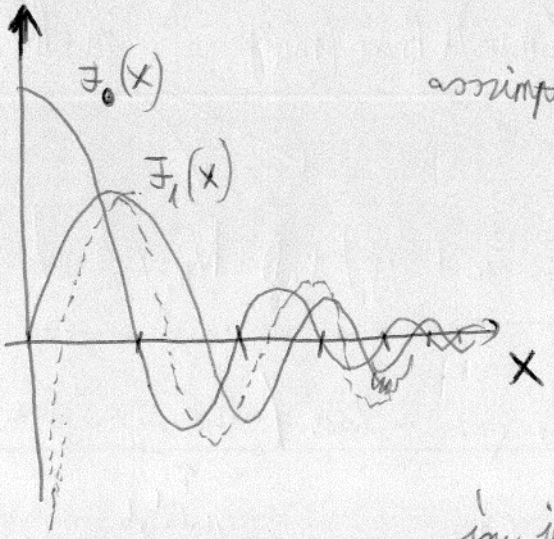
Ha $\nu = m$ egész: $J_m = (-1)^m \cdot J_{-m}$ → nem függetlenek → HF: belátni

↳ Neumann-fv: $N_\nu(x) = \dfrac{J_\nu(x)\cdot\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$, ha $\nu \notin \mathbb{N}$

N_ν megoldja azt, amit a J_ν, lin. ~~függ~~ J_ν-től.

Áll.: $\nu \to m \in \mathbb{N}$ $N_m(x)$ ~~értelmes~~ (a h.é. ~~függ~~), és

$N_m(x)$ lin ~~függ~~ $J_m(x)$ -től



asszimptot.: $J_\nu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

0-ban véges értéke van ~~ki~~nek

$x_n^{(\nu)}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

↙ így jelöljük a zérushelyét

$J_\nu(x_n^{(\nu)}) = 0$

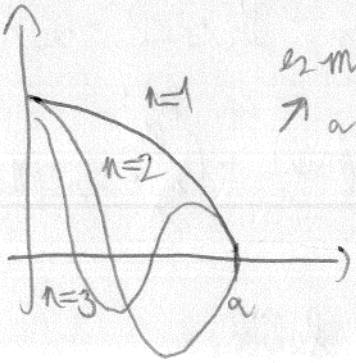
$N_0(x)$ nem reguláris az origóban

↳ és az összes Neumann-fv-re igaz

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\tau - x\sin\tau)\,d\tau \qquad (\text{ha } n \text{ egész})$$

ν rögzített, $n = 1, 2, \dots$

b) Belátható, hogy: $[0, a]$ intervallumon $\rho \in [0, a]$ $\sqrt{\rho}\cdot J_\nu\left(\frac{\rho\cdot x_n^{(\nu)}}{a}\right)$



es most ~~van~~ a Bessel-fv.

de ~~kerülhetjük~~ ρ intervallumra

← a Bessel fv-ek az adott n. zérushelyig futtatva



→ ezek a fv.-ek ortogonálisak!

$$\int_0^a \rho \cdot J_\nu\left(\frac{x_1^{(\nu)}}{a}\rho\right) \cdot J_\nu\left(\frac{x_n^{(\nu)}}{a}\rho\right) = \delta_{1n} \cdot \frac{a^2}{2}\left(J_{\nu+1}\left(x_n^{(\nu)}\right)\right)^2$$

↓

a

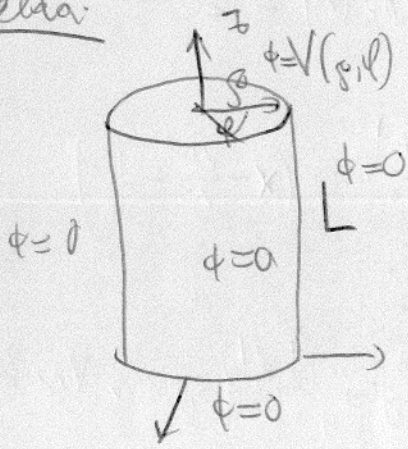
$\int_0^a$ ... $d\rho$

$J_\nu\left(\frac{x_1^{(\nu)}}{a}\rho\right) \cdot J_\nu\left(\frac{x_n^{(\nu)}}{a}\rho\right)$ — mind a Bessel-fv-nek a különböző zérushelyeivel vett fv-ek szorzatának integrálja

$\left(J_{\nu+1}\left(x_n^{(\nu)}\right)\right)^2$ — ez egy szám (nem 0, mert $x_n^{(\nu)}$ a J_ν zérushelye, nem a $\nu+1$-edik)

+ teljesek is

c) Példa:



A megoldást a kör. alakban keressük

$$\Phi(\psi) = A\sin(m\psi) + B\cos(m\psi) \qquad m \in \mathbb{N}$$

$$Z(z) = e^{\pm kz}$$

$$R(\rho) = C \cdot J_m(k\rho) + D \cdot N_m(k\rho)$$

pl. • $\Phi = 0$ alul, és $\rho < a$-ban (ahol „a" a palást)

↑ palást

• $\Phi(z = L) = V(\rho, \psi)$

$Z(z) = \sinh(kz)$, $D = 0$

↑ ↳ a Neumann-ok singulárisak

$\Phi(z = 0) = 0$

$$k_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{a} \qquad J_m\left(x_n^{(m)}\right) = 0$$

mivel $\Phi(\rho = a) = 0$

Fourier-Bessel-sor

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(k_n^{(m)} \cdot \rho\right) \sinh\left(k_n^{(m)} z\right) \cdot \left[A_{mn}^{(m)} \cdot \cos(m\psi) + B_{mn}^{(m)} \cdot \sin(m\psi)\right]$$

alul 0, palláston 0, Δ egyenlet ✓ } felül

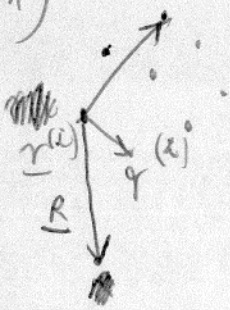
$$V(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\cdot \mathcal{J}_m(k_n^{(m)}\rho)\cdot sh(k_n^{(m)}L)\cdot\left[A_n^{(m)}\cos(m\varphi)+B_n^{(m)}\sin(m\varphi)\right]$$

$$A_n^{(m)}=\left(\frac{1}{2\pi}\int d\varphi\int_0^a d\rho\, V(\rho,\varphi)\cos(m\varphi)\,\mathcal{J}_m(k_n^{(m)}\rho)\cdot\rho\right)\cdot\frac{2}{\pi\cdot a^2\cdot\mathcal{J}_{m+1}^2(k_n^{(m)}a)}\cdot\frac{1}{sh(k_n^{(m)}\cdot L)}$$

norm. tényező

Multipólusok „gyalogosan"

1)



$q^{(i)}$ töltések $\underline{r}^{(i)}$ helykoordinátával

$$\varphi(\underline{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q^{(i)}}{|\underline{r}-\underline{r}^{(i)}|}$$

mo.: sorfejtés $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{R}|}$, $\underline{R}$ fix $|\underline{r}|\gg|\underline{R}|$

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{R}|}=\frac{1}{r}+(-R_k)\cdot\partial_k\cdot\frac{1}{r}+\frac{1}{2}R_kR_l\,\partial_k\partial_l\cdot\frac{1}{r}$$

összítés, dipól, kvadrupól

$$\partial_k\frac{1}{r}=\frac{1}{r^2}\delta_{ij}\,\partial_k r=-\frac{r_k}{r^3}=-\frac{n_k}{r^2}\qquad \underline{n}:=\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

$$\partial_k\partial_l\frac{1}{r}=\frac{3r_kr_l-r^2\delta_{kl}}{r^5}=\frac{3n_kn_l-\delta_{kl}}{r^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\underline{r}-\underline{R}|} = \frac{1}{r} + \frac{(\underline{n}\underline{R})}{r^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3(\underline{n}\underline{R})^2 - R^2}{r^3} + \dots$$

$$\downarrow$$

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q^{(i)}\left(\frac{1}{r} + \frac{\underline{n}\,\underline{r}^{(i)}}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{3(\underline{n}\,\underline{r}^{(i)})^2 - r^{(i)2}}{r^3} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\underbrace{\sum_i q^{(i)}}_{Q}\Big)\cdot\frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\underbrace{\sum_i q^{(i)}\underline{r}^{(i)}}_{\underline{d}\ \text{(dipól-mom. vektor)}}\Big)\cdot\frac{\underline{n}}{r^2} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n_k n_\ell}{r^3}\underbrace{\sum_i q^{(i)}\left(3r_k^{(i)}r_\ell^{(i)} - r^{(i)2}\cdot\delta_{k\ell}\right)}_{Q''_{k\ell}\ \text{(kvadrupól-mom. tenzor)}} + \dots$$

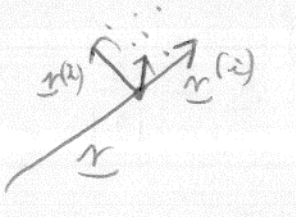
integrálra is ugyanígy lennének

a dipól és kvadrupól-momentumok a $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^3}$-ös tagot jellemzik

$$\underline{\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\underline{d}\,\underline{n}}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\underline{n}\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{n}}{r^3} + \dots\right)}$$

2) Töltésrendszer külső térben

$\underline{E}(\underline{r})$ $\qquad \underline{F} = \sum_i q^{(i)}\underline{E}(\underline{r}+\underline{r}^{(i)}) = \sum_i q^{(i)}\cdot E_k(\underline{r}+\underline{r}^{(i)}) =$ $\qquad F_k$



$$= \sum_i q^{(i)}\left(E_k(\underline{r}) + r_\ell^{(i)}\partial_\ell E_k(\underline{r}) + \frac{1}{2}r_\ell^{(i)}r_m^{(i)}\partial_\ell\partial_m E_k(\underline{r}) + \dots\right) =$$

—44—

$$= \left(\sum_i q^{(i)}\right) \cdot E_k(r) + \left(\sum_i q^{(i)} r_\ell^{(i)}\right) \partial_\ell E_k + \frac{1}{2} \sum_i q^{(i)} \left(r_\ell^{(i)} r_m^{(i)} - \frac{1}{3} r^{(i)2} \delta_{\ell m}\right) \cdot$$

$$\cdot \partial_\ell \partial_m E_k + \frac{1}{2} \left(\sum_i q^{(i)} \cdot \frac{1}{3} r^{(i)2}\right) \cdot \underbrace{\delta_{\ell m} \partial_\ell \partial_m E_k}_{0, \text{ mert } \Delta\varphi = 0} + \dots =$$

↑ ez vontuk ki fentről

$$= F_k = Q \cdot E_k(r) + d_\ell \cdot \partial_\ell E_k + \frac{1}{6} Q_{\ell m} \partial_\ell \partial_m E_k + \dots$$

$$\underline{F} = Q\underline{E} + (\underline{d}\nabla)\underline{E} + \frac{1}{6}\nabla(\underline{Q}\cdot\nabla\underline{E}) \dots$$

$\underline{d}$ grad $\underline{E}$

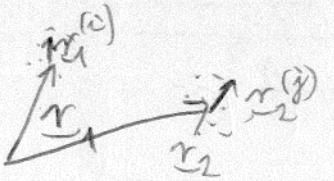
↙ hom. ter rem hat

dipólusra

$$(\underline{M} = \underline{d} \times \underline{E})$$

3) Energia (2 töltésrendszer) (k. hatása)

$$\left(E_n = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{2 töltésre}\right) \qquad \frac{1}{|\underline{r}-\underline{R}|} = \frac{1}{r} + \frac{\underline{1}\underline{R}}{r^2}$$



$$E_n = \sum_i \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1^{(i)} \cdot q_2^{(j)}}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2 + \underline{r}_1^{(i)} - \underline{r}_2^{(j)}|} =$$

$$= \sum_{ij} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1^{(i)} \cdot q_2^{(j)} \cdot \left(\frac{1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} + \frac{(\underline{r}_2^{(j)} - \underline{r}_1^{(i)})(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} + \dots\right) =$$

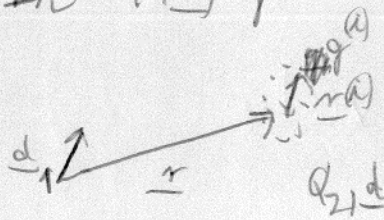
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\sum_i q_1^{(i)}\right)\left(\sum_j q_2^{(j)}\right) \cdot \frac{1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{ij} q_1^{(i)} q_2^{(j)} \frac{\underline{r}_2^{(j)}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) - \underline{r}_1^{(i)}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} + \dots$$

$= \ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\sum_i q_1^{(i)}\right)}_{Q_1}\cdot\frac{\sum_j \underline{d}_2 q_2^{(j)}\underline{r}_2^{(j)}\cdot(\underline{r}_1-\underline{r}_2)}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\sum_j q_2^{(j)}\right)}_{Q_2}\frac{\sum_i \underline{d}_1 q_1^{(i)}\underline{r}_1^{(i)}\cdot(\underline{r}_1-\underline{r}_2)}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^3}$

↓ a további sorfejtésből jelenik meg a $\underline{d}_1\cdot\underline{d}_2$ tag

Másik levezetés: most az egyik rendszer egy hat. dipólus

$E_{\text{h}} = q\,\varphi(\underline{r})$ $\qquad \varphi(\underline{r}) = \frac{\underline{n}\,\underline{d}_1}{r^2}$



$E_{\text{h}} = \sum_i q^{(i)}\varphi(\underline{r}+\underline{r}^{(i)}) = \underbrace{\left(\sum_i q^{(i)}\right)}_{Q_2}\varphi(\underline{r}) + \underbrace{\sum_i q^{(i)}\underline{r}_k^{(i)}}_{\underline{d}_2}\partial_k\varphi(\underline{r}) + \ldots =$

$\varphi(\underline{r}) = \frac{\underline{d}_1\underline{r}}{r^3}$

$= Q_2\,\varphi(\underline{r}) + \underline{d}_2\nabla\varphi(\underline{r}) = (*)$

most:

$\partial_k\frac{r_\ell}{r^3} = -\frac{3r_k r_\ell - r^2\delta_{k\ell}}{r^5}$

$\partial_k\frac{d_{1\ell}r_\ell}{r^3} = d_{1\ell}\partial_k\frac{r_\ell}{r^3} = -\frac{3r_k r_\ell - r^2\delta_{k\ell}}{r^5} = -\frac{3r_k(\underline{d}_1\underline{r}) - r^2(d_1)_k}{r^5}$

$\underline{n} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$

$(*)\quad E_{\text{h}} = -\frac{3(\underline{d}_1\underline{r})(\underline{d}_2\underline{r}) - r^2(\underline{d}_1\underline{d}_2)}{r^5} = -\frac{3(\underline{d}_1\underline{n})(\underline{d}_2\underline{n}) - \underline{d}_1\underline{d}_2}{r^3}$

$-Q_2\,\varphi(\underline{r})$

6. óra

Múlt órai feladatsor 5. feladatát nem lehet egyszerűen megoldani.

Dielektrikumok

0) Egyenletek:

$$\nabla \underline{D} = \rho$$

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \qquad \underline{E} = -\nabla \phi$$

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$\underline{P}$: polarizációs sűrűség (egyégnyi térf.-ban lévő dipólmom.)

$$\underline{P} = \chi \varepsilon_0 \underline{E}$$ (nemlineáris optika $\underline{P} \simeq \underline{E}^2$)

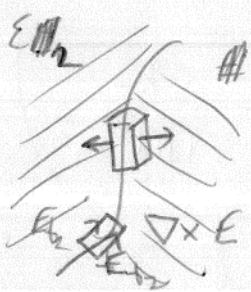
χ: lehet tenzor is; sorfejtési 1. tagig nemlineárisra is lehet

$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \qquad \varepsilon_r = 1 + \chi$$

Homogén térrészben, lin. közeg: $\Delta \phi = 0$, mert $\underline{D} = -\varepsilon \nabla \phi$

→ 1 töltés tere: $\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r}$ (× ε_0)

Határfeltételek → ezek lesznek mások



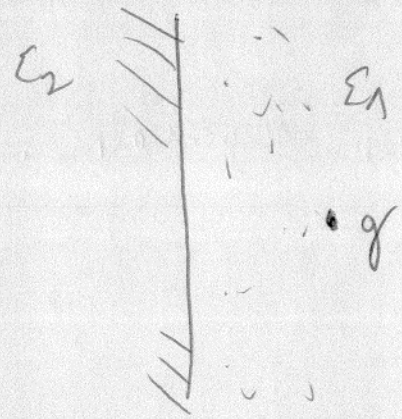
$\nabla \times \underline{E}$ = terület $(E_{t_1} - E_{t_2})$

$$E_{t_1} = E_{t_2} \quad \leftarrow \text{rot } \underline{E} = 0$$

$$D_{n_1} = D_{n_2} \quad \text{ha } \rho = 0 \text{ a határon}$$

↖ div $\underline{D} = 0$

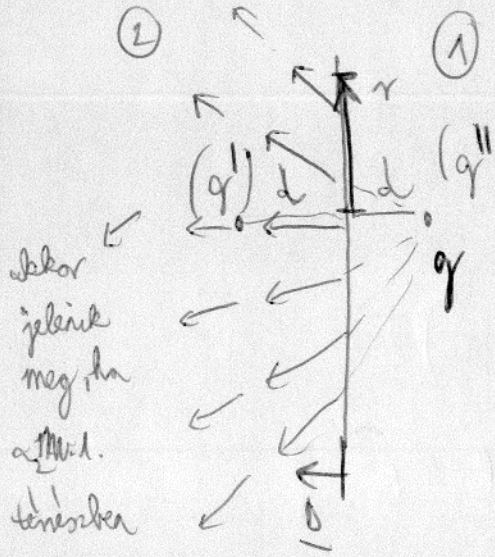
1 pont)



homogén térrészben $\Delta\varphi = 0$ igaz

↓

ha találunk potenciált, ami tudja, hogy $\Delta\varphi = 0$, kivéve q helyén ($\Delta\varphi = q$), és a határfeltételeket is tudja, az jó (töltéstükör.)



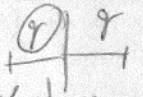
ekkor jelenik meg, ha a 2. térrészben vagyunk

ha a 2. térrészben vagyunk, úgy vesszük, mintha csak ponttöltések → $\Delta\varphi = 0$ ✓

q helyén q'' lenne

ehh r

hasonlóan egyszerű tükrözött. Ekkor nem fogl. vele, hogy a III térben mi van, feltesszük, hogy ebből a másik térrészbe csak



② térben:

$$E_{2tang} = |\underline{E}_2| \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}} = \frac{q'' r}{(r^2+d^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}$$

$$E_{1tang} = \frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}} \cdot \left(\frac{q}{r^2+d^2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} + \frac{q'}{r^2+d^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \frac{(q+q')r}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

~~$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$~~

$$D_{n2} = \frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}} \frac{q''}{4\pi} \frac{1}{d^2+r^2}$$

$$D_{n1} = \frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}} \cdot \left(\frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{d^2+r^2} - \frac{q'}{4\pi d^2+r^2} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{(d^2+r^2)^{3/2}} \cdot (q-q')$$

$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2} \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}} = \frac{q+q'}{4\pi\varepsilon_1} \cdot \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}} \rightarrow \boxed{\varepsilon_1 q'' = \varepsilon_2 (q+q')}$

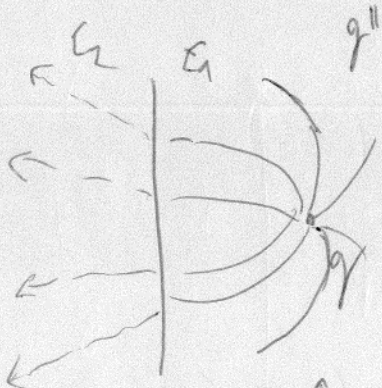
$D_{n_1} = D_{n_2} \Rightarrow \frac{q'}{4\pi} \frac{d}{(r^2+d^2)^{3/2}} = \frac{q-q'}{4\pi} \cdot \frac{d}{(d^2+r^2)^{3/2}} \rightarrow \boxed{q'' = q - q'}$

$q' = q \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ ←

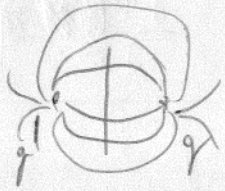
$q'' = q \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$

↓

Ha ezt az egyenletet a töltések kielégítik, akkor megoldottuk a feladatot

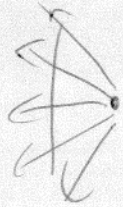


↑ ez a tér úgy érzi, mintha

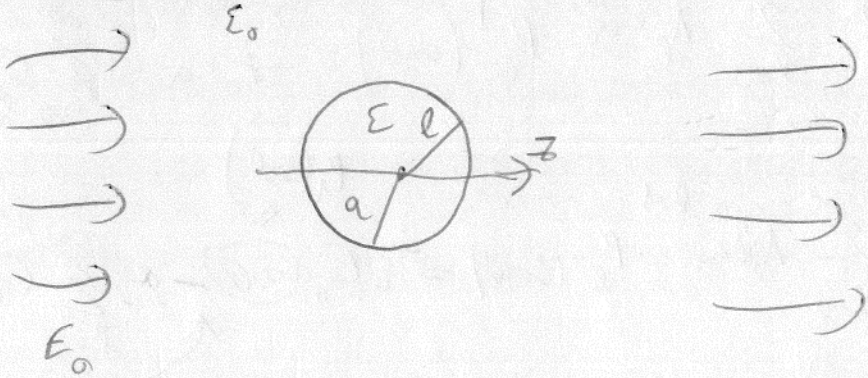


2-töltés lenne

↓ ez a tér úgy érzi, mintha ilyen töltésekr. lenne



2) **dielektromos gömb:**



a kinti ← tért is így írjuk fel

$\Psi_{kint} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[B_\ell r^\ell + C_\ell r^{-(\ell+1)} \right] P_\ell(\cos\theta)$

$\Psi_{bent} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[A_\ell r^\ell \right] P_\ell(\cos\theta)$ ← bent $r^{-(\ell+1)}$ szing. lenne

} tengelyszimm. Leg. polinom megoldása a Δ-ra

(Határfelt.:)

$\Phi_{kint}(r\to\infty) = -E_0 z$ (homogén tér, mintha a gömb sem lenne)

$= -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta)$ ← $P_1(x)=x$

$\Downarrow$

$B_1 = E_0$

a magasabb indexű B_ℓ-k eltűnnek

$$\Phi_{kint} = -E_0 r\cos\theta + \sum_\ell C_\ell r^{-(\ell+1)} \cdot P_\ell(\cos\theta)$$

Határfelt.:

$$\neq \frac{1}{a}\left.\frac{\partial \Phi_{kint}}{\partial\theta}\right|_{r=a} = \neq \frac{1}{a}\cdot\left.\frac{\partial \Phi_{kint}}{\partial\theta}\right|_{r=a} \Leftarrow E_{t1} = E_{t2}$$

$$\left.-\varepsilon\frac{\partial\Phi_{kint}}{\partial r}\right|_{r=a} = -\varepsilon_0\left.\frac{\partial\Phi_{kint}}{\partial r}\right|_{r=a} \Leftarrow D_{n1} = D_{n2}$$

$$= -E_0\cdot a\cdot \overbrace{P_1'(\cos\theta)}^{1}$$

(**) $\frac{\partial}{\partial\theta} \approx \frac{\partial}{\partial\cos\theta}$ $\Rightarrow$ $\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \cdot a^\ell P_\ell'(\cos\theta) = \overbrace{-E_0\cdot a}^{P_1'(\cos\theta)} + \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell\cdot a^{-(\ell+1)} P_\ell'(\cos\theta)$

$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\cos\theta}\cdot\underbrace{\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}}_{-\sin\theta}\right)$

$\varepsilon\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \ell a^{\ell-1}\cdot P_\ell(\cos\theta) = \varepsilon_0 E_0 \overbrace{\cos\theta}^{P_1(\cos\theta)} - \varepsilon_0\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell\cdot(\ell+1)\cdot a^{-(\ell+2)} P_\ell(\cos\theta)$

↑ ez mindkét 2d. Riesz (**)

→ Belátható, hogy $P_\ell' \perp P_{\ell^*}'$ $(\ell\neq\ell^*)$ → a Leg.-polinomok deriváltjai is ortogonálisak → a megf. együtthatókat leolvashatjuk

(*) $l=1$

$$-\varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 C_1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{a^3} = \varepsilon A_1 \rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} A_1 = -\left(E_0 + 2C_1 \cdot \frac{1}{a^3}\right)$$

(*) $l \neq 1$

$$A_l \cdot l \, a^{l-1} \cdot \varepsilon = -\varepsilon_0 \cdot C_l (l+1) \cdot \underbrace{a^{-(l+2)}}_{a^{-l-2}} \rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} A_l = -\frac{l+1}{l} C_l a^{-(2l+1)}$$

(**) $l \neq 1$

$$A_l a^l = C_l \cdot a^{-(l+1)} \rightarrow A_l = C_l \cdot a^{-(2l+1)}$$

(**) $l=1$

$$a \cdot A_1 = -a \cdot E_0 + \frac{C_1}{a^2} \rightarrow a A_1 = -a E_0 + \frac{C_1}{a^3}$$

$$\downarrow$$

$$A_1 = -\frac{3}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} a^3 E_0$$

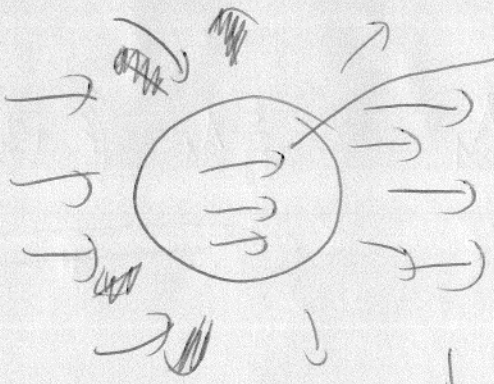
$A_l = C_l = 0$, ha $l \neq 1$

$$\Phi_{bent} = -\frac{3}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2} E_0 r \cos\theta = -\frac{3}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2} E_0 \cdot z$$

bent is homogén lesz, csak kisebb, mint kívül

$$\Phi_{kint} = -E_0 r \cdot \cos\theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cdot \frac{a^3}{r^2} \cos\theta$$

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 a^3 \cdot \frac{z}{r^3}$$



belül olyan, mintha homogén lenne

↓

kívül olyan a tér, mintha egy dipólust szuperponáltunk volna a térre

Magnetosztatika

1) Vákuum:

$\nabla \underline{B} = 0 \rightarrow \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

$\nabla \times \underline{B} = \mu \underline{j} \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \mu_0 \underline{j}$

$\nabla \underline{j} = 0$ (sztatika)

$\nabla (\nabla \underline{A}) - \Delta \underline{A} = \mu_0 \underline{j}$

($\nabla \underline{A} = 0$ Coulomb-mértéke)

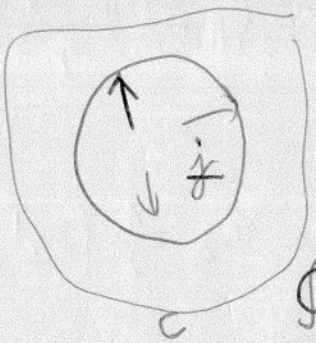
$\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d\underline{r}' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \sim \Phi(\underline{r}) = \dots$$

Biot-Savart-tv.: $$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \frac{\underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

2) Mágneses momentum:

a)



$k(\underline{r}), g(\underline{r}), \underline{j}(\underline{r})$ tetsz. $k(\underline{r}), g(\underline{r}) - re$

$$\oint_C k(\underline{r})\, g(\underline{r})\, \underline{j}(\underline{r})\, d\underline{A} = 0$$

$$\int dV\, \nabla(k g \underline{j}) = 0$$

$$\int dV \{ \nabla k \cdot g \cdot \underline{j} + \nabla g \cdot \underline{j} k + \underbrace{k g \cdot \overbrace{\mathrm{div}\, \underline{j}}^{0}}_{0} \} = 0$$

Legyen: $k = r_k \quad g = 1$

$$\boxed{\int dV\, \underline{j} = 0}$$

→ „a térfogatban az áramoknak nincs „globális iránya"



$g = r_e \quad k = r_k$

$$\int dV \{ \delta_{mk} r_e j_m + \delta_{me} r_k j_m \} = 0$$

$$\int dV\, (r_e j_k + r_k \cdot j_l) = 0$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}'\, \underline{j}(\underline{r}') \left(\frac{1}{r} + \underline{r} \frac{\underline{r}'}{r^3} + \dots \right) \approx$$

$$= \cancel{\frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}'\, \underline{j}(\underline{r}') \cdot \frac{1}{r}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int d\underline{r}' \cdot j_k r_e' \right) \cdot \frac{r_e}{r^3} = (*)$$

$\uparrow$

$$\int dV\, \underline{j} = 0$$

$$\textcircled{*} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\int d\underline{r}'\,(j_k r_e' - j_e r_k')\right]\frac{r_e}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\varepsilon_{kem}\, m_e\, r_m}{r^3}$$

$\int dV\,(r_e j_k + r_k j_e)$

ahol $m_k = \frac{1}{2}\int d\underline{r}'\,\varepsilon_{kem}\, r_e' j_m$

$\underline{m}$: mágn. mom. def.

b) Erőhatás a mágn. mom.-ra

$F = q\,\underline{v}\times\underline{B} \qquad \underline{f} = \underline{j}\times\underline{B}$

$$F = \int d\underline{r}'\,\underline{j}(\underline{r}')\times\underline{B}(\underline{r}+\underline{r}')$$

konst.

$\int d\underline{r}'\,\underline{j}(\underline{r}')\,B_m(\underline{r}) = 0$

$$F_k = \int dr'\,\varepsilon_{kem}\, j_e(\underline{r}')\left[B_m(\underline{r}) + r_p'\,\partial_p B_m(\underline{r}) + \ldots\right] =$$

sorfejtés

$$= \varepsilon_{kem}\,\partial_p B_m(\underline{r})\cdot\int d\underline{r}'\, r_p' j_e(\underline{r}') = \varepsilon_{kem}\,\partial_p B_m(\underline{r})\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}\int d\underline{r}'\left\{r_p' j_e(\underline{r}') + r_e' j_p(\underline{r}')\right\} = \textcircled{*}$$

mert: $\varepsilon_{kem}\, m_m = \underbrace{\varepsilon_{kem}\,\varepsilon_{mpq}}_{\delta_{kp}\delta_{eq} - \delta_{kq}\delta_{ep}}\cdot\frac{1}{2}\int d\underline{r}'\, r_p' j_q = \frac{1}{2}\int dr'\cdot(\delta_{kp}\delta_{eq} - \delta_{kq}\delta_{ep})\, r_p' j_q$

$$\textcircled{*} = \varepsilon_{kem}\,\partial_p B_m\,\varepsilon_{peq}\, m_q = \partial_p B_m\, m_q\,\underbrace{\varepsilon_{mke}\,\varepsilon_{eqp}}_{(\delta_{mq}\delta_{kp} - \delta_{mp}\delta_{kq})} = \partial_p B_m\, m_q -$$

$= \partial_k B_{qi} m_q - m_k (\partial_i B_q)$

$\operatorname{div} B = 0$

$F_k = (\partial_k B_q) \cdot m_q$ $\quad \underline{F} = (\operatorname{grad} B)\cdot \underline{m}$ $\quad$ Amikor $\operatorname{rot} \underline{B} = 0$;

$\partial_k B_q = \partial_q B_k$

$= (\underline{m}\nabla)\underline{B}$

$\underline{f} = (\underline{d}\,\nabla)\underline{E}$ $\quad$ el. dipólra ható erő $\parallel$

Szupravezető felett lebegő (test) dipólus



$\underline{B} = \dfrac{3(\underline{m}\,\underline{n})\,\underline{n} - \underline{m}}{r^3}$, $\underline{n} = \dfrac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$

$\nabla \underline{B} = 0$ és $B_{\text{bent}} = 0$

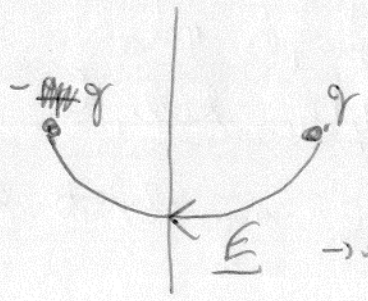
kint $\underline{B} = 0$ $\quad \perp$

(mert ha bent is 0, és a felületen csak → innen folyhat)

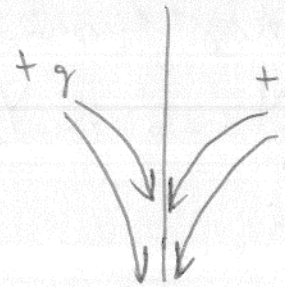
↓ ↓

nem lehet ugrása

~ tükörtöltés



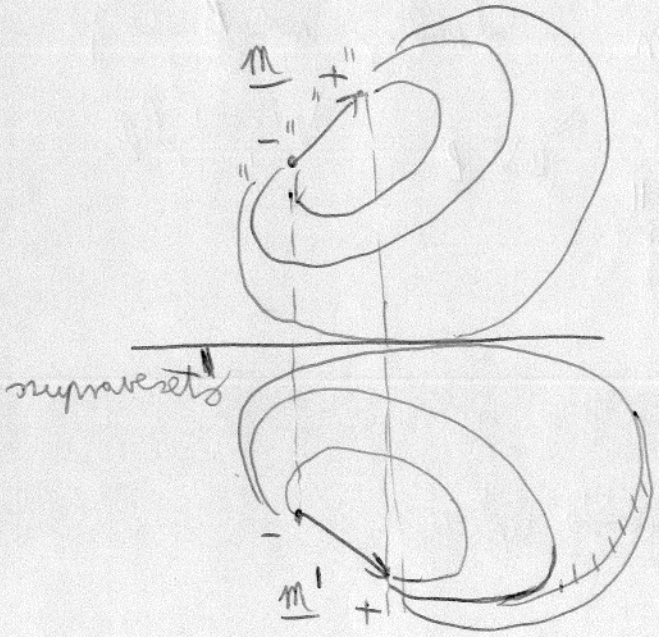
→ eltűnik a $\parallel$-os komponens



→ eltűnik a normális komponens

⇓

most hasonló a probléma → a mágneses dipólust tükrözzük (mintha 2 mágn. „monopólus lenne)



⇒ a 2 dipólus (a valódi és a fiktív) egymásra hat
- erővel
- forgatónyomatékkal

de → irányú erő hathat

hasonlóan nem sík felületre



más nagyságú, és más irányú dipólus kell, de tükrözéssel meg lehet oldani

- P_l^m-ek közül m-ekre önmagukban nem ortogonálisak, ezért vesszük be mellékjük a $P_l^m \cdot e^{im\varphi}$ -t $\sim Y_{lm}$

Y_{lm}-ek már ortogonálisak m, m'-re is

$$\int Y_{lm} Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

1. óra

- máj. 10 (csütö) 10^{00}
- máj. 15 2. zh. 16^{00}
  - ↳ javító vizsgaidőszak 1. hetében
    - ↘ pótolni nem lehet
- máj. 23 (?) pótzh
- jún. 8-án UV

Hullámok

Maxwell) $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ $\quad D = \varepsilon E \quad B = \mu H$

$\nabla \times B = \mu j + \varepsilon\mu \frac{\partial E}{\partial t}$ $\quad (\mu = \mu_0 \cdot \mu_r)$ ← lineáris közegekben számolunk

$\nabla \underline{B} = 0$

$\nabla \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

Hullámvezetők (waveguide)



tökéletes vezetőkben $\rightarrow E = 0$ $\quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}$

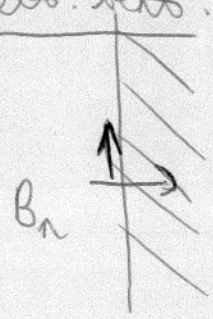
$(\sigma$ nagy$) \rightarrow B = 0$

→ határfelt. feltét: $E = 0$

$B = 0$

(üregrezonátor: cavity)

határfelt. feltét:

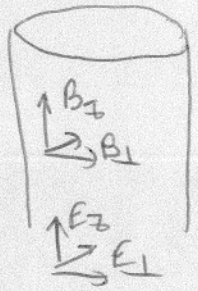


vezető $\quad B_n = 0 \quad$ ($B_{tang} \neq 0$ felületen)

↓

a skin (eff.) csak lecsengést jelent

$E_{\parallel} = 0$



$\underline{e}$ z irányú egységvektor

$\underline{E} = \underline{E}(\underline{r})\, e^{-i\omega t}$

$\underline{B} = \underline{B}(\underline{r})\, e^{-i\omega t}$

↓

mostantól $\underline{E}, \underline{B}$ csak a helyfüggő részt jelöli

$\nabla \underline{E} = 0$

$\nabla \underline{B} = 0$

$\nabla \times \underline{E} = i\omega \underline{B}$

$\nabla \times \underline{B} = -i\omega\varepsilon\mu \underline{E}$

$\nabla \times$,

$\operatorname{div} \underline{E} = 0$

$\nabla \times (\nabla \times \underline{V}) = \nabla(\nabla \underline{V}) - \Delta \underline{V}$

$(\Delta + \mu\varepsilon\omega^2)\underline{E} = 0$

$(\Delta + \mu\varepsilon\omega^2)\underline{B} = 0$

$\underline{E} = E_z \cdot \underline{e} + \underline{E}_T$ → transzverz. komp.

$\underline{B} = B_z \cdot \underline{e} + \underline{B}_T$

$\nabla_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$

$\nabla_T \cdot \underline{E}_T = -\frac{\partial E_z}{\partial z}$

$\nabla_T \underline{B}_T = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$

→ rekkel kijön:

I. $\frac{\partial \underline{E}_T}{\partial z} + i\omega(\underline{e}_z \times \underline{B}_T) = \nabla_T E_z$, III. $\underline{e}_z(\nabla_T \times \underline{E}_T) = i\omega B_z$

II. $\frac{\partial \underline{B}_T}{\partial z} - i\omega\varepsilon\mu(\underline{e}_z \times \underline{E}_T) = \nabla_T B_z$, IV. $\underline{e}_z(\nabla_T \times \underline{B}_T) = -i\omega\varepsilon\mu E_z$

$\underline{E} = \underline{E}(x,y)\, e^{\pm ikz}$

$\underline{B} = \underline{B}(x,y)\, e^{\pm ikz}$

} z irányban „hullámszerűen" terjedő hullámokat keresünk

↓

$\frac{\partial}{\partial z} \to \pm ik$

$\underline{e}_z \times$ I, $\leftarrow E_z$ ... $\underline{E}_T = \frac{i}{\mu\varepsilon\omega^2 - k^2}\left[k\nabla_T E_z + \omega \underline{e}_z \times \nabla_T B_z\right]$

$\underline{B}_T = \frac{i}{\mu\varepsilon\omega^2 - k^2}\left[k\nabla_T B_z + \omega\mu\varepsilon(\underline{e}_z \times \nabla_T E_z)\right]$

Tovább:

$(\Delta + \mu\varepsilon\omega^2)\underline{E} = 0$

$(\Delta + \mu\varepsilon\omega^2)\underline{B} = 0$

} ez a transzverzális és z irányú komponensekre is igaz ⇒ z irányúra megoldjuk → $\underline{E}_T, \underline{B}_T$

TE: $B_z = 0 \to E_z = ?$ $\quad E_z|_{S\,(\text{határon})} = 0$ $\quad E_z = ?$

TM: $E_z = 0 \to B_z = ?$ $\quad B_\perp = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_S = 0$ $\quad B_z = ?$



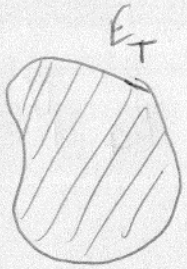
(TEM - módusok : $B_z = 0$, $E_z = 0$)

$\nabla_T \underline{E}_T = 0 \quad (x,y)$

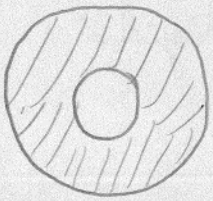
$\nabla_T \underline{B}_T = 0 \quad (x,y)$

$\nabla_T \times \underline{E}_T = 0$

$\nabla_T \times \underline{B}_T = 0$



→ ilyenben nem létezik TEM, mert ha $\nabla_T \underline{E}_T = 0$, $E_T = 0$ a határon csak így lehet, ha $\forall$ hol 0 az $\underline{E}$



TE: $E_z|_S = 0$ $E_z = ?$ $\quad (\Delta_T + \mu\varepsilon\omega^2)\,\underline{E}_z = 0$

$$E_z = E_z(x,y)\cdot e^{\pm ikz} \rightarrow \left[\Delta_T + \overbrace{(\mu\varepsilon\omega^2 - k^2)}^{\gamma^2}\right] E_z(x,y) = 0$$

Sajátértékek: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ $\quad \underline{(\Delta_T + \gamma^2)\,E_z = 0}$

γ_λ: $k_\lambda^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - \gamma_\lambda^2$ $\quad \underline{\quad} > 0 \rightarrow \exists$ hullám

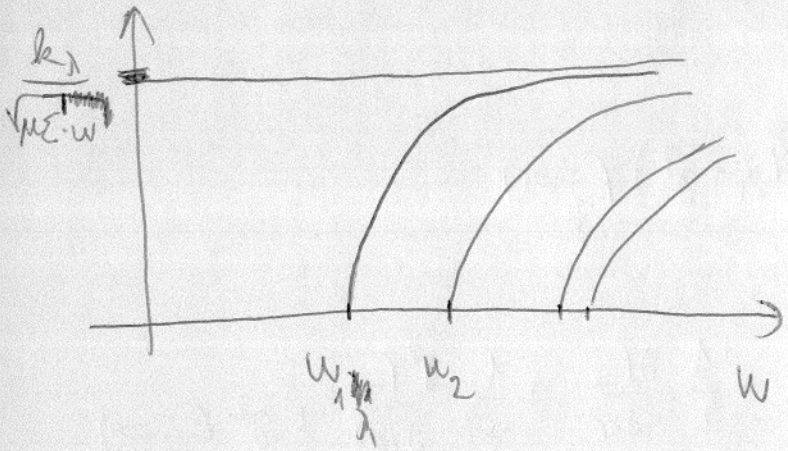
$< 0 \rightarrow$ lecsengés → nincs ilyen hullám

↓

levágási frekvencia (ha ω kicsi ↑)

$\omega_\lambda = \dfrac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\cdot\varepsilon}} = \gamma_\lambda \cdot c_{közeg}$ adott módusra!

ω_λ levágás

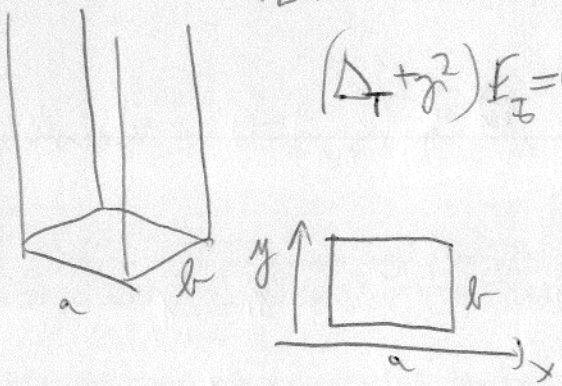


$$\frac{k_\lambda}{\sqrt{\mu\varepsilon}\cdot\omega} = \sqrt{1-\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}}$$

$$k_\lambda = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 - \gamma_\lambda^2}$$

↘ különb. módusokon más lesz a levágási frekvencia

100) Példa:



+E:

$$(\Delta_T + \gamma^2) E_z = 0 \qquad E_z\big|_S = 0$$

$$E_z = E_0 \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\Delta_T E_z = -\left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] E_z$$

↓

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

TM: $\left(\Delta_T + \gamma^2\right) B_z = 0$

$$\frac{\partial B_n}{\partial n}\bigg|_S = 0 \qquad B_z = B_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

↓

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

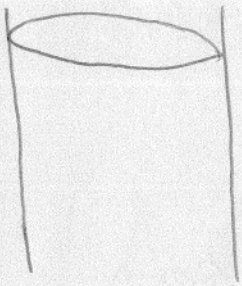
$m, n = 0, 1, 2, \ldots$

↓

mindkettő $\neq 0$, mert akkor az egyenlet

2) Példa 2:

(Henger) . TE=? $E_z \quad (\Delta_T + \gamma^2) E_z = 0$



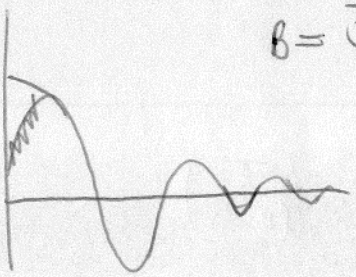
$$\frac{\partial E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 E_z = 0$$

$$E_z(r,\varphi) = R(r)\, e^{\pm i m \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} R + \gamma^2 R = 0$$

helyettesítés: $x = \gamma \cdot r$ ↓ Bessel-egyenlet

$R = \mathcal{F}_m(\gamma r)$

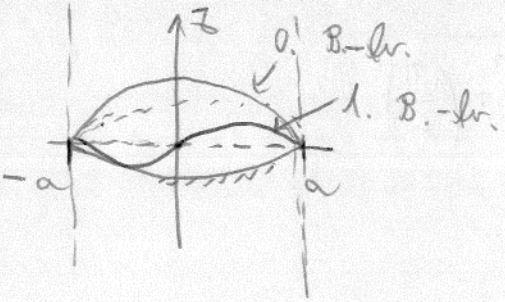


$x_{mn} \Rightarrow \mathcal{F}_m(x_{mn}) = 0$ zérushelyek



$$\gamma_{mn} = \frac{x_{mn}}{a} \qquad m = 0, 1, \ldots \qquad n = 1, \ldots$$

legkisebb fraki → 0. Bessel-fv. → m=0 → nincs φ függés

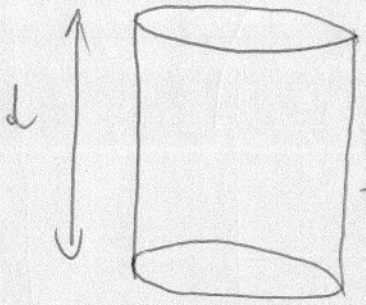


- TM: $(\Delta_T + \gamma^2) B_z = 0 \qquad \frac{\partial B_z}{\partial n} = 0$

hasonlóan TE-hez, csak más zérushelyek a deriváltak eltűnése miatt

$$\gamma_{mn} \rightarrow \mathcal{F}'_m(\gamma_{mn}) = 0 \rightarrow B_z = \mathcal{F}_m(\gamma r)\, e^{\pm i m \varphi} \qquad \gamma_{mn} = \frac{y_{mn}}{a}$$

II) Üregrezonátorok (~ lecsapott végű hullámvezető)



TE: $E_z \to E_{z,T} = 0$ $\to \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ } fedlapokon

TM: $B_z \to B_z = 0$ ~ fedlapon

(konstans is lehetne)

(de x,y függésnél biztos nem ilyet ad)

$$\nabla_T E_T = -\frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad e^{ikz} \to A\cos(kz) + B\sin(kz)$$

TE: $E_z = E_z(x,y)\cos(kz)$, $k = \frac{n\pi}{L}$ $n = 0, 1, \dots$

TM: $B_z = B_z(x,y)\sin(kz)$, $k = \frac{m\pi}{L}$ $m = 1, 2, \dots$

→ z irányú hullámszám sem vehet fel tetszőleges értéket

TE: $(\Delta_T + \gamma^2) E_z = 0 \to \gamma_\lambda$ $\lambda = 1, 2, 3, \dots$

$$k_\lambda^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - \gamma_\lambda^2 \to \omega^2 = \frac{\gamma_\lambda^2 + k^2}{\mu \cdot \varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{\lambda n}^2 = \frac{\gamma_\lambda^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{\mu\varepsilon}$$

⊢

= az üregrezonátornak határozott frekvenciája van

8. óra

2. ZH: Magnetosztatika
Bessel-fv.
hullámvezető / integrációtor
"indukció"

javító ZH 10 óra, 7.59 terem (gyak. helye)

1) Hullámvezetők (folyt.)

$$\underline{E} = \underline{E}(x,y) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{ikz}$$

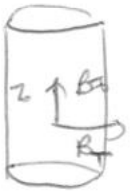
$$\left(\underbrace{\Delta_T}_{\text{2D-s Lapl.}} + \gamma^2\right) \begin{pmatrix} \underline{E}(x,y) \\ \underline{B}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \mu \cdot \varepsilon \omega^2 - k^2$$

TM: $B_z = 0$, $E_T = ?$, $E_z|_{\text{határon}(S)} = 0$

TE: $E_z = 0$, $B_z = ?$ $\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_{\text{határon}(S)} = 0$

TEM: $E_z = 0$, $B_z = 0$



$$\nabla_T \underline{E}_T = -\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\nabla_T \underline{B}_T = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \underline{E}_T}{\partial z} + i\omega \underline{e} \times \underline{B}_T = \underline{\nabla}_T E_z \qquad \underline{e}\left(\underline{\nabla}_T \times \underline{E}_T\right) = i\omega B_z$$

$$\frac{\partial \underline{B}_T}{\partial z} - i\mu\varepsilon\omega \cdot \underline{e} \times \underline{E}_T = \underline{\nabla}_T B_z \qquad \underline{e}\left(\underline{\nabla}_T \times \underline{B}_T\right) = -i\varepsilon\mu\omega E_z$$

ha $E_z, B_z = 0$

$\Downarrow$

$0 = \nabla_T \times \underline{E}_T \parallel \underline{E}_T$ és $0 = \nabla_T \underline{E}_T$

TEM:

$\gamma^2 = 0 \rightarrow \mu\varepsilon\omega^2 = k^2$

$\downarrow$

vákuum: $\omega = ck$

$\downarrow$

nincsen leállása, minden frekvencián a közegbeli fénysebességgel terjed

$\underline{E}_T = -\underline{\nabla}_T \Phi_T$

$\downarrow$

$\Delta_T \Phi_T = 0$

TEM hullámvezetőben csak úgy lehet, ha



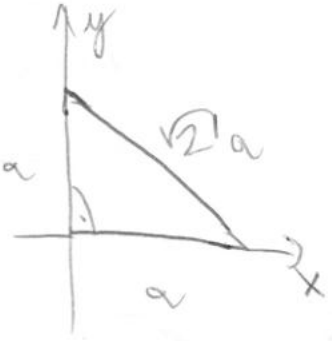
nem egyszeresen összefüggő tartomány

térünk

(l. előző gyak)

(pl. koaxiális kábel)

2)



TM $=$? $E_z = ?$ $\quad (\Delta_T + \gamma^2) E_z = 0$ határon $E_z = 0$

$E_z = \sum_{m,n} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$ ← önmagában a sin(·)·sin(·) fv. nem lehetne kielégíteni

ilyen alakban keressük a mo. $\rightarrow$ (Fourier sorbafejtés)

$\Downarrow$

$x = 0$-ban és $y = 0$-ban biztos jó $\rightarrow$ 2 db π tényező a 3. feltétel miatt

$\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$: $\Delta_T = -\left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) = -\frac{\pi^2}{a^2}(n^2+m^2)$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\circledast}$

↑ ez lesz a sajátértéke a $\circledast$ próbafv.-ünknek a Δ_T op.-ra

$(\Delta_T+\gamma^2)E_z=0$

⇓

E_z akkor lesz sajátfv., ha ~~a kifejtésének a komponensenkénti~~ n^2+m^2 = adott (~~legyen fix~~)

↑ egyenlőség $\forall$ lépésben definiálásakor más γ jönne ki → a Σ nem lenne már sajátfv.

$E_z = \sum_{\substack{n,m \\ n^2+m^2=\text{adott}}} A_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$

sajátfv. $\longrightarrow$ $\gamma^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(n^2+m^2)$

$\frac{\pi^2}{a^2}(n^2+m^2)$

abból, hogy a Laplace-t megoldja, erejött ki

Oldd: $y=a-x$

E_z az oldal $= \sum_{\substack{n,m \\ n^2+m^2 \text{ adott}}} A_{nm}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi(a-x)}{a}\right) = \sum_{n,m} A_{\substack{m\\n}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$

$\cdot(-1)^{n+1}\cdot\underbrace{\sin\left(n\pi-\frac{n\pi x}{a}\right)}_{-\cos(n\pi)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{n,m \\ n^2+m^2=\text{konst}}} A_{nm}(-1)^{n+1}\cdot\left(\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right)-\cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right)\overset{!}{=}0$

$\gamma^2=\frac{\pi^2}{a^2}(n^2+m^2)$ ↓

$n,m \geq 1$

legalacsonyabb n,m: pl. $n=m=1$ → nem jó

milyen n,m-re lesz ez igaz

$E_z = A_{\text{nm}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)+B\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$

↓ ilyen n,m-re lesz $n_1=m_2$, $m_1=n_2$ (felcserélve a négyzetek miatt)

Határfelt.:

$$A\cdot(-1)^{n+1}\cdot\left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi}{a}x\right)-\cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right]+B(-1)^{m+1}\cdot\left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right)-\cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right]=0$$

$$\left(A(-1)^{n+1}+B(-1)^{m+1}\right)\cdot\left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right)-\cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right]=0$$

$n=1, m=1$: $A+B=0$ $\downarrow$ $\rightarrow E_z=0$ mindenhol

$n=1, m=2$: $A-B=0$ $A=B$

$\vdots$

(ha n,m különbség | páros $\rightarrow A=-B$) | páratl $\rightarrow A=B$

$$E_z = E_{z_0}\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right]$$

$\gamma^2=\frac{\pi^2}{a^2}\underbrace{(1^2+2^2)}_{5}$ $\rightarrow$ legalacsonyabb levágási frekvencia

pl. TM-re a deriváltnak kell eltűnnie a határon $\rightarrow$ $\rightarrow$ cos alakban lejtünk sora.

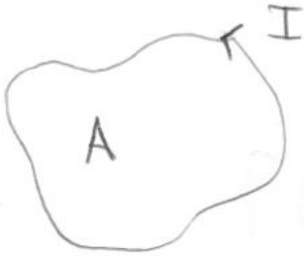
3) mágneses en. sűr.:

$$W = \int \frac{\underline{B}\cdot\underline{H}}{2}\, d^3x$$

$$W = \int \frac{\underline{j}(\underline{x})\,\underline{A}(\underline{x})}{2} d^3x$$

Magnetosztatikai energiasűrűség:

a mágneses térbe fektetett energia az a munka, amit a létrehozásakor a tekercs indukciója ellen végzünk (az indukció az áramot akadályozni próbálja)



$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$(U=) \oint_{\partial A} \underline{E}\, d\underline{r} = -\int_A \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\, d\underline{A}$$

Növelve ~~Növeljük a tér~~) δB-vel a mágneses ~~tér~~

$$\Delta W = I \int_A \delta \underline{B}\, d\underline{A}$$

$$P = U \cdot I$$

$$W = U \cdot I \cdot dt = \frac{\delta B}{\partial t} d\underline{A} \cdot I \cdot dt$$

$$\delta \underline{B} = \nabla \times \delta \underline{A}$$

↑ vektorpot.

$$\Delta W = I \int_A (\nabla \times \delta \underline{A})\, d\underline{A} = I \oint_{\partial A} \delta \underline{A}\, d\underline{r}$$

$$\int \underline{j}(\underline{x}) \cdot \delta \underline{A}(\underline{x})\, d^3x$$

$\underline{j}(\underline{x}) = I \cdot \underline{n}\, \delta(\underline{x} - \underline{x}_0)$ $\quad \underline{n}$: irányvektor

$\delta W = \int dV\, \underline{j}\, \delta \underline{A}$

$\underline{j}\, \delta \underline{A} = \frac{1}{2} \delta (\underline{j} \underline{A}) \rightarrow W = \frac{1}{2} \int d^3x\, \underline{j}(x)\, \underline{A}(x)$

Megj.: $W = \frac{1}{2} \int \underline{j}\, \underline{A}\, d^3x$

$$W' = \frac{1}{2} \int \underline{j} (\underline{A} + \nabla \chi)\, dV = \overbrace{\frac{1}{2} \int \underline{j}\, \underline{A}\, dV}^{W} + \frac{1}{2} \int \underline{j}\, \nabla \chi\, dV =$$

$$= W + \frac{1}{2} \int \nabla (\underline{j} \chi)\, dV + \frac{1}{2} \int \chi \cdot \nabla \underline{j}\, dV$$

lokalizálható térre $\qquad \operatorname{div} \underline{j} = 0$ (sztatika)

"durva": lokalizálható térre

$\int$-unk div-t $\rightarrow$

$\rightarrow$ a tér felületére (∞-re) $\int$-va zérustenk,

ha eltűnne

$W' = W$ $\checkmark$ valójában mértéktől független W

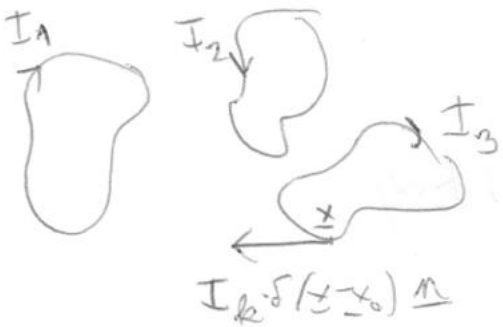
lokalizálható térben

$$W = \frac{1}{2} \int \underline{j}\, \underline{A}\, dV = \frac{1}{2} \int (\nabla \times \underline{H})\, \underline{A}\, dV = \frac{1}{2} \int \nabla (\underline{H} \times \underline{A})\, dV + \frac{1}{2} \int \underline{H} (\nabla \times \underline{A})\, dV =$$

($\nabla \times \underline{H}$: rotH)

$$= \frac{1}{2} \int \underline{H}\, \underline{B}\, dV + \emptyset$$

Indukciós együtthatók



$$W = \frac{1}{2}\int j \cdot A \, dV$$

$$\dots \quad \Delta A = -\mu_0 j \rightarrow A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{j(x')}{|x'-x|} d^3x'$$

↑ a hurkok által létrehozott tér

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi}\int d^3x \int d^3x' \frac{j(x)\, j(x')}{|x-x'|} =$$

$l, k = 1 \dots N$ a hurkok száma

$$= \frac{\mu_0}{8\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\int_k d^3x \int_l d^3x' \frac{j(x')\, j(x)}{|x-x'|} =$$

↑ l. hurokra vett $\int$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} I_k I_l \left\{\int_k dx \int_l dx' \frac{n \cdot n'}{|x-x'|}\right\} =$$

$n = \frac{dx}{|dx|}$

$$= \frac{1}{2}\sum_k L_k I_k^2 + \sum_{k,l>k} M_{kl} I_k I_l$$

↑ amikor $k=l$ (~~pótlék~~ → önindukció)

↑ a párokra így csak 1-szer összegünk

L csak a hurkok geometriai elrendezésétől függ !

$$L_k = \int_k dx \int_k dx' \frac{n n'}{|x-x'|} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} : \underline{\text{önindukciós együttható}}$$

$$M_{kl} = \int_k dx \int_l dx' \frac{n n'}{|x-x'|} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} : \underline{\text{kölcsönös ind. együttható}}$$

-to-

$$\Delta W = I \int \delta \underline{B} \, d\underline{A} = I \iint \delta \Phi_B$$

fluxus: $\Phi_B = \int_A \underline{B} \, d\underline{A}$

$$\Phi_{ke} = M_{ke} \cdot I_e$$

e. hurok B-je ennyi fluxust csinál a k. tekercsben

$$\Phi_k = L_k \cdot I_k$$

k. tekercsben folyó áram által önmagában keltett fluxus

M_{ke} szimm → érdekes, nem tűnik magától értetődőnek

Ha $M_{ke} = ?$



$\Phi = \int \underline{B} \, d\underline{A} \rightarrow \Phi \sim I \rightarrow$ egyh. $= M_{ke}$ (a másik számítási mód bonyolultabb, és ugyanezt veszi)