Elektrodinamika, 2013-2014 tavaszi félév

Pót zárthelyi dolgozat a második ZH anyagából
2014. május 21.

1. Egy L magasságú, R sugarú egyenes körhenger alakú üregrezonátort kiegészítünk egy $R \times L$ méretű téglalappal, amelyet beleforrasztunk úgy, hogy összekösse a fedlapok két párhuzamosan álló sugarút (és síkja párhuzamos a hossztengellyel, tehát az oldallappal is össze van kötve, másik L hosszúságú éle pedig a henger szimmetriatengelye). Határozzuk meg a TM-módusok sajátfrekvenciáit[1]!

Plusz kérdés (de része a feladatnak): a legkisebb sajátfrekvenciára konkrétan (számérték-szerűen) is kíváncsi vagyok[2]!

2. Egy végtelen hosszú, R sugarú ferromágneses henger mágnesezettsége legyen homogén $\mathbf{M}_0$, mely a tengelyére merőleges. Konkrétan határozzuk meg a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{H}$ tereket a hengeren belül ill. kívül[3]!

3. Egy téglatest alakú üregrezonátorban adjuk meg (valamelyik tengelyt z-tengelynek tekintve) a TE-módusokra a $B_z(x, y)$ alakját, majd ebből konkrétan, csupa valódi valós számot tartalmazó végeredményként fejezzük ki a $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ és $\mathbf{B}\,(x, y, z, t)$ tereket[4]!

A 3. feladathoz: ha az időfüggést komplex alakban $e^{-i\omega t}$-nek írjuk, akkor a $\pm z$ irányba haladó hullámok (ahol tehát a z-függés $e^{\pm i k_z z}$ alakú) esetében

$$\mathbf{E}_T = i\frac{\pm k_z \nabla_T E_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_T B_z}{\mu\varepsilon\omega^2 - k_z^2}, \quad \mathbf{B}_T = i\frac{\pm k_z \nabla_T B_z + \mu\varepsilon\omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_T E_z}{\mu\varepsilon\omega^2 - k_z^2},$$

ahol $\hat{\mathbf{z}}$ a z irányú egységvektor. *Az üregrezonátorban nem haladó hullámok vannak!*

Jó munkát!

Nagy Márton

[1] Persze minden fal tökéletes vezető.

[2] Elárulok ehhez egy titkot. Azokról a függvényekről, amiket a sugárirányú $R(r)$-re vonatkozó egyenlet megoldásához vezettünk be, mindeddig azt mondtam, hogy nem elemi függvények. Ez *általában* igaz is, *kivéve* néhány speciális esetet, amikor mégis kifejezhetők elemi függvényekkel. Itt is ez van! A mostani legalacsonyabb módus $R(r)$-jét keressük $R(r) = \chi(r)/\sqrt{r}$ alakban, és ekkor a sugárirányú egyenletet a χ-re átírva egy elég egyszerű egyenletet kell, hogy kapjunk, amiből már megvan a megoldás.

[3] Segítség: emlékezzünk vissza, milyen jellegű volt a megoldás a gömb esetében. Próbálkozzunk itt annak a kétdimenziós megfelelőjével! Ehhez rutinszerűen használni kell a „kétdimenziós dipólus" potenciálját, ill. annak gradiensét, ha nem emlékszünk erre, akkor ezzel kezdjük! Haszáljuk aztán a $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ és $\mathbf{M}$ közötti összefüggéseket, ill. a magnetosztatikában érvényes határfeltételeket!

[4] Ha kijönnek a terek, leellenőrizhetjük, hogy valóban megoldásai-e a Maxwell-egyenleteknek.