Elektrodinamika gyakorlófeladatok, példák

Nagy Márton

2018. május 7.

Mindenhol figyeljünk az indexek értéktartományaira!

Hengerkoordinátás sztatikai feladatok:

1. Készítsünk egy L magasságú a sugarú vezető hengert, amibe beleforrasztunk egyik alkotója, a középvonala, valamint az alap– és a fedlap két párhuzamos sugara közé egy $a \times L$ méretű vezető téglalapot. A téglalapot és a henger alapját ill. oldalpalástját leföldeljük (Φ=0), a fedlapon pedig legyen $\Phi = V(r, \varphi)$ adott függvény (vagyis a fedlap nincs összekötve a többi elemmel). Határozzuk meg sorfejtett alakban a potenciált a hengertartomány belsejében!

   Kb. válasz: Itt annyi a trükk, hogy ez *nem* egy teli henger (ahol a φ-ben periodicitást kell megkövetelni, azaz φ irányban az igazi valódi Fourier-sor jelenik meg kétféle, a sin-es és a cos-os tagokra vonatkozó együttható-sereggel), hanem ez egy „2π középponti szögű cikk". Meg kell követelni, hogy Φ határozottan nulla legyen φ=0-ban, de nem kell periodicitás (Φ-nek φ-függése „törhet" φ=0-ban). Eredmény, összerakva:

$$\Phi(r,\varphi,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sin(\nu_m\varphi)J_{\nu_m}(k_{nm}r)\mathrm{sh}(k_{nm}z), \quad \text{ahol} \quad \nu_m = \frac{m}{2}, \quad k_{nm} = \frac{x_{\nu_m n}}{a},$$

$$A_{nm} = \frac{1}{\pi}\frac{2}{a^2}\frac{1}{\mathrm{sh}(k_{nm}L)}\frac{1}{\left[J_{\nu_m+1}(x_{\nu_m n})\right]^2}\int_0^a \mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi rV(r,\varphi)\sin(\nu_m\varphi)J_{\nu_m}(k_{nm}r).$$

   Ugye $x_{\nu n}$ a J_ν n-edik zérushelye.

2. Legyen most egy teli fémhenger palástján $\Phi = 0$, az alap– és a fedlapon pedig legyen Φ adott függvény, $V_a(r, \varphi)$ és $V_f(r, \varphi)$! Feladat, mint fentebb. Írjuk fel konkrétan a sorfejtést!

   Válasz: Most φ irányban 2π szerinti periodicitást kell megkövetelni (azaz a Fourier-sor lesz a nyerő), z irányban pedig nem kell $z = 0$-ban Φ-nek eltűnnie, úgyhogy több együtthatósereg lesz:

$$\Phi(r,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\big(A_{nm}\sin(m\varphi)+B_{nm}\cos(m\varphi)\big)\mathrm{sh}(k_{nm}z)+\big(C_{nm}\sin(m\varphi)+D_{nm}\cos(m\varphi)\big)\mathrm{ch}(k_{nm}z)\Big)J_m(k_{nm}r),$$

   ahol $k_{nm} = \frac{x_{mn}}{a}$, és

$$\begin{aligned}
C_{nm} &= \frac{1}{\pi}\frac{2}{a^2}\frac{1}{\left[J_{m+1}(x_{mn})\right]^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a \mathrm{d}r\, rV_a(r,\varphi)\sin(m\varphi)J_m(k_{nm}r),\\
D_{nm} &= \frac{1}{\pi}\frac{2}{a^2}\frac{1}{\left[J_{m+1}(x_{mn})\right]^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a \mathrm{d}r\, rV_a(r,\varphi)\cos(m\varphi)J_m(k_{nm}r),\\
A_{nm}\mathrm{sh}(k_{nm}L)+C_{nm}\mathrm{ch}(k_{nm}L) &= \frac{1}{\pi}\frac{2}{a^2}\frac{1}{\left[J_{m+1}(x_{mn})\right]^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a \mathrm{d}r\, rV_f(r,\varphi)\sin(m\varphi)J_m(k_{nm}r),\\
B_{nm}\mathrm{sh}(k_{nm}L)+D_{nm}\mathrm{ch}(k_{nm}L) &= \frac{1}{\pi}\frac{2}{a^2}\frac{1}{\left[J_{m+1}(x_{mn})\right]^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a \mathrm{d}r\, rV_f(r,\varphi)\cos(m\varphi)J_m(k_{nm}r).
\end{aligned} \tag{0.1}$$

   Megjegyzés: ugyanezt felírhattuk volna sh és ch helyett $e^{\pm\cdots}$ függvényekkel is. Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha azt mondjuk, hogy a feladatunk tulajdonképpen két darab (egy sima és egy fejreállított) olyan feladat összege, ahol az alaplapon is Φ=0, a fedlapon pedig adott.

3. Legyen egy L magasságú a sugarú körhenger hengerpalástján adott a Φ_M potenciál $\partial_n\Phi_M$ sugárirányú deriváltja adott $B_r(\varphi, z)$ függvény, az alap– és a fedlapon pedig $\partial_n\Phi_M = 0$ (az alap– és fedlap szupravezető, a paláston adott a mágneses tér). Határozzuk meg a Φ_M potenciált sorfejtett alakban!

   Válasz: most a sugárirányú egyenlet módosított Bessel-egyenlet lesz, a z irányban a cos-ból készült állóhullámok, φ irányban pedig Fourier-sor kell. Összerakva:

$$\Phi_M(r,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\big(C_{nm}\cos(m\varphi)+D_{nm}\sin(m\varphi)\big)\cos(k_nz)I_m(k_nr), \quad k_n \equiv \frac{n\pi}{L},$$

   az együtthatók pedig (kiszedve a sugárirányú deriváltat az $r = a$ helyen, amiben előkerül az I_m módosított Bessel-függvény deriváltja, na püff, és vigyázzunk a normálási tényezővel):

$$C_{nm} = \frac{2/(L\pi)}{k_n I_m'(k_n a)} \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi B_r(\varphi, z) \cos(k_n z) \sin(m\varphi), \quad D_{nm} = \frac{2/(L\pi)}{k_n I_m'(k_n a)} \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi B_r(\varphi, z) \cos(k_n z) \cos(m\varphi).$$

4. Most legyen egy körgyűrűszelet alakú tartományunk: magassága L, külső sugara a_2, belső sugara a_1, középponti szöge α, és keressük a Φ_M mágneses skalárpotenciált, ha a belső és a külső paláston adott a $\partial_r \Phi_M$ mint z és φ függvénye (bent $B_1(\varphi, z)$, kint $B_2(\varphi, z)$, a többi oldal pedig szupravezető. Feladat, mint előbb.

   Válasz: Az előzőhöz képest különbségek: φ irányban nem Fourier-sor lesz, hanem a cos-ból képzett állóhullámok, $\cos(\nu_m \varphi)$-k, ahol $\nu_m = \frac{m\pi}{\alpha}$, $m = 0, 1, 2\ldots$, sugárirányban viszont (mivel most nem kell végesnek lennie a megoldásnak $r = 0$-ban) I_ν mellé K_ν is bejön, mint az általános megoldás része. (Jó is így, hiszen két határfeltételünk van r irányban). Szóval:

$$\Phi_M(r, \varphi, z) = \sum_{n=0^\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos(k_n z) \cos(\nu_m \varphi) \big(C_{nm} I_{\nu_m}(k_n r) + D_{nm} K_{\nu_m}(k_n r) \big), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \nu_m = \frac{m\pi}{\alpha},$$

   az együtthatók képlete pedig:

$$C_{nm} I_{\nu_m}'(k_n a_1) + D_{nm} K_{\nu_m}'(k_n a_1) = \frac{2}{L} \frac{2}{\alpha} \frac{1}{k_n} \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^\alpha \mathrm{d}\varphi \, B_1(\varphi, z) \cos(k_n z) \cos(\nu_m \varphi),$$
$$C_{nm} I_{\nu_m}'(k_n a_2) + D_{nm} K_{\nu_m}'(k_n a_2) = \frac{2}{L} \frac{2}{\alpha} \frac{1}{k_n} \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^\alpha \mathrm{d}\varphi \, B_2(\varphi, z) \cos(k_n z) \cos(\nu_m \varphi),$$

   ebből ki lehet őket lineárkombinálni.

Üregrezonátorok, hullámvezetők

1. Az órán voltak a TM-módusok; most határozzuk meg az a befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög keresztmetszetű hullámvezető TE-módusainak levágási frekvenciáit!

2. Határozzuk meg a fentebbi hengeres feladatok közül az elsőben szereplő alakú üreg sajátfrekvenciáit! Azaz: amikor egy L magasságú, a sugarú körhengerbe a tengellyel párhuzamosan beforrasztunk egy $a \times L$ oldalú téglalapot, melyet most az alaplap és a fedlap két párhuzamos sugarával is összeforrasztunk. Megjegyzés: elemi képleteket is kaphatunk a legkisebb sajátfrekvenciákra, ha visszaidézzük, hogy a feles indexű Bessel-függvények elemi függvényekkel kifejezhetők...

3. Konkrétan írjuk fel egy $a \times b \times c$ oldalú téglatestben kialakuló üregrezonátor-módusokra az $\mathbf{E}$ és a $\mathbf{B}$ terek komponensenkénti alakját! (Az órán levezetett képleteket kell használni, amelyek az $\mathbf{E}_T$-t és $\mathbf{B}_T$-t adják meg az E_z és B_z függvényében. Vigyázat! z irányban nem haladó a hullám, hanem két haladó hullám összegeként adódó állóhullám!)

4. (*) Az előző feladat alapján: gondolkozzunk el, hogyan lehet kikeverni az egy *másik* tengelyre mint z' tengelyre vonatkozó pl. TM-módusokat az eredeti TE– és TM-módusokból!

5. Magyarázzuk el, hogy egy a_1 belső és a_2 külső sugarú L magasságú hengergyűrű-üregrezonátorban milyenek a TE– és TM-módusok, és hogyan kéne őket meghatározni! (Nem lehet konkrétan valamelyik Bessel-függvény zérushelyére mint táblázatból kinézhető mennyiségre hivatkozni itt, ahogy meglátjuk.)

Nagy Márton