Elektrodinamika feladatok, gyakorlófeladatok, példák

Nagy Márton

2015. március 30.

Kiegészítő számolások, elmaradt gyakorlások (nem ZH-típusúak):

Lássuk be, hogy a következő koordinátarendszerek ortogonálisak! Vezessük be intelligensen a koordinátafüggvényeket, és írjuk fel velük egy vektormező divergenciáját, egy skalármező gradiensét és a skaláris Laplace-operátor hatását! Próbáljuk meg szétválasztani a Laplace-egyenletet ezekben a koordinátákban!

1. Adott fókuszpontú egymással párhuzamos vezérvonalú egyik ill. másik irányba nyitott parabolák rendszere! (parabolikus koordináták).

2. Két adott fókuszpont „köré” rajzolható ellipszisek ill. hiperbolák rendszere! (elliptikus koordináták).

3. Adott derékszögű egyenesek mint aszimptoták közé írható ill. az egyenesek szögfelezőihez tartozó hasonló egyenlőszárú hiperbolák seregei.

4. Két adott pont köré rajzolható Apollóniosz-körök halmaza (mi a másik koordinátasereg)?

Derékszögű koordináták:

1. Állítsuk elő egy téglalapon belül a kétdimenziós $\triangle\Phi = 0$ Laplace-egyenlet megoldását vegyes peremfeltételekkel: három oldalon legyn $\Phi = 0$, a negyediken pedig Φ normális irányú deriváltja adott függvény!

2. A geometria legyen olyan, mint a gyakorlaton is látott egzakt felösszegezhető esetben: egy végtelen hosszú „vályú”, azaz kétdimenziós feladatot vizsgálunk az $y = 0$, $x \in [0, a]$ szakasszal és az $x = 0$, $y > 0$ ill. az $x = a$, $y > 0$ félegyenesekkel határolt tartományban. Kössük ki, hogy $\Phi \to 0$, ha $y \to \infty$. Legyen $\Phi = 0$ az oldallapokon, és legyen $\Phi(x, y = 0) = V(x)$ adott függvény: $V(x) = V_0$ konstans, ha $x < a/2$ és 0 egyébként! Állítsuk elő a megoldást sor alakjában! Próbáljuk meg kiszámítani az összes együtthatót, illetve expliciten felösszegezni Φ sorát!

3. Minden ugyanaz, mint az előbb, csak most $V(x) = \alpha x$ legyen!

4. A geometria, mint előbb. Legyen most Neumann-típusú a határfeltétel: Φ normálirányú deriváltja az oldalakon 0, az $y = 0$ oldalon pedig adott $f(x)$ függvény! Legyen $f(x) = -C_0$, ha $x < a/2$, és $f(x) = C_0$, ha $x > a/2$! Feladat, mint előbb. Nulladik lépésként lássuk be, hogy ez a Neumann-határfeltétel „konzisztens” az órán is megbeszélt értelemben. Plusz kérdés: Próbáljuk meg kitalálni, hogy ezt az elrendezést hogyan lehetne megvalósítani!

5. Ugyanaz, mint az előbbi Neumann-típusú feladat. A különbség, hogy most legyen $f(x) = f_0$ konstans. Ez nem „konzisztens” Neumann-feltétel, viszont formálisan kiszámolhatjuk az eredményt. Tanulmányozzuk a sorösszeget: „hova tűnik” az inkonzisztencia?

Gömbi koordináták:

1. Írjuk fel az alábbi Dirichlet-feladat explicit megoldását: a $\Phi(r, \vartheta)$ potenciált keressük egy R sugarú gömb belsejében, ha ott $\triangle\Phi = 0$, a határon pedig $\Phi(r = R, \vartheta) = a + bz + cz^2 + dz^3$, ahol $z = R\cos\vartheta$. Ehhez szükségünk lesz az első néhány Legendre-polinom explicit kifejezésére, amit könnyen kitalálhatunk az általános alakjukból. Ne feledjük: P_l-ek ortogonális rendszert alkotnak, és P_l egy l-edfokú polinom, tehát egy maximum f-edfokú polinom P_l-ek szerint való kifejtésében biztos, hogy csak az első f darab Legendre-polinom (azaz P_0, $P_1 \ldots P_f$) fordulhat elő.

2. Adott egy R sugarú, ε_1 permittivitású gömb, a Φ potenciált keressük sor alakjában a gömbön belül és kívül, ha a gömb belsejébe, a középponttól $l < R$ távolságra egy q ponttöltést rakunk. Számítsuk ki konkrétan is az együtthatókat!

3. Az órán már megcsináltuk azt, ha a q töltés a gömbön kívül van. Számítsuk ki ennek együtthatóit is, és nézzük meg, mihez tartanak, ha a ponttöltés helyével a gömb felszínéhez tartunk! Végezzük el ezt a határátmenetet az előző feladat $l < R$ esetében is! Ugyanazt kapjuk? Próbáljuk meg közvetlenül is megoldani azt az esetet, amikor egy q ponttöltést pontosan a gömb határára teszünk! Jó tanács: utóbbi esetben érdemes a gömbön belüli és gömbön kívüli térről is leválasztani a ponttöltés terét. Persze ezek az ε_1 permittivitású közegben ill. az ε_0 permittivitású vákuumban nem ugyanolyanok.

4. Ugyancsak R sugarú, ε_1 permittivitású gömbünk van. A gömbön kívülre, a középponttól $L > R$ távolságra tengelyirányú d nagyságú dipólust helyezünk. Milyen potenciál alakul ki?

5. Az R_1 sugarú, ε_1 permittivitású dielektromos gömb belsejébe egy $R_2 < R_1$ sugarú koncentrikus gömb alakú üreget vájunk, és ebbe egy q ponttöltést helyezünk a középponttól $l < R_2$ távolságra. Milyen pontenciál alakul ki?

6. Az előző R_2 sugarú üreget most kitöltjük fémmel, és a q ponttöltést pedig az egész rendszeren kívüli vákuumba, a középponttól $L > R_1$ távolságra helyezzük. Milyen potenciál alakul ki?

Ferromágnesek:

1. Egy R_1 sugarú, homogén $\mathbf{M}_0$ mágnesezettségű ferromágneses gömbből kivágunk egy $R_2 < R_1$ sugarú koncentrikus gömböt. Milyen $\mathbf{B}$ mágneses indukció és $\mathbf{H}$ mágneses tér alakul ki a három tartományban? (Segítség: az órán látottak alapján kell dolgozni, de először jusson eszünkbe, hogy $5 - 5 = 0$.)

2. Egy R sugarú ferromágneses henger belsejében legyen adott *nem homogén* az $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ mágnesezettség: legyen $M_x(x, y, z) = \alpha x$, $M_x(x, y, z) = \alpha y$, $M_x(x, y, z) = M_0 - 2\alpha z$, ahol M_0, α adott konstansok. Az órán látottak mintájára próbáljuk meg itt is kiszámítani a $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ mezőket a Φ_M mágneses skalárpotenciál segítségével a gömbön belül ill. kívül!

3. Egy végtelen hosszú R sugarú, a tengelyre merőleges homogén $\mathbf{M}_0$ mágnesezettségű ferromágneses henger milyen $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ tereket kelt a hengeren belül ill. kívül[1]? (Segítség: emlékszünk a térbeli eset órai megoldására; próbálkozzunk itt is hasonlókkal, visszaemlékezve, hogy a „dipólust” két dimenzióban is lehetett értelmezni. Illesszük össze úgy a próbálkozásainkat, hogy teljesüljenek a $\mathbf{B}$-re és $\mathbf{H}$-ra vonatkozó határfeltételek!)

Nagy Márton

[1] Ezt a feladatot valaki egyszer gömbfüggvényekkel próbálta megoldani. (???!!!*%&@) Érthető módon *nagyon* morcos lettem; nem is gömbi feladat!