

Elektrodinamika gyakorlófeladatok, példák

Nagy Márton

2014. május 7.

- 1. (hullámvezetők)** Határozzuk meg a „tortaszelet” alakú keresztmetszetű hullámvezető módusainak (TE, TM) levágási frekvenciáit! (Azaz: a keresztmetszet egy α középponti szögű, a sugarú körcikk.)
- 2. (üregrezonátorok)** Az előző feladatban szereplő hullámvezetőből üregrezonátort készítünk úgy, hogy egymástól L távolságra lévő fémlapokkal „lezárjuk”. Mekkoraak lesznek a sajátfrekvenciák?
- 3. (hullámvezetők, üregrezonátorok)** Legyen most a hullámvezetőnk merőleges keresztmetszete egy a befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög! A feladat, mint eddig: mik a TM, TE módusok, a levágási frekvenciák, illetve a legyártott üregrezonátor sajátfrekvenciái? (Útmutatás: egészítsük ki gondolatban egy négyzettel! A négyzet módusaiból ügyesen lineárkombinálva lehet olyan módusokat gyártani, amik már az átfogón lévő határfeltételeket is kielégítik. Vigyázat: ezt a feladatot egyáltalán nem triviális általánosítani nem egyenlőszárú derékszögű háromszögekre!)
- 4. (üregrezonátor)** Határozzuk meg a téglatest alakú üregrezonátorban egy adott módus esetén tárolt összenergiát! (Útmutatás: ehhez meg kell nézni a térmennyiségek konkrét kifejezéseit, majd az ismert elektromágneses energiasűrűség-képletet kell alkalmazni.) Határozzuk meg, hogy mennyi energia disszipálódik a falakban ohmos veszteség formájában, adott σ (nagy, de véges) vezetőképesség esetén!
- 5. (üregrezonátor)** Ugyanaz, mint az előző feladat, csak most az előbb kiszámolt egyenlőszárú derékszögű háromszög keresztmetszetű üregrezonátorra¹.
- 6. (gömbfüggvények)** Legyen egy üres gömb felületén a következő a potenciál: $V = V_0$, ha $0 < \varphi < \pi/2$ vagy $3\pi/2 < \varphi < 2\pi$, és $V = 0$ egyébként². Adjuk meg a gömb belsejében a potenciált sorfejtett alakban! Az együtthatókat elég kijelölni, de gondolkozzunk el, hogy milyen l, m párokra lesz biztosan 0 a megfelelő együttható! (Útmutatás: főleg az m -ek vizsgálatára gondolok, mert az Y_{lm} -ek φ -függése elég egyszerű.)

¹Ez (és az előző feladat is) esetleg soknak tűnő, de egyszerű számolást igényel.

²Az elrendezés olyan, mint amikor egy narancsot négy egyforma északi-déli késvágással meghámozunk.

7. (gömbfüggvények, gondolkodtató)³ Fejtsük sorba a gömbi Laplace-egyenlet általános megoldásait használva gömbfüggvények szerint az origótól L távolságra lévő általános helyzetű dipólus elektrosztatikus potenciálját! A dipólus legyen a z tengelyen, és iránya zárjon be α szöget a z tengellyel⁴!

8. (mágneses energia) Határozzuk meg egy vákuumba helyezett \mathbf{m} nagyságú mágneses dipólmomentum terében egy adott R_0 távolságnál messzebbi egész térrészben tárolt energiát! (Ezt emlegettem gyakorlaton, hogy hozzájárul az akármilyen alakú áramkörök önindukciós együtthatójának becsléséhez.)

9. (mágneses energia) Legyen két (r_1 és $r_2 > r_1$ sugarú) végtelen hosszú, szupravezető anyagból készült üres hengerünk, melyeket *nem* koncentrikusan egymásba dugunk, és I áramot indítunk el bennük, az egyikben az egyik irányban, a másikban a másik irányban. Határozzuk meg a mágneses teret (mindhárom tartományban; melyikben nem lesz nulla?), majd írjuk fel azt az integrált, ami megadja az egységnyi hosszra vett önindukciós együtthatót!

10. (mágnesség) Egy a és b oldalú sík téglalap belsejébe egy c és d oldalú téglalapot ($c < a$, $d < b$) helyezünk, egy síkban, „koncentrikusan”. Számítsuk ki (azaz: legalábbis jelöljük ki az integrálokat, ami ahhoz kell, hogy kiszámíthassuk) a *mágneses fluxust*⁵, ami akkor keletkezik a *nagyobbik* vezető keretben, ha a *kisebbik* keretben I áramot folyatunk! Számítsuk ki „fordítva” is! (Útmutatás: amikor a nagyobbikban folyik az áram, és a kisebbik tekercs fluxusát számoljuk, nincs semmi gond. Amikor fordítva van, akkor (ha a kis keret szálvastagságát 0-nak vesszük) az integrál szigorúan véve nem létezik, mert a szál közelében $1/r$ -et kéne integrálni. Ennek ellenére kiindulhatunk abból, hogy a szál két oldalán a pozitív és a negatív $1/r$ -es integrálok kiejtik egymást.)

11. (mágnesség) Egy végtelen hosszú R sugarú ferromágneses *hengert* a tengelyére mérőlegesen egyenletes térfogati \mathbf{M} mágnesezettségre mágnesezünk. Határozzuk meg \mathbf{B} -t és \mathbf{H} -t a hengeren belül ill. kívül! (Útmutatás: ehhez ötlet kell; gondoljunk arra, hogy a gömbi esetben milyen egyszerű, dipólusokkal kifejezhető eredményt kaptunk, majd próbálkozzunk itt is egy „síkbeli” mágneses dipólussal!)

Nagy Márton

³Ilyen természetesen nem lesz a ZH-ban.

⁴Útmutatás: ehhez kell tudni a gömbfüggvények, azaz a módosított Legendre-polinomok explicit képletét, hogy megvizsgálhassuk őket a kis θ határesetében; ennek segítségével lehet a dipólus-határátmenetet elvégezni két töltésről.

⁵Ugyebár ez az a mennyiség, ami a Faraday-törvény (Maxwell II.) integrális alakjában szerepel. Tudom, hogy nem foglalkoztunk kifejezett fluxusszámítással, de nem egy nagy varázslat.