Elektrodinamika gyakorlófeladatok, példák

Nagy Márton

2018. március 24.

Olyanokat is leírok, amelyek esetleg voltak gyakorlaton; azokat is nyugodtan számoljátok végig még egyszer! Olyanokat is leírok, amik nem ZH-kompatibilisek (hosszabb számolást igényelnek), ezeket *-gal jelölöm; azért még tanulságosak. Legtöbb helyen írok útmutatást, néha még a választ is megadom; persze az a jó, ha ennek megnézése nélkül próbálja mindenki megcsinálni először a feladatot.

Dipólusok, multipólusok, elemi számolások

1. (*) Mekkora erővel és forgatónyomatékkal hat egymásra két általános helyzetű elektromos dipólus? Lássuk be, hogy az erő kifejezése szimmetrikus a dipólusok megcserélésére! Lássuk be, hogy noha a forgatónyomaték kifejezése nem az, az össz-impulzusmomentum mégis megmarad!

   Válasz: Ha a $\mathbf{d}_1$ dipólustól a $\mathbf{d}_2$ dipólus helyéig mutató helyvektor $\mathbf{r} \equiv r\mathbf{n}$, akkor a $\mathbf{d}_2$-re ható $\mathbf{F}_{12}$ erő és $\mathbf{M}_{12}$ forgatónyomaték némi számolással a következőnek adódik:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^4}\Big\{\big[\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2 - 5(\mathbf{d}_1\mathbf{n})(\mathbf{d}_2\mathbf{n})\big]\mathbf{n} + (\mathbf{d}_1\mathbf{n})\mathbf{d}_2 + (\mathbf{d}_2\mathbf{n})\mathbf{d}_1\Big\}, \quad \mathbf{M}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big[\mathbf{d}_1\times\mathbf{d}_2 + 3(\mathbf{d}_1\mathbf{n})(\mathbf{d}_2\times\mathbf{n})\Big].$$

   Az impulzusmomentum megmaradása nyilván igaz lesz, hiszen $\mathbf{r}\times\mathbf{F}_{12} + \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21} = 0$.

2. Mekkora erő hat külső inhomogén elektromos térben egy pontszerű elektromos kvadrupólusra, azaz olyan töltéselrendezésre, amelynek se össztöltése, se dipólusmomentuma, csak kvadrupólusmomentuma van? Vákuumban vagyunk, azaz a külső elektromos tér forrásai „messze” vannak.

   Válasz: Ahogy a dipólusra ható erőt sorfejtéssel meghatároztuk, ugyanúgy kell eljárni:

$$F_k = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})E_k(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\Big\{E_k(\mathbf{0}) + r_l\partial_l E_k(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}r_l r_p\partial_l\partial_p E_k(\mathbf{0}) + \dots\Big\} = \dots + \frac{1}{6}Q_{lp}\partial_l\partial_p E_k + \dots,$$

   ahol ugye a kvadrupólus-tenzor $Q_{kl} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})(3r_k r_l - r^2\delta_{kl})$, és kihasználtuk, hogy a *külső* elektromos térre $\triangle E_k = \partial_p\partial_p E_k = 0$; ez kellett ahhoz, hogy közben „beszúrjuk” Q_{kl} definícióját.

3. Számítsuk ki egy általános helyzetű és irányú $\mathbf{d}$ elektromos dipólus (össztöltése nulla!) *potenciális energiáját* egy adott külső elektromos potenciálban! Írjuk fel a kifejezést a külső $\mathbf{E}$ térrel is! (A dipólus helyén eredetileg vákuum volt).

   Válasz: Ez egy teljesen alapdolog, valamiért elfelejtettem megemlíteni. A $\Phi(\mathbf{r})$ külső potenciállal az $\mathcal{E}$ energia:

$$\mathcal{E} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\,\{\Phi(\mathbf{0}) + r_k\partial_k\Phi(\mathbf{0}) + \dots\} = \Phi(\mathbf{0})\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) + \partial_k\Phi(\mathbf{0})\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,r_k\rho(\mathbf{r}) = 0 + \mathbf{dE}.$$

   Közben kihasználtuk, hogy az össztöltés nulla, és felismertük a $\mathbf{d}$ dipólusmomentum-vektor definícióját.

   Megjegyzés: ebből a képletből leszármaztatható a dipólusra ható erő és forgatónyomaték képlete is, gondoljuk végig!

   Másik megjegyzés: mivel az erő és a forgatónyomaték képlete analóg, $\mathbf{m}$ mágneses dipólusra külső sztatikus $\mathbf{B}$ mágneses térben is azt mondhatjuk, hogy $\mathcal{E} = \mathbf{mB}$.

4. Eggyel tovább menve: számítsuk ki egy általános helyzetű és irányú Q_{kl} kvadrupólusmomentum (össztöltése, dipólmomentuma nulla!) potenciális energiáját adott külső elektromos potenciálban!

   Válasz: Mint az előbb, csak most eggyel tovább megyünk a sorfejtésben (és itt is kihasználjuk, hogy az össztöltés és az össz-dipólus nulla és hogy a külső térre $\partial_k\partial_k\Phi \equiv \triangle\Phi = 0$, és beírjuk a kvadrupólus definícióját):

$$\mathcal{E} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\left\{\Phi(\mathbf{0}) + r_k\partial_k\Phi(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}r_k r_l\partial_k\partial_l\Phi(\mathbf{0}) + \dots\right\} = \frac{1}{6}Q_{kl}\partial_l E_k + \dots$$

5. Értelmezzük az elektromos dipólus fogalmát két dimenzióban! Tekintsük először azt az elrendezést, amikor két, $+\eta$ és $-\eta$ vonalmenti töltéssűrűségű egyenes egymástól Δ távolságban van, és vegyük az $\eta \to \infty$, $\Delta \to 0$, $\eta\Delta = const$ határátmenetet! Milyen potenciál és térerősség alakul így ki? Ezután általánosabban is számoljuk ki egy adott $\eta(\mathbf{r})$ lokalizált kétdimenziós töltéseloszlás potenciálját nagy távolságban! (Itt $\mathbf{r}$ a kétdimenziós helykoordináta.) Milyen dipólus-fogalomhoz jutunk így? Lássuk be, hogy az előző ennek valóban speciális esete!

Válasz: A kétdimenziós potenciálra, emlékezve, hogy egy η „ponttöltésre” ez $-\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$, a következő adódik az első, két közeli töltés esetében (itt a $\pm\mathbf{\Delta}/2$ helyvektorok a két ponttöltés helyei):

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln|\mathbf{r}-\mathbf{\Delta}/2| - \ln|\mathbf{r}+\mathbf{\Delta}/2|\right) = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{\Delta}/2|}{|\mathbf{r}+\mathbf{\Delta}/2|} \approx -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(1-\frac{\mathbf{n\Delta}}{r}\right) \approx \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r\Delta}}{r} \equiv \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}^{(2)}\mathbf{n}}{r},$$

ahol itt is $\mathbf{n} \equiv \mathbf{r}/r$, és $r \equiv |\mathbf{r}|$, és a $\mathbf{d}^{(2)}$ kétdimenziós dipólus definíciója tehát:

$$\mathbf{d}^{(2)} \equiv \eta\mathbf{\Delta}.$$

A potenciál $1/r$-rel csökken (a 3D-beli $1/r^2$ helyett), ahogy talán vártuk is. Általános töltéselrendezésre ($\eta(\mathbf{r})$ kétdimenziós sűrűség esetén) ugyanezt a képletet kapjuk, és $\mathbf{d}^{(2)} \equiv \int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\,\eta(\mathbf{r})\mathbf{r}$.

Töltés„tükrözések”

1. Vázoljuk fel, milyen tér alakul ki, ha két földelt vezető lapból egy 60°-os, illetve ha egy 45°-os középponti szögű éket hajtunk, és az ék belsejébe általános helyre egy ponttöltést teszünk.

   Válasz: Ez tükrözéssel megoldható; 2 pozitív és 3 negatív tükörtöltés a 60°-os esetben, illetve 3 pozitív és 4 negatív tükörtöltés kell a 45°-os esetben.

2. Megoldottuk azt, amikor egy R sugarú földelt vezető gömb közepétől $L > R$ távolságban van egy q ponttöltés: a gömbön kívüli potenciálra jó helyettesítő kép volt, ha a gömbfelszín belsejébe, az eredeti töltés inverzióval kapott képébe egy $q' = -R/L \cdot q$ nagyságú ponttöltést képzeltünk. Idézzük ezt fel! Feladat most: legyen a gömb nem földelt, hanem elszigetelve lebegjen az űrben! Azaz: ekkor a gömb felszíne ekvipotenciális felület, $\Phi =$const, de nem feltétlenül (és: kiderül, hogy tényleg nem) nulla rajta, viszont a gömb össztöltése nulla kell, hogy legyen.
   Útmutatás: a gömb közepébe képzelt ponttöltés nem ronntja el azt, hogy a felszín ekvipotenciális lesz; ezzel megoldhatjuk, hogy az össztöltés nullává váljon.

   Válasz: a helyettesítő kép most az, hogy az $r = R^2/L$-be képzelt $-R/L \cdot q$ töltés mellé még az origóba le kell rakni egy $+R/L \cdot q$ ponttöltést; ekkor a felszínen a potenciál $\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L}$ konstans lesz (hiszen az eredeti elrendezéshez, melyben $\Phi = 0$ volt a felszínen, még hozzájön a középpontba most berakott töltés); az össztöltés a képzeletbeli gömbön belül így nulla, tehát a valódi helyzetben is (a Gauss-tétel alapján történő érveléssel, ahogy már hasonló helyzetekben láttuk).

3. Két egyforma R sugarú vezető gömb van egymástól $L > 2R$ távolságra, mindkettőn $+q$ töltés van. Írjuk fel (sor alakjában), mekkora erővel hatnak egymásra!
   Útmutatás: végtelen sok inverziót kell végezni; kétindexes sort kapunk. Fejezzük ki legalább rekurzíven az n-edik töltés nagyságát és helyét!

   Válasz: A helyzet teljesen szimmetrikus a két gömb felcserélésére. A „nulladik tükörtöltés” nagysága q_0, helye a gömb közepe (azaz a gömb közepétől vett távolsága: $D_0 = 0$). Az első inverzióval kapott töltés nagysága, mint az órán láttuk, $q_1 = -q_0 \cdot R/L$, és helye a gömb közepétől $D_1 = R^2/L$ távolságra van. A következő, második nagysága (itt a másik gömbben lévő első töltést kell inverziózni): $q_2 = -q_1 \cdot R/(L-D_1)$, távolsága a gömb közepétől: $D_2 = R^2/(L-D_1)$, és így tovább. Tehát: $D_{n+1} = R^2/(L-D_n)$, $q_{n+1} = -q_n \cdot R/(L-D_n)$. Ha ezeket a rekurziókat meg tudnánk oldani, meglenne D_n, és q_n/q_0 (a q_0-t semmi nem mondja meg egyelőre). A gömb össztöltése: $q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n$, ez végső soron fixálja q_0-t is (hogy mennyivel kellett kezdeni). Az erő tehát: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{q_n q_m}{(L-D_n-D_m)^2}$.

4. (Jó messzi töltések által keltett) homogén külső $\mathbf{E}_0$ elektromos térbe R sugarú vezető gömböt helyezünk. A gömb elszigetelt minden mástól, rajta az össztöltés nulla marad. Milyen potenciál alakul ki a térben?
   Útmutatás: keressük a gömbön kívüli potenciált úgy, mintha a gömb közepén egy, a homogén térrel párhuzamos, alkalmasan választott nagyságú pontszerű $\mathbf{d}$ dipólus lenne!

   Válasz: felírva a feltételt, hogy a potenciál legyen konstans az R sugarú gömbfelszínen, kijön, hogy ha a dipólus az $\mathbf{E}_0$ tér irányába mutat, és nagysága $d = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E_0$, akkor teljesül a feltétel. A gömbön kívül a tér tehát olyan, mint az eredeti homogén tér + ezen képzeletbeli dipólus tere.

Megjegyzés: kijön ez abból is, ha az előző feladatban a külső töltést egyre messzebb visszük, de cserébe egyre nagyobbra vesszük, hogy a gömb környéki tér nagyjából konstans maradjon, de egyre homogénebb legyen. Ekkor az inverziós kép töltés és a középpontbeli töltés dipólussá „olvad össze". Ellenőrizzük ezt!

5. (*)Földelt R sugarú fémgömbön kívül L távolságba általános helyzetű $\mathbf{d}$ elektromos dipólust helyezünk. „Magyarázzuk el", milyen tér alakul ki a gömbön kívül[1]!
Útmutatás: a dipólust két közeli töltésnek képzelhetjük, egy töltésre már (órán is) megoldottuk a feladatot. A határfeltétel ($\Phi = 0$ a felszínen) „homogén lineáris", azaz két (közeli) töltésre is megoldhatjuk a feladatot (két „tükörtöltés" lesz). Ezek is „összetolódnak dipólussá", ha ugyanezt tesszük az eredeti töltésekkel. Vigyázat!!! Kövessük végig rendesen, hogy mihez tart az össztöltés és a dipólus; talán rosszul mondtam a gyakorlaton; az össztöltés sem lesz nulla! Még segítség: ugye a dipólusvektort tartalmazó egyenes inverziós képe az origón átmenő kör, melynek a gömb középpontjában húzott érintője párhuzamos az eredeti egyenessel.

Válasz: a helyettesítő kép az, hogy a gömb belsejében, a dipólus helyének inverziójával kapott pontban (azaz: a középponttól $r = R^2/L$ távolságban) egy d' dipólust helyezünk el; ennek iránya az eredeti dipólus tengelyének inverziójával kapott kör érintőjéé, nagysága pedig $d' = \frac{R^3}{L^3}d$. Ezen kívül ugyanoda kell még tenni egy $Q' = \frac{dR}{L^2}\cos\vartheta$ nagyságú töltést is; ϑ az eredeti dipólus tengelyének a helyét a gömb középpontjával összekötő egyenessel bezárt szöge.

Megjegyzés: a mágneses analógot (mágneses dipólus + szupravezető gömb) nem lehet tükrözéssel megoldani, mégis felírható zárt alakban a megoldás; erre mostanában jöttem rá, Ortvay-feladat lesz belőle.

Komplex függvények, 2D feladatok

1. Megoldottuk komplex függvényekkel azt, amikor egy tetszőleges $\alpha < \pi$ szöget bezáró két végtelen földelt síklap között velük párhuzamosan álló töltött szál fut. Konkrétan számoljuk ki a valós Φ-t az $\alpha = 90°$ és $60°$ esetekben. Ezek töltéstükrözéssel is megoldhatók; lássuk be, hogy a két módszer ugyanazt adja!

Válasz: végig kell számolni, tényleg.

2. A korábban bevezetett síkbeli dipólus potenciálja milyen komplex differenciálható függvény valós része? Milyen komplex függvény valós része az origóban lévő, általános síkbeli irányban álló ilyen dipólus potenciálja?
Útmutatás: továbbra is emlékezzünk, hogy dipólus=2 közeli töltés. A kétdimenziós dipólusvektort fogjuk most fel, mint egy komplex számot (melynek valós ill. képzetes része a dipólus x ill. y komponense).

Válasz: fentebb azt találtuk, hogy $\mathbf{d}^{(2)}$ kétdimenziós dipólusra $\Phi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}^{(2)}\mathbf{n}}{r}$. Ha $\mathbf{d}^{(2)}$-nek megfeleltetjük a $d_0 \in \mathbb{C}$ komplex számot, akkor könnyű látni, hogy az előbbi $\Phi(x,y)$ éppen a $\tilde{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d_0}{z}$ függvény valós része. Ellenőrizzük! Ez kijön akkor is, ha két közeli ($\Delta \to 0$, $\eta \to \infty$, $\Delta\eta = |\mathbf{d}^{(2)}|$) töltés komplex pontenciáljainak összegét írjuk fel, és határértékezünk:

$$\tilde{\Phi} = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\mathrm{Ln}\left(z - \frac{d_0}{|d_0|}\frac{\Delta}{2}\right) - \mathrm{Ln}\left(z + \frac{d_0}{|d_0|}\frac{\Delta}{2}\right)\right\} = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{Ln}\frac{1 - \frac{d_0\Delta}{2|d_0|z}}{1 + \frac{d_0\Delta}{2|d_0|z}} \approx \frac{\Delta\eta}{|d_0|}2\pi\varepsilon_0\frac{d_0}{z}.$$

Innen kész, mivel $|d_0| = \Delta\eta$, ez marad fixen a határértékképzés során.

3. Lássuk be, hogy a $z'=g(z)=\frac{1}{z}$ leképezés a z sík köreit vagy egyeneseit a z' síkon is körökbe vagy egyenesekbe viszi! Ezután azt is lássuk be, hogy ez éppen az egységsugarú körre vett inverzió és utána még a vízszintes tengelyre tükrözés művelete.

Válasz: egyenest is vihet az $1/z$ leképezés egyenesbe és körbe is, és kört is. Csak be kell írni $x + iy$-t, és végigszámolni. A kör egyenletét fel kell tudni ismerni.

4. Az Apollóniosz-körökkel („töltéstükrözéssel") megcsináltuk (majdnem) azt a feladatot, amikor egy R sugarú, $\Phi = 0$ potenciálra kapcsolt („földelt") fémhenger tengelyétől $L>R$ távolságban vele párhuzamosan egy η töltött szál fut, és a hengeren kívül kerestük a potenciált. Most csináljuk meg „rendesen" komplex

[1] Nehéz megfogalmaznom, mit is várok: nem kell képletszinten felírni $\Phi(x,y,z)$-t, de ha valamilyen helyettesítő képpel („tűkrözéssel") oldjuk meg a feladatot, akkor elvárom, hogy a „tükörképek" helyzetét, nagyságát stb. pontosan adjuk meg!

függvényekkel, azaz kössük ki, hogy $\Phi = 0$ a hengeren is, és a végtelenben is!
Útmutatás: vegyük fel úgy a $\Phi = 0$ kört a komplex síkon, hogy az jobbról érintse a képzetes tengelyt (tehát origója *ne* a $z = 0$-ban egyen). Most az előbb tárgyalt mintára a $z'=g(z) = \frac{4R^2}{z}$ leképezést nézzük: ez a kört átviszi egy a képzetes tengellyel párhuzamos egyenesbe, ami a valós tengelyt ugyanott metszi, ahol a kör metszette. Gondoljuk végig, hova képeződnek a z-sík különböző tartományai, és az eredeti töltés helye! A $\tilde{\Phi}(z') = 0$ feltételt egy szokásos, egyenesre való tükrözéssel kielégíthetjük, a $z \to \infty$-re $\tilde{\Phi}(z) \to 0$ feltétel pedig azt jelenti, hogy $\tilde{\Phi}(z' = 0) = 0$ legyen; ennek kielégítéséhez még egy olyan differenciálható függvényt kell adni az előző lépésben kapotthoz, ami az előző feltételt nem rontja el. Próbálkozzunk ez utóbbira z'-ben lineáris függvénnyel!

Válasz: A z síkon a töltés helye az $R+L$ (valós) pont; a z síkon a körön kívüli tartomány a z' síkon a $\mathrm{Re}\, z' < 2R$ síkrészre képződik. A következő lesz a $\tilde{\Phi}(z')$ potenciál:

$$\tilde{\Phi}(z') = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0} \left\{ \mathrm{Ln}\left(z' - \frac{4R^2}{R+L}\right) - \mathrm{Ln}\left(z' - \frac{4RL}{R+L}\right) - \mathrm{Ln}\frac{R}{L} \cdot \left(1 - \frac{z'}{2R}\right) \right\}.$$

A második tag a töltéstükkkrözésből jött, az utolsó pedig nem rontja el azt, hogy $\tilde{\Phi}(z')$ valós része nulla az $\mathrm{Re}\, z' = 2R$ egyenesen, viszont 0-ba tolja $\tilde{\Phi}(z' = 0)$-t. Nincs is más lehetőség. A $z' = \frac{4R^2}{z}$-t visszaírva megkapjuk a z síkon a potenciált. Ez amúgy olyan lesz, mint egy Apollóniosz-körös tükrözött + egy origóbeli (azaz $z = 0$-beli) síkbeli dipólus összege: $z = 0$-ban, a körív eredeti töltéstől legtávolabbi pontjában végtelenhez tart a potenciál.

5. Adott egy „rögbilabda" alakú kétdimenziós tartomány, amit két szimmetrikusan elhelyezett egybevágó körívdarab határol, amelyek a csúcspontokban egymásra merőlegesek. A középpontjába η kétdimenziós töltést helyezünk; a határon legyen $\Phi = 0$. Milyen a potenciál a tartomány belsejében?
Útmutatás: legyen R a sugár, a komplex síkunkat vegyük fel úgy, hogy az idom egyik csúcsa legyen az origóban, és a két kör érintse a valós ill. képzetes tengelyeket. A $z' = 4R^2/z$ leképezés a két kört két merőleges egyenesbe fogja így képezni (lássuk be!); amik párhuzamosak lesznek a valós ill. a képzetes tengellyel. Innen már kétszeres tükrözéssel megvan.

6. Megismertük az $\alpha < \pi$ középponti szögű földelt fémlap-ék belsejébe tett kétdimenziós töltés problémájának megoldását komplex függvénytannal. Idézzük fel ezt! Oldjuk meg ez alapján komplex függvényekkel azt a feladatot, amikor van két, egymástól D távolságra lévő („vízszintes") fémlapunk, mindkettő $\Phi = 0$ potenciálon, és közöttük (mondjuk az alsótól $L < D$ távolságban) egy η kétdimenziós ponttöltés!
Útmutatás: Az α középponti szögű feladat megoldásában ha a töltés z_0 helye $z_0 = a + iL$, akkor el kell tolni az egészet $-a$-val, hogy z_0 a képzetes tengelyre kerüljön. Ezután venni kell azt a határesetet, hogy $a \to \infty$, azaz az ék csúcsa a $-\infty$-be megy, közben pedig $\alpha \to 0$, úgy, hogy $a\mathrm{tg}\alpha = D$ konstans maradjon. A határátmenethez segítség, ha emlékszünk, hogy $\lim_{x\to\infty}(1 + \alpha/x)^x = e^\alpha$. Ez általánosabban is igaz: ha $f(x) = x + \mathcal{O}(x^2)$, akkor is $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \alpha/f(x)\right)^x = e^\alpha$.

7. Oldjuk meg az előbbi feladatot „végtelen sok tükrözéssel" is, és lássuk be, hogy ugyanazt kapjuk!
Útmutatás: Ahhoz, hogy mindkét síkon egyszerre eltüntessük a potenciált, valóban végtelen sok ide-oda tükrözés kell. A logaritmusok így kapott végtelen összege némi trükkel felösszegezhető: a valós részt tekintve logaritmusok összege a szorzat logaritmusa. Segítség ehhez az ismert képlet: $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = (1-z^2)(1-z^2/4)(1-z^2/9)(1-z^2/16)\ldots$.

8. Oldjuk meg a 2D parabola feladatát! Azaz: legyen egy parabola fókuszpontjában egy „töltés" (azaz: η), és a parabolán írjuk elő, hogy $\Phi = 0$ („fémparabola"). Milyen potenciál alakul ki?
Útmutatás: a parabola szimmetriatengelye legyen a negatív valós féltengely; ekkor a $z' = \sqrt{z}$ kihajtogatja a z' síkon függőleges egyenessé; lássuk ezt be! A z' síkon a feltételek: a parabola képén $\Phi = 0$; ezt egy tükrözéssel megoldhatnánk. További feltétel, hogy a vágás kihajtogatott képén, a z' sík képzetes tengelyén az erővonalak párhuzamosak kell, hogy legyenek ezzel a tengellyel; csak ekkor lesz a „visszahajtogatott" potenciál az eredeti z síkon differenciálható a vágáson is. Ezt a két feltételt egyszerre csak végtelen sok tükrözéssel oldhatjuk meg ügyesen, sőt, aztán az így kapott végtelen sort fel is összegezhetjük (érdemes először a z' síkon); ugyanazzal a trükkel, mint az előző feladatban. A végtelen szorzatot z-re véve, és

elosztva a $z/2$-re felírttal kapjuk még, hogy $\cos(\pi z/2) = (1 - z^2)(1 - z^2/9)(1 - z^2/25)(1 - z^2/49)\ldots$. Utolsó lépés: mivel pont a töltés helyén nem differenciálható a $z \to z'$ leképezés, módosítani kell a töltés nagyságát a visszatéréskor; lássuk be, hogy ez egy kettes szorzót ad.

Téglatestek, téglalapok

1. Írjuk fel sorfejtett alakban egy kétdimenziós téglalap belsejében a Φ potenciált, ha a határon vegyes feltételek adottak: a) legyen három oldalon $\Phi = 0$, a negyediken pedig $\partial_n \Phi$ adott függvény, b) legyen három oldalon $\partial_n \Phi = 0$, a negyediken pedig Φ adott függvény, c) legyen két párhuzamos lapon $\Phi = 0$, a másik kettőn pedig $\partial_n \Phi = 0$ ill. $\partial_n \Phi$ adott függvény!
   Útmutatás: Ugyanúgy kell eljárni, mint a Dirichlet– és a Neumann–feladatoknál; figyelni kell, hogy a sin és cos, illetve a sh és ch közül mikor melyiket választjuk!

2. A geometria legyen olyan, mint a gyakorlaton is látott egzakt felösszegezhető esetben: egy végtelen hosszú „vályú”, azaz kétdimenziós feladatot vizsgálunk az $y = 0$, $x \in [0, a]$ szakasszal és az $x = 0$, $y > 0$ ill. az $x = a$, $y > 0$ félegyenesekkel határolt tartományban. Kössük ki, hogy $\Phi \to 0$, a $y \to \infty$. Legyen $\Phi = 0$ az oldallapokon, és legyen $\Phi(x, y = 0) = V(x)$ adott függvény: $V(x) = -V_0$ konstans, ha $x < a/2$ és $+V_0$, ha $x > a/2$. Állítsuk elő a megoldást sor alakjában! Próbáljuk meg kiszámítani az összes együtthatót, illetve itt is expliciten felösszegezni Φ sorát!

   Útmutatás: Itt a páros n-es együtthatók nem tűnnek el. A felösszegzés teljesen hasonlóan megy, mint az órán látott esetben; nézzük meg, hogy az eredmény tényleg kielégíti-e a határfeltételeket úgy, ahogy szerettük volna!

Gömbi ($P_l(\cos\vartheta)$-s) feladatok

1. ε_1 dielektromos állandójú gömb belsejébe koncentrikus fémgömböt teszünk, majd az egészen kívülre a vákuumban pontszerű töltést helyezünk. Határozzuk meg (sorfejtett alakban) a potenciált a három tartományban!

2. Meghatároztuk egy, az origótól r_0 távolságra lévő ponttöltés potenciáljának sorfejtését a $P_l(\cos\vartheta)$-k szerint. Határozzuk most meg egy tengelyirányú dipólus ilyen sorfejtését!
   Útmutatás: Szokásosan: dipólus=2 közeli töltés. Ha a töltések végtelen közel kerülnek egymáshoz, biztos mindkettőre „ugyanazon oldali” sorfejtést kell használni. A kapott képlet már nem lesz olyan szép szimmetrikus az $r < r_0$ és az $r > r_0$ esetekben.

3. Az előző alapján: dielektromos gömbbe pontszerű dipólust helyezünk úgy, hogy az elrendezés tengelyszimmetrikus legyen. Határozzuk meg sorfejtett alakban a potenciált a gömbön belül ill. kívül!

Nagy Márton