Elektrodinamika gyakorlófeladatok, példák

Nagy Márton

2017. április 5.

1.) Mekkora erővel és forgatónyomatékkal hat egymásra két általános helyzetű elektromos dipólus? Lássuk be, hogy az erő kifejezése szimmetrikus a dipólusok megcserélésére! Lássuk be, hogy noha a forgatónyomaték kifejezése nem az, az össz-impulzusmomentum mégis megmarad!

Válasz: Ha a $\mathbf{d}_1$ dipólustól a $\mathbf{d}_2$ dipólus helyéig mutató helyvektor $\mathbf{r} \equiv r\mathbf{n}$, akkor a $\mathbf{d}_2$-re ható $\mathbf{F}_{12}$ erő és $\mathbf{M}_{12}$ forgatónyomaték:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^4}\Big\{\big[\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2 - 5(\mathbf{d}_1\mathbf{n})(\mathbf{d}_2\mathbf{n})\big]\mathbf{n} + (\mathbf{d}_1\mathbf{n})\mathbf{d}_2 + (\mathbf{d}_2\mathbf{n})\mathbf{d}_1\Big\}, \quad \mathbf{M}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big[\mathbf{d}_1\times\mathbf{d}_2 + 3(\mathbf{d}_1\mathbf{n})(\mathbf{d}_2\times\mathbf{n})\Big].$$

Az impulzusmomentum megmaradása nyilván igaz lesz, hiszen $\mathbf{r}\times\mathbf{F}_{12} + \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21} = 0$.

2.) Mekkora erő hat inhomogén elektromos térben egy pontszerű elektromos kvadrupólusra (azaz olyan töltéselrendezésre, amelynek se össztöltése, se dipólusmomentuma, csak kvadrupólusmomentuma van)?

Válasz: Ahogy a dipólusra ható erőt sorfejtéssel meghatároztuk, ugyanúgy kell eljárni:

$$F_k = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})E_k(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\Big\{E_k(\mathbf{0}) + r_l\partial_l E_k(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}r_l r_p \partial_l\partial_p E_k(\mathbf{0}) + \dots\Big\} = \dots + \frac{1}{6}Q_{lp}\partial_l\partial_p E_k + \dots,$$

ahol ugye a kvadrupólus-tenzor $Q_{kl} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})(3r_k r_l - r^2\delta_{kl})$, és kihasználtuk, hogy a *külső* elektromos térre $\triangle E_k = \partial_p\partial_p E_k = 0$.

3.) Lássuk be, hogy egy síkbeli A területet körbezáró, I áramot szállító hurok mágneses momentuma $|\mathbf{m}| = I\cdot A$ nagyságú, és iránya merőleges a felületre, a jobbkézszabályos körbejárással. *Ez egy teljesen alapismeret; valamiért elfelejtettem külön megemlíteni. Mindenkinek kötelező tudnia!*!

(*) Tekintsünk most egy I áram járta általános (nem feltétlenül síkbeli) vezető hurkot! Milyen $\mathbf{m}$ mágneses momentuma van ennek? Lássuk be, hogy $\mathbf{m}$ egy adott $\mathbf{n}$ egységvektor irányába eső vetületét, $\mathbf{mn}$-et megkapjuk, ha I-t megszorozzuk a hurok $\mathbf{n}$-re merőleges síkra vett vetülete által körbezárt területtel!

Útmutatás: a Stokes-tétel elemi „levezetésénél” látott módon „rakjuk tele” kis téglalapokkal a hurok belsejét! Az, hogy egy általáno hurok vetületei vektorkomponensekként transzformálódnak, tisztán geometriailag is érdekes.

4.) Értelmezzük az elektromos dipólus fogalmát két dimenzióban! Tekintsük először azt az elrendezést, amikor két, $+\eta$ és $-\eta$ vonalmenti töltéssűrűségű egyenes egymástól Δ távolságban van, és vegyük az $\eta\to\infty$, $\Delta\to 0$, $\eta\Delta = const$ határátmenetet! Milyen potenciál és térerősség alakul így ki? Ezután általánosabban is számoljuk ki egy adott $\eta(\mathbf{r})$ lokalizált kétdimenziós töltéseloszlás potenciálját nagy távolságban! (Itt $\mathbf{r}$ a kétdimenziós helykoordináta.) Milyen dipólus-fogalomhoz jutunk így? Lássuk be, hogy az előző ennek valóban speciális esete!

5.) Milyen elektromos térerősség alakul ki, ha egy földelt végtelen fém síklap egyik oldalára általános helyzetű $\mathbf{d}$ elektromos dipólust helyezünk? Mekkora erő hat a dipólusra?

Útmutatás: egy töltésre már megoldottuk a feladatot, egy dipólust mindig elképzelhetünk úgy, mintha két közeli töltés lenne.)

6.) Az előző mágneses analógja: milyen $\mathbf{B}$ tér alakul ki, ha egy végtelen szupravezető síklap egyik oldalára általános helyzetű $\mathbf{m}$ mágneses dipólust helyezünk? Mekkora erő és forgatónyomaték hat a dipólusra! Ez alapján értelmezzük azt, hogy egy szupravezető lap fölött gravitációs térben egy dipólmágnes lebeghet! Vizsgáljuk a stabilitást is!

Útmutatás: lényegében megcsináltuk órán; ugye be kell vezetni a „mágneses töltést”, hogy formálisan két ilyenből rakhassuk össze a dipólust. Másképp kell tükrözni, mit elektromos esetben, mert más a határfeltétel! Írjuk fel ezután konkrétan a dipólusra ható erőt és forgatónyomatékot általános helyzet esetén, és vegyük bele a dipólusra ható gravitációs erőt is! Eredmény: a forgatónyomaték szempontjából a vízszintes és függőleges helyzet is stabil lenne, de a vízszintes helyzet a kedvezőbb, mert ekkor tud mélyebbre süllyedni a gravitációs térben.

7.) Végtelen síklappal elhatárolt ε_1 és ε_2 permittivitású végelen közegek közül az egyikbe egy pontszerű dipólust helyezünk. Milyen elektromos tér alakul ki a közegekben?

Útmutatás: mint fent; töltésre megcsináltuk, dipólus=2 töltés.

8.) Végtelen hosszú ε_1 permittivitású dielektromos hengert a tengelyére merőleges homogén $\mathbf{E}_0$ elektromos térbe helyezünk. Milyen tér alakul ki? (*Útmutatás:* próbálkozzunk azzal, hogy a tér bent homogén, kint pedig az eredeti tér + a henger tengelyébe rakott kétdimenziós dipólus tere, ahol a kétdimenziós dipólust egy fentebbi feladatban bevezettük!)

9.) Az előző feladat 3D analógja: dielektromos gömb homogén külső térbe helyezve. Ötlet, mint fent.

10.) Egy földeletlen (elszigetelt, „a világűrben lebegő”), nulla össztöltésű R sugarú vékony fémgömbhéj belsejébe a középponttól $l < R$ távolságra a) Q töltést, b) sugárirányba mutató pontszerű dipólust helyezünk[1]. Milyen térerősség alakul ki a gömbön belül és kívül?

Útmutatás: kint a potenciál a végtelenben nullához tart, gömbszimmetrikus, nincs benne töltés, és megoldja a $\triangle\Phi = 0$-t: (lássuk be, hogy) csak konstans nulla lehet. Emiatt a gömbfelszínen is $\Phi = 0$. Belül meg próbálozzunk ügyesen, most kifele „tükrözve” (azaz: inverziózva)!

11.) Megoldottuk komplex függvényekkel azt a feladatot, amikor egy tetszőleges $\alpha < \pi$ szöget bezáró két végtelen földelt síklap között velük párhuzamosan álló töltött szál fut. Konkrétan számoljuk ki a valós Φ-t az $\alpha = 90°$ és $60°$ esetekben. Ezek töltéstükrözéssel is megoldhatók; lássuk be, hogy a két módszer ugyanazt adja!

12.) A korábban bevezetett síkbeli dipólus potenciálja milyen komplex differenciálható függvény valós része? Milyen komplex függvény valós része az általános síkbeli irányban álló ilyen dipólus potenciálja?

Útmutatás: továbbra is emlékezzünk, hogy dipólus=2 közeli töltés.

13.) Milyen potenciál alakul ki, ha vákuumban két párhuzamos, $+\eta$ ill. $-\eta$ vonalmenti töltéssűrűségű végtelen hosszú töltött szál fut? Milyen alakúak az ekvipotenciális „felületek” (azaz 2D-ben: görbék)?

Útmutatás: mindegyik ekvipotenciális felület kör lesz. (Ezek határeseteként jelenik meg a $\Phi = 0$-s felezőmerőleges egyenes.) Tulajdonképpen ezek az ún. Apollóniosz-körök: azon pontok halmazai, amelyeknek a két ponttól vett távolságaránya állandó; ez úgy jön be, hogy $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, és két logaritmus különbsége az argumentumok hányadosának logaritmusa. Ha nem emlékeznénk az Apollóniosz-körökre, lássuk be, hogy tényleg igaz az említett geometriai állítás!

14.) Az előzőek alapján: egy R sugarú, $\Phi = 0$ potenciálra kapcsolt („földelt”) fémhenger tengelyétől $L > R$ távolságra vele párhuzamosan egy töltött szál fut. Oldjuk meg töltéstükrözéssel a feladatot!

[1] Pl. elképzelhetjük, hogy a fémgömböt kivágjuk, beletesszük, majd visszahegggesztjük.

Útmutatás: itt ugye a végtelenben nem tart sehova a potenciál, úgyhogy pl. egy végtelen szál teréhez nyugodtan hozzáadhatunk egy konstanst. A megoldást úgy kapjuk, hogy a $+\eta$ szálunkhoz egy $-\eta$-t kell képzelni a henger belsejébe, úgy, hogy a henger Apollóniosz-kör legyen; állítás: itt is az inverzióval adódik a képzelt töltés helye[2]. Keressünk olyan komplex differenciálható függvényt, aminek ez a valós része!

15.) Lássuk be, hogy a $z' = g(z) = 1/z$ leképezés a z sík köreit vagy egyeneseit a z' síkon is körökbe vagy egyenesekbe viszi[3].

16.) Az előző alapján: adott egy olyan „rögbilabda” alakú kétdimenziós tartomány, amit két szimmetrikusan elhelyezett egybevágó körívdarab határol, amelyek a csúcspontokban egymásra merőlegesek. A középpontjába η kétdimenziós töltést helyezünk; a határon legyen $\Phi = 0$. Milyen a potenciál a tartomány belsejében?

Útmutatás: legyen R a sugár, a komplex síkunkat vegyük fel úgy, hogy az idom egyik csúcsa legyen az origóban, és a két kör érintse a valós ill. képzetes tengelyt. A $z' = 1/z$ leképezés a két kört két merőleges egyenesbe fogja így képezni (lássuk be!); amik párhuzamosak lesznek a valós ill. a képzetes tengellyel. Innen már kétszeres tükrözéssel megvan.

17.) Megismertük az $\alpha < \pi$ középponti szögű földelt fémlap-ék belsejébe tett kétdimenziós töltés problémájának megoldását komplex függvénytannal. Idézzük fel ezt! Oldjuk meg ez alapján komplex függvényekkel azt a feladatot, amikor van két, egymástól A távolságra lévő („vízszintes”) fémlapunk, mindkettő $\Phi = 0$ potenciálon, és közöttük valahol egy 2D ponttöltés!

Útmutatás: Az α középponti szögű feladat megoldásában ha a töltés z_0 helye $z_0 = a + ib$, akkor el kell tolni az egészet $-a$-val, hogy z_0 a képzetes tengelyre kerüljön. Ezután venni kell azt a határesetet, hogy $a \to \infty$, azaz az ék csúcsa a $-\infty$-be megy, közben pedig $\alpha \to 0$, úgy, hogy $a\mathrm{tg}\alpha = A$ konstans maradjon. A határátmenethez segítség, ha emlékszünk, hogy $\lim_{x\to\infty}(1+\alpha/x)^x = e^\alpha$. Ez általánosabban is igaz: ha $f(x) = x + \mathcal{O}(x^2)$, akkor is $\lim_{x\to\infty}\big(1+\alpha/f(x)\big)^x = e^\alpha$.

18.) Nehezebb: oldjuk meg az előbbi feladatot „végtelen sok tükrözéssel” is, és lássuk be, hogy ugyanazt kapjuk!

Útmutatás: Ahhoz, hogy mindkét síkon egyszerre eltüntessük a potenciált, valóban végtelen sok ide-oda tükrözés kell. A logaritmusok így kapott végtelen összege némi trükkel felösszegezhető: a valós részt tekintve logaritmusok összege a szorzat logaritmusa. Segítség ehhez az ismert képlet: $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = (1-z^2)(1-z^2/4)(1-z^2/9)(1-z^2/16)\ldots$.

19.) Bonyolultabb: oldjuk meg a 2D parabola feladatát! Azaz: legyen egy parabola fókuszpontjában egy „töltés” (azaz: η), és a parabolán írjuk elő, hogy $\Phi = 0$ („fémparabola”). Milyen potenciál alakul ki?

Útmutatás: a parabola szimmetriatengelye legyen a negatív valós féltengely; ekkor a $z' = \sqrt{z}$ kihajtogatja a z' síkon függőleges egyenessé; lássuk ezt be! A z' síkon a feltételek: a parabola képén $\Phi = 0$; ezt egy tükrözéssel megoldhatnánk. További feltétel, hogy a vágás kihajtogatott képén, a z' sík képzetes tengelyén az erővonalak párhuzamosak kell, hogy legyenek ezzel a tengellyel; csak ekkor lesz a „visszahajtogatott” potenciál az eredeti z síkon differenciálható a vágáson is. Ezt a két feltételt egyszerre csak végtelen sok tükrözéssel oldhatjuk meg ügyesen, sőt, aztán az így kapott végtelen sort fel is összegezhetjük (érdemes először a z' síkon); ugyanazzal a trükkel, mint az előző feladatban. A végtelen szorzatot z-re véve, és elosztva a $z/2$-re felírttal kapjuk még, hogy $\cos(\pi z/2) = (1-z^2)(1-z^2/9)(1-z^2/25)(1-z^2/49)\ldots$. Utolsó lépés: mivel pont a töltés helyén nem differenciálható a $z \to z'$ leképezés, módosítani kell a töltés nagyságát a visszatéréskor; lássuk be, hogy ez egy kettes szorzót ad.

[2] Fontos különbség a 3D esethez képest, hogy itt határozottan $+\eta$-hoz $-\eta$ kell, míg ott $+q$-hoz $-R/L\cdot q$ kellett.
[3] Nem *vagy-vagy* értendő: kör$\to$kör, egyenes$\to$egyenes, egyenes$\to$kör és kör$\to$egyenes is lehetséges!

20.) Írjuk fel sorfejtett alakban egy kétdimenziós téglalap belsejében a Φ potenciált, ha a határon vegyes feltételek adottak: a) legyen három oldalon $\Phi = 0$, a negyediken pedig $\partial_n \Phi$ adott függvény, b) legyen három oldalon $\partial_n \Phi = 0$, a negyediken pedig Φ adott függvény, c) legyen két párhuzamos lapon $\Phi = 0$, a másik kettőn pedig $\partial_n \Phi = 0$ ill. $\partial_n \Phi$ adott függvény!

Útmutatás: Ugyanúgy kell eljárni, mint a Dirichlet– és a Neumann–feladatoknál; figyelni kell, hogy a sin és cos, illetve a sh és ch közül mikor melyiket választjuk!

21.) A geometria legyen olyan, mint a gyakorlaton is látott egzakt felösszegezhető esetben: egy végtelen hosszú „vályú”, azaz kétdimenziós feladatot vizsgálunk az $y = 0$, $x \in [0, a]$ szakasszal és az $x = 0$, $y > 0$ ill. az $x = a$, $y > 0$ félegyenesekkel határolt tartományban. Kössük ki, hogy $\Phi \to 0$, a $y \to \infty$. Legyen $\Phi = 0$ az oldallapokon, és legyen $\Phi\left(x, y = 0\right) = V\left(x\right)$ adott függvény: $V\left(x\right) = -V_0$ konstans, ha $x < a/2$ és $+V_0$, ha $x > a/2$. Állítsuk elő a megoldást sor alakjában! Próbáljuk meg kiszámítani az összes együtthatót, illetve itt is expliciten felösszegezni Φ sorát!

Útmutatás: Itt a páros n-es együtthatók nem tűnnek el. A felösszegzés teljesen hasonlóan megy, mint az órán látott esetben; nézzük meg, hogy az eredmény tényleg kielégíti-e a határfeltételeket úgy, ahogy szerettük volna!

22.) ε_1 dielektromos állandójú gömb belsejébe koncentrikus fémgömböt teszünk, majd az egészen kívülre a vákuumban pontszerű töltést helyezünk. Határozzuk meg (sorfejtett alakban) a potenciált a három tartományban!

23.) Meghatároztuk egy, az origótól r_0 távolságra lévő ponttöltés potenciáljának sorfejtését a $P_l(\cos\vartheta)$-k szerint. Határozzuk most meg egy tengelyirányú dipólus ilyen sorfejtését!

Útmutatás: Szokásosan: dipólus=2 közeli töltés. Ha a töltések végtelen közel kerülnek egymáshoz, biztos mindkettőre „ugyanazon oldali” sorfejtést kell használni. A kapott képlet már nem lesz olyan szép szimmetrikus az $r < r_0$ és az $r > r_0$ esetekben.

24.) Az előző alapján: dielektromos gömbbe pontszerű dipólust helyezünk úgy, hogy az elrendezés tengelyszimmetrikus legyen. Határozzuk meg sorfejtett alakban a potenciált a gömbön belül ill. kívül!

Nagy Márton